

# Einführung in die Ballistik

Die Reihe »Einführung in die Ballistik«  
wurde 1960 begründet von  
Professor Dr. Dr. E. h. Waldemar Wolff



# Äußere Ballistik

Eine Einführung in die Theorie  
der Geschößbewegung

Von o. Professor Dr. rer. nat. habil. Günter Hauck



Militärverlag  
der Deutschen Demokratischen Republik  
Berlin 1972

**1. Auflage, 1. bis 2,5. Tausend**

**Militärverlag der Deutschen Demokratischen Republik · Berlin 1972**

**Cheflektorat Militärliteratur**

**Lizenz-Nr. 5 · ES-Nr.: 18 B 2**

**Lektor: Oberstleutnant Dipl.-Ing. Werner Kießhauer**

**Schutzumschlag und Einband: Wolfgang Ritter**

**Zeichnungen: Helga Keil**

**Typografie: Dieter Lebek · Hersteller: Hannelore Münnich**

**Vorauskorrektor: Ilse Fähndrich · Korrektor: Rita Abraham**

**Printed in the German Democratic Republic**

**Gesamtherstellung: Offizin Andersen Nexö, Leipzig**

**Redaktionsschluß: 03.01.1972**

**Bestellnummer: 7453875**



## Vorwort

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen über die Theorie der Geschößbewegung hervorgegangen. Es wendet sich nach Inhalt und Aufbau an Leser mit naturwissenschaftlich-technischer Vorbildung, die sich in die physikalisch-mathematischen Grundlagen der Waffentechnik einarbeiten wollen.

Bei der Abfassung des Manuskripts haben eine Reihe neuerer (bisher nicht oder nur schwer zugänglicher) Untersuchungen ihren Niederschlag gefunden, was den Verfasser zu der Hoffnung berechtigt, auch dem Fachballistiker einige nützliche Informationen und Anregungen vermitteln zu können.

Zur Theorie der Geschößbewegung liegen Hunderte von wissenschaftlichen Arbeiten vor. Dieses Gebiet ist auch in der Gegenwart Gegenstand intensiver Forschungen und kann keineswegs als abgeschlossen gelten. Bei der Abfassung eines Lehrbuchs, das als erste Einführung in die Äußere Ballistik dienen soll, mußte somit eine relativ einschneidende Stoffauswahl getroffen werden. Daß hierbei – neben der persönlichen Erfahrung des Verfassers – auch dessen Vorliebe für bestimmte Verfahren eine nicht unwesentliche Rolle gespielt hat, soll nicht verschwiegen werden.

Bei der Darstellung der in das Buch aufgenommenen Methoden wurde nach dem Prinzip verfahren, für jede Klasse von Problemen jeweils mindestens ein Verfahren so ausführlich abzuhandeln, daß der Leser in der Lage ist, die Ableitungen selbständig nachzuvollziehen und einschlägige Probleme der ballistischen Praxis zu lösen.

Auf die Wiedergabe alternativer Verfahren für ein und dasselbe Problem mußte im allgemeinen verzichtet werden. Bei der Entscheidung zwischen zwei ballistisch gleichwertigen Methoden haben die rechentechnischen Vorzüge den Ausschlag gegeben.

Die Äußere Ballistik ist physikalisch ein Teilgebiet der Dynamik, dessen mathematische Behandlung dadurch erschwert ist, daß die Differential-

gleichungen für die Geschößbewegung in der Luft im allgemeinen Fall keine geschlossene Lösung zulassen. Der Leser wird der Erörterung der in diesem Buch behandelten Probleme deshalb nur dann in vollem Umfang folgen können, wenn er über mathematische und physikalische Grundkenntnisse in dem Umfang verfügt, wie sie von einem Absolventen einer Ingenieurschule bzw. einem Hochschulstudenten einer technischen Fachrichtung nach dem zweiten Studienjahr gefordert werden.

Da der potentielle Leser des Buches nur in den seltensten Fällen Gelegenheit haben wird, zusätzlich Vorlesungen über das behandelte Stoffgebiet zu hören, werden die Ableitungen der Formeln relativ ausführlich wiedergegeben. Durchgerechnete Beispiele, Kontrollfragen und Übungsaufgaben sollen die Aneignung des Stoffes im Selbststudium erleichtern.

Abschnitte, die etwas höhere mathematische Anforderungen stellen oder weiterführende Betrachtungen enthalten, sind mit einem Stern (\*) vor der Abschnittsnumerierung gekennzeichnet; sie können bei der ersten Durchsicht des Buches übergangen werden.

Im Mittelpunkt dieses Buches stehen diejenigen außenballistischen Probleme, die mit den sogenannten Punktmasse-Modellen (Bewegung einer Punktmasse im Vakuum bzw. im luftgefüllten Raum) gelöst werden können.

*Kapitel 1* gibt einen Überblick über Gegenstand, Hauptaufgaben und Methoden der Äußeren Ballistik.

*Kapitel 2* ist der Bewegung eines „punktförmigen“ Geschosses im Vakuum gewidmet. Am Beispiel dieses mathematisch leicht zugänglichen Problems werden das Begriffssystem der Äußeren Ballistik und die Methodik der Behandlung von Bahnmodellen erläutert.

*Kapitel 3* behandelt das Kräftesystem am Geschöß in dem Umfang, wie dies für die Formulierung des sogenannten klassischen Bahnmodells der Äußeren Ballistik (Bewegung einer Punktmasse im luftgefüllten Raum) erforderlich ist. Die Ausführungen konzentrieren sich darauf, die Normalatmosphären und Standard-Luftwiderstandsgesetze, die für die Außenballistik von Bedeutung sind, einzuführen und zu erläutern.

In *Kapitel 4* wird das klassische Bahnmodell der Äußeren Ballistik formuliert, wobei eine Reihe äquivalenter Darstellungen der ballistischen Bewegungsdifferentialgleichungen möglich ist. Unter Verwendung der abgeleiteten Bewegungsgleichungen wird ein Überblick über die allgemeinen Eigenschaften von Flugbahnen im luftgefüllten Raum gegeben.

*Kapitel 5* behandelt die analytischen und numerischen Verfahren zur Integration der Bewegungsgleichungen des klassischen Bahnmodells. Breiten Raum nehmen hierbei diejenigen Methoden ein, die auf die Berechnung rasanter Flugbahnen zugeschnitten sind.

*Kapitel 6* enthält eine systematische Darstellung der (linearen) außenballistischen Störungstheorie. Die Darstellung ist so gewählt, daß die abgeleiteten Beziehungen leicht auf andere (kompliziertere) Bahnmodelle übertragen werden können.

Aufbauend auf den Darlegungen der Kapitel 1 bis 6, wird in *Kapitel 7* die Methodik der Vorbereitung, Durchführung und Auswertung von Schußtafel-Schießen bei der Erdartillerie erörtert. Die relativ ausführliche Abhandlung dieses Problemkreises ist gerechtfertigt, da die Aufstellung von Schußtafeln ohne Zweifel die wichtigste angewandte Aufgabe der Äußeren Ballistik ist.

Auf die meßtechnischen Probleme, die bei Schußtafel-Schießen zu lösen sind, kann allerdings nicht näher eingegangen werden.

Nicht behandelt werden in diesem einführenden Lehrbuch die Bewegung von Geschossen um ihren Schwerpunkt, die Bewegung von Raketengeschossen auf der Antriebsbahn, die artilleristische Schießlehre sowie die Methoden der konstruktiven Ballistik. Diesen Themenkreisen sind im Rahmen dieser Lehrbuchreihe gesonderte Arbeiten gewidmet.

Der *Anhang* des Buches enthält einige Auszüge aus ballistischen Tafelwerken, die für die Durchrechnung der Zahlenbeispiele und die Lösung der Übungsaufgaben benötigt werden, ferner eine Zusammenstellung der verwendeten Formelsymbole, das Literaturverzeichnis sowie ein Namen- und Sachregister.

Um Rückverweisungen zu erleichtern, sind alle wichtigen Gleichungen sowie die Tabellen, Bilder, Übungsaufgaben und Kontrollfragen numeriert. Die Numerierung erfolgt hierbei durch zwei Zahlen, die durch einen Punkt getrennt sind: Die erste Zahl bezeichnet das Kapitel, die zweite Zahl dient zur fortlaufenden Numerierung innerhalb der Kapitel.

Verweisungen auf das Literaturverzeichnis am Ende des Buches stehen in eckigen Klammern.

Die Anregung zur Abfassung des vorliegenden Lehrbuchs verdanke ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Dr. E. h. *Waldemar Wolff* (Langebrück/Dresden). Seine Vorlesungen zur Theoretischen Ballistik, die sich durch strenge Wissenschaftlichkeit, enge Praxisbezogenheit und hohe didaktische Meisterschaft auszeichneten, waren

mir Vorbild bei der Auswahl und Darstellung der in diesem Buch abgehandelten Probleme.

Der Lektor des Buches, Genosse Dipl.-Ing. *Werner Kießhauer*, hat den Fortgang der Arbeiten an dem Manuskript mit ständigem Interesse verfolgt und durch zahlreiche Hinweise gefördert, wofür ich ihm herzlich danke.

Ich danke weiterhin meinen Mitarbeitern sowie allen Genossen, die mich bei den Vorarbeiten zu diesem Buch tatkräftig unterstützt haben, ferner dem Militärverlag der Deutschen Demokratischen Republik für das geduldige Eingehen auf die Wünsche des Autors und der Offizin Andersen Nexö, Leipzig, für die gediegene Ausführung des komplizierten Formelsatzes und die gute Gestaltung des Buches.

Dresden, den 3. Januar 1972

*G. Hauck*

# 1. Einleitung: Ballistische Flugbahnmodelle

Die klassische Äußere Ballistik, der das vorliegende Buch gewidmet ist, studiert die Bewegung von un gelenkten Geschossen unter dem Einfluß äußerer Kräfte vom Austritt aus der Waffenmündung (bei Raketen: vom Brennschlußpunkt an) bis zum Auftreffen auf dem Ziel.

Die Analyse der Kräfte und Faktoren, von denen der Flugbahnverlauf und die Genauigkeit der Bahnvorhersage abhängen, ist ebenfalls Aufgabe der Äußeren Ballistik.

Aus der vorgenannten Abgrenzung des Gegenstands der Äußeren Ballistik ist erkennbar, daß diese Disziplin auf Ergebnisse der Dynamik, der Strömungslehre und der Thermodynamik zurückgreifen muß und sich in hohem Grade moderner mathematischer Methoden bedienen wird.

Die Ballistik als eigenständige Wissenschaft zu betreiben, resultiert nicht in erster Linie aus dem Querschnittscharakter und dem großen Umfang des Fachgebiets, sondern ist vielmehr eine notwendige Folge der Vielzahl spezifischer Problemstellungen und Algorithmen.

Die wissenschaftliche Ballistik hat in den zurückliegenden Jahren eine tiefgreifende Wandlung erfahren, die einer Neubegründung der Ballistik als physikalisch-mathematische Disziplin gleichkommt. Diese Entwicklung ist gekennzeichnet durch eine Präzisierung der ballistischen Modelle und die Ausarbeitung leistungsfähigerer Lösungsalgorithmen.

Hauptanliegen der Äußeren Ballistik ist es, Verfahren und Methoden zu entwickeln, die es gestatten, von dem bekannten Bewegungszustand eines Flugkörpers (Geschosses) zu einem gewissen Zeitpunkt  $t = t_0$  mit hinreichender Genauigkeit auf den Bewegungszustand des betreffenden Flugkörpers zu einem späteren Zeitpunkt  $t = t^* > t_0$  zu schließen (*direkte Aufgabe der Außenballistik*).

Der Bewegungszustand eines Geschosses wird durch Angabe der *Bahnelemente* charakterisiert.

Im Falle der ebenen Bewegung eines als Massenpunkt idealisierten Geschosses können als Bahnelemente etwa Verwendung finden: die Flugbahnkoordinaten  $x$  und  $y$ , die Bahngeschwindigkeit  $v$  und der Neigungswinkel  $\vartheta$  der Bahntangente, dargestellt als Funktion der Flugzeit  $t$ .

Durchläuft  $t^*$  das Intervall von  $t = t_0$  bis  $t = t_e$  ( $t_0 \leq t^* \leq t_e$ ), so ist die obengenannte direkte Aufgabe der Äußeren Ballistik damit identisch, für das Intervall  $[t_0, t_e]$  den Verlauf der Bahnelemente des Flugkörpers vorherzusagen.

Das *Problem der Bahnvorhersage* umfaßt drei Teilprobleme:

- die Aufstellung eines physikalischen Modells für den zu untersuchenden Bewegungsvorgang;
- die Beschreibung des physikalischen Bahnmodells durch ein geeignetes mathematisches Modell;
- die Lösung des Gleichungssystems des mathematischen Bahnmodells.

Man verfährt hierbei nach dem Prinzip, die geforderte Genauigkeit der Bahnvorhersage mit dem einfachsten (am wenigsten komplizierten) Bahnmodell zu erreichen.

Ein Flugkörper unterliegt während seiner Bewegung im erdnahen Raum einer großen Anzahl von Einflüssen.

Das *physikalische Bahnmodell* sondert aus dieser Vielzahl von Einflüssen diejenigen aus, die für den Ablauf des zu untersuchenden Bewegungsvorgangs als unwesentlich erscheinen. Ob bei einer derartigen (mehr oder weniger willkürlichen) Aufspaltung der Einflüsse in *wesentliche* und *unwesentliche* wichtige Effekte verlorengehen, zeigt sich allerdings erst nach genauer Analyse der Lösungen des mathematischen Bahnmodells.

Einem bestimmten physikalischen Bahnmodell – hier verstanden als Summe der physikalischen Idealisierungen – können sehr unterschiedliche *mathematische Bahnmodelle* zugeordnet werden. Die in diesem Buch dargestellten außenballistischen Probleme werden mathematisch zweckmäßigerweise als Anfangswertaufgaben für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen formuliert. Durch Lösung dieser Anfangswertaufgaben erhält man die Bahnelemente der vorhergesagten (idealen) Bahn.

Das physikalische Bahnmodell greift aus der Gesamtheit  $E$  von Einflüssen, die auf den Flugkörper einwirken, nur eine gewisse Teilmenge  $M$  heraus (siehe die schematische Darstellung Bild 1.1). Man wird also nicht erwarten können, daß die Bahnelemente der Modellbahn  $B$  genau

mit den aus einem Schießversuch folgenden Bahnelementen der realen Bahn *A* übereinstimmen: Es entstehen Vorhersagefehler  $\Delta x$  (Bild 1.2). Bis jetzt ist stillschweigend angenommen worden, daß die Gleichungen des mathematischen Bahnmodells exakt gelöst werden können. Das ist jedoch nur in Sonderfällen möglich: Im allgemeinen ist man gezwungen, an Stelle der gewünschten *exakten Modellbahn B* eine *genäherte (numerisch ermittelte) Modellbahn C* zu benutzen.

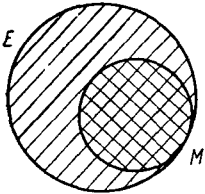


Bild 1.1  
Schema der Modellbildung

Der durch die numerische Approximation der exakten Modellbahn *B* hervorgerufene Schußweitenfehler sei  $\delta x$  (Bild 1.2). Bei dem heutigen hohen Stand von numerischer Mathematik und Rechentechnik kann man fast immer erreichen, daß der Approximationsfehler  $\delta x$  betragsmäßig wesentlich kleiner als der Modellfehler  $\Delta x$  ist:  $|\delta x| \ll |\Delta x|$ . Die Gesamtgenauigkeit der Bahnvorhersage hängt somit in erster Linie von der Vollständigkeit des zugrunde liegenden *physikalischen* Bahnmodells ab.

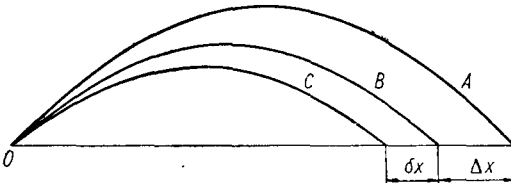
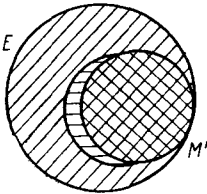


Bild 1.2  
Vorhersage- und Approximationsfehler bei Flugbahnen  
*A* – wahre (experimentelle) Bahn; *B* – Modellbahn; *C* – numerische Approximation der Modellbahn

Stellt sich nach dem Lösen der Modellgleichungen heraus, daß das gewählte Bahnmodell zu speziell (zu stark eingeschränkt) ist, sich also ein zu großer Modellfehler  $|\Delta x|$  ergibt, so kann man (in begrenztem Umfang) noch nachträglich die Teilmenge *M* der erfaßten Einflüsse durch eine *Störungsrechnung* erweitern:  $M \rightarrow M'$  (siehe Bild 1.3). Die Durchführung einer speziellen Störungsrechnung ist aber nur dann

sinnvoll, wenn die nachträglich zu berücksichtigenden Einflüsse als geringfügige Abweichung von den ursprünglich zugrunde gelegten Bedingungen zu werten sind. In diesem Fall ist der Arbeitsaufwand für die Störungsrechnung häufig wesentlich geringer als der Aufwand für die erneute Lösung der allgemeinen Modellgleichungen. Bei umfassenden Änderungen der physikalischen Voraussetzungen der Bahnvorhersage empfiehlt es sich allerdings, das Bahnmodell (bzw. die in das Bahnmodell eingehenden Funktionen und Parameter) abzuändern und die Lösung der Modellgleichungen unter den neuen Voraussetzungen zu wiederholen.



**Bild 1.3**  
*Schema der nachträglichen Erweiterung eines Modells mit Hilfe der Störungstheorie*

Die Aufstellung von Modellen für andere Teilbereiche der Ballistik erfordert im Prinzip die gleichen Überlegungen, die hier für Bahnmodelle dargestellt worden sind.

Die in diesem Buch enthaltenen außenballistischen Verfahren sind auf *Bahnen von Geschossen kurzer und mittlerer Reichweite* zugeschnitten. Bei der Formulierung von Bahnmodellen für die Bewegung derartiger Flugkörper sind Festlegungen zu folgenden Teilfragen zu treffen:

- I. der (idealisierten) Struktur des Flugkörpers,
- II. dem Bezugssystem, in dem der Bewegungsvorgang betrachtet werden soll,
- III. dem Kräftesystem am Flugkörper (Vernachlässigung „zweitranziger“ Kräfte),
- IV. der Struktur des Mediums, in dem sich das Geschöß bewegt (etwa Wahl einer Standardatmosphäre), und
- V. dem Bewegungszustand des Flugkörpers im Anfangspunkt des Vorhersageintervalls.

In den folgenden Kapiteln werden zwei spezielle Bahnmodelle besprochen:

- das *parabolische Bahnmodell* für die Bewegung eines punktförmigen Geschosses im Vakuum und



– das *klassische Bahnmodell*, das die Bewegung eines Punktmasse-Geschosses im luftgefüllten Raum beschreibt.

In der ballistischen Praxis werden drei Hauptaufgaben der Äußeren Ballistik unterschieden:

Die 1. *Hauptaufgabe der Äußeren Ballistik* besteht in der Ermittlung der Bahn des als Massenpunkt idealisierten Geschosses unter meteorologischen und ballistischen Normalbedingungen.

Die 2. *Hauptaufgabe der Äußeren Ballistik* umfaßt das Studium der Rotationsbewegung des Geschosses um seinen Schwerpunkt sowie die Ermittlung des Einflusses der Geschoßrotation auf die Bahnelemente der Schwerpunktsbahn und die Streuung des Auftreffpunkts.

Gegenstand der 3. *Hauptaufgabe der Äußeren Ballistik* ist die Durchführung der Störungsrechnung, in der Artillerie auch als *Theorie der Verbesserungen* bezeichnet.

Die Theorie der Verbesserungen verfolgt das Ziel, den Einfluß, den kleine (zufällige oder systematische) Abweichungen der meteorologischen und ballistischen Bedingungen des Schießens von den Standardbedingungen auf die Bahnelemente des Geschosses ausüben, zu ermitteln und durch Korrektur der Anfangsbedingungen des Schießens zu kompensieren.

Als 4. *Hauptaufgabe der Äußeren Ballistik* könnte die Aufstellung von Schußtafeln hinzugefügt werden.

Mit den in diesem Buch dargestellten Bahnmodellen lassen sich nur die 1., 3. und 4. Hauptaufgabe erschöpfend behandeln.

Die Ergebnisse, die bei der Lösung der Hauptprobleme der Äußeren Ballistik erzielt werden, finden ihre praktische Anwendung bei der Projektierung von Waffen, Geschossen und artilleristischen Geräten.

### **Kontrollfragen zu Kapitel 1**

- 1.1. Welche Teilprobleme faßt man unter dem Oberbegriff *Bahnvorhersage* zusammen?
- 1.2. Was verstehen Sie unter einem (physikalischen bzw. mathematischen) *Bahnmodell*?
- 1.3. Zu welchen Teilfragen sind Festlegungen erforderlich, um ein *Bahnmodell* eindeutig zu definieren?
- 1.4. Charakterisieren Sie den Inhalt der Hauptaufgaben der Äußeren Ballistik!

## 2. Die parabolische Theorie der Geschößbewegung

Im luftleeren Raum und bei konstanter Fallbeschleunigung sind die Flugbahnen eines Geschosses Parabeln. Man bezeichnet das diesen Bewegungsvorgang beschreibende außenballistische Modell deshalb als *parabolisches Bahnmodell*.

Das parabolische Bahnmodell ist bei den üblichen Geschöß-Anfangsgeschwindigkeiten als Modell für die Bahnvorhersage im allgemeinen ungeeignet. Eine Reihe von Beziehungen, die sich mit der parabolischen Theorie ergeben, sind jedoch als relativ gute Näherungsformeln von praktischer Bedeutung.

Der Hauptgrund, der für eine ausführliche Darstellung der parabolischen Theorie spricht, ist methodischer Art: Das Bahnmodell der parabolischen Theorie hat eine so einfache Struktur, daß nahezu alle außenballistischen Aufgaben geschlossen gelöst werden können. Das parabolische Bahnmodell ist deshalb vorzüglich geeignet, die Methodik der Aufstellung und der mathematischen Behandlung von Bahnmodellen zu demonstrieren und die für die Außenballistik typischen Begriffsbildungen zu erläutern.

### 2.1. Das Bahnmodell der parabolischen Theorie

Zur Konstruktion eines physikalischen Bahnmodells sind, wie in Kapitel 1 ausgeführt, eindeutige Festlegungen über die Struktur des Flugkörpers, das Bezugssystem, das Kräftesystem am Flugkörper, die Struktur des Mediums, in dem sich das Geschöß bewegt, sowie den Bewegungszustand im Anfangspunkt des Vorhersageintervalls erforderlich.

Das *Bahnmodell der parabolischen Theorie* beruht auf folgendem System von Voraussetzungen:

- I. *Struktur des Flugkörpers*: Das Geschöß ist eine Punktmasse der Masse  $m$ ; überdies gelte  $m = \text{const}$ .
- II. *Bezugssystem*: Als Bezugssystem dient ein rechtwinklig-kartesisches Koordinatensystem  $\{x, y, z\}$ , das fest mit der Erdoberfläche verbunden ist. Von der Erdrotation wird abgesehen; das  $x, y, z$ -System kann somit als *Inertialsystem* behandelt werden.
- III. *Kräftesystem am Flugkörper*: An dem (punktförmigen) Geschöß greift als einzige Kraft die Schwerkraft  $\mathbf{G} = m\mathbf{g}_0$  an; der Vektor  $\mathbf{g}_0$  der Fallbeschleunigung ist konstant nach Betrag und Richtung ( $g_0 = |\mathbf{g}_0| = \text{const}$ ).
- IV. *Struktur des Mediums, in dem die Geschößbewegung vonstatten geht*: Die Flugbahn verläuft im Vakuum.
- V. *Bewegungszustand im Anfangspunkt des Vorhersageintervalls<sup>1)</sup>*: Das Geschöß befindet sich zum Zeitpunkt  $t = t_0$  im Ursprung  $O$  des  $x, y, z$ -Systems und hat dort die Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)^2$  relativ zur Erdoberfläche.

Unter den Voraussetzungen I bis V sind die Geschößflugbahnen Parabeln (*parabolische Theorie der Geschößbewegung*).

Die Tangentialebene an die (kugelförmig vorausgesetzte) Erde im Abgangspunkt heiße *Mündungsebene*; die hierzu senkrechte Ebene, die den Vektor der Anfangsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  und den Vektor der Fallbeschleunigung  $\mathbf{g}_0$  enthält, heiße *Abgangsebene*.

Der Ursprung  $O$  des erdfesten  $x, y, z$ -Systems befinde sich an der Erdoberfläche, wobei die Koordinatenachsen wie folgt gewählt werden: Die  $x$ -Achse ist die Schnittgerade von Abgangs- und Mündungsebene und wird positiv in Richtung zum Ziel gezählt. Die positive  $y$ -Achse weist entgegengesetzt zur Richtung von  $\mathbf{g}_0$ ; die  $z$ -Achse ergänzt die  $x$ - und  $y$ -Achse zu einem Rechtssystem (siehe Bild 2.1).

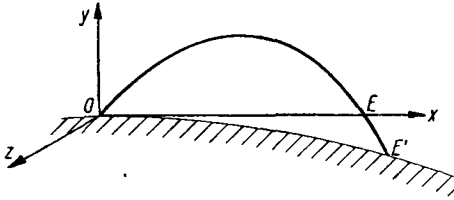
Da die Abgangsebene die Vektoren  $\mathbf{v}_0$  und  $\mathbf{g}_0$  enthält und außer der Schwerkraft keine weiteren Kräfte wirken, tritt die Flugbahn an keiner Stelle aus der  $x, y$ -Ebene heraus. Der Geschößflug kann deshalb als zweidimensionaler (ebener) Bewegungsvorgang behandelt werden.

<sup>1)</sup> Diese Voraussetzung wird bei späteren Untersuchungen (wie bei der Behandlung des Bombenwurfs) abgeschwächt werden.

<sup>2)</sup>  $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$  ist eine Kurzbezeichnung für  $\dot{x}_0 \mathbf{i}_x + \dot{y}_0 \mathbf{i}_y + \dot{z}_0 \mathbf{i}_z$ , worin  $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$  die Einheitsvektoren in  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Richtung bedeuten. Diese symbolische Schreibweise für die Komponenten eines Vektors wird im folgenden wiederholt benutzt werden.

In Matrixschreibweise ist  $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$  der Spaltenvektor  $[\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0]^T$ .

Um ein bestimmtes (vorgegebenes) Ziel  $Z$  zu treffen, muß die Abgangsebene folglich so gewählt werden, daß sie den Zielpunkt  $Z$  enthält. Der durch  $t = t_0$  festgelegte Anfangspunkt des Vorhersageintervalls heiße *Abgangspunkt*, der durch  $t = t_e$  definierte Endpunkt des Vorhersageintervalls soll *Auftreffpunkt* genannt werden. Die Flugbahnelemente im Abgangspunkt erhalten den Index „0“ ( $t_0, x_0, y_0, v_0, \vartheta_0$ ), die Flugbahnelemente im Auftreffpunkt den Index „e“ ( $t_e, x_e, y_e, v_e, \vartheta_e$ ).



*Bild 2.1  
Zur Wahl des Bezugssystems  
in der parabolischen Theorie*

Unter der Voraussetzung V fallen Abgangspunkt und Ursprung des  $x, y, z$ -Systems zusammen:  $(t_0; x_0, y_0, v_0, \vartheta_0) = (t_0; 0, 0, v_0, \vartheta_0)$ . Bei Bahnen kurzer Reichweite kann man Mündungsebene und Erdoberfläche miteinander identifizieren. Die Entfernung vom Abgangspunkt bis zum Auftreffpunkt auf der Erdoberfläche nennt man dann meist *Horizontalschußweite* (Bild 2.1; siehe auch Abschnitt 4.1.4.).

Die Voraussetzungen I bis V definieren das physikalische Bahnmodell. Um diesem physikalischen Modell ein entsprechendes mathematisches Bahnmodell zuzuordnen, geht man von dem 2. Newtonschen Axiom aus:

*Masse mal Beschleunigung = Kraft*

$$m \quad \times \quad \mathbf{b} \quad = \quad \mathbf{K}. \quad (2.1)$$

Gemäß Voraussetzung II ist im vorliegenden Fall  $\mathbf{K} = \mathbf{G} = m\mathbf{g}_0$ . Mit

$$\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z) = \left( \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right) = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z});$$

$$\mathbf{K} = (K_x, K_y, K_z) = (0, -G, 0)$$

ist die vektorielle Gleichung (2.1) den drei skalaren Gleichungen quivalent

$$m \ddot{x} = 0, \quad m \ddot{y} = -m g_0, \quad m \ddot{z} = 0. \quad (2.2)$$

Zu dem Differentialgleichungssystem (2.2) treten die Anfangsbedingungen ( $t = t_0$ ):

$$\begin{aligned} x(t_0) = y(t_0) = z(t_0) &= 0; \\ \dot{x}(t_0) = u_0, \quad \dot{y}(t_0) = w_0, \quad \dot{z}(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Für die Komponenten  $\dot{x}_0 = u_0$  und  $\dot{y}_0 = w_0$  des Vektors der Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$  liest man in Bild 2.2 ab

$$u_0 = v_0 \cos \vartheta_0, \quad w_0 = v_0 \sin \vartheta_0, \quad (2.4)$$

wenn man den Abgangswinkel mit  $\vartheta_0$  bezeichnet.

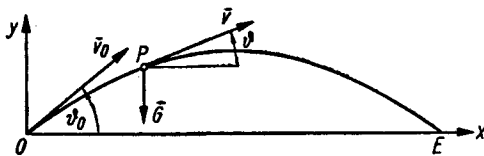


Bild 2.2  
Die Flugbahnparabel

Das *mathematische Bahnmodell der parabolischen Theorie* lautet wegen (2.2) bis (2.4) damit:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0, & \dot{x}(t_0) = u_0, & x(t_0) = 0, \\ \ddot{y} &= -g_0, & \dot{y}(t_0) = w_0, & y(t_0) = 0, \\ \ddot{z} &= 0, & \dot{z}(t_0) = 0, & z(t_0) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Das Anfangswertproblem (2.5) – und damit auch die durch dieses Anfangswertproblem beschriebenen Flugbahnen – hängen nicht von der Geschossmasse  $m$  ab: *Bei gleichen Anfangsbedingungen bewegen sich alle Geschosse – unabhängig von ihrer Masse und Form – auf derselben Bahn.*

Die drei Differentialgleichungen 2. Ordnung, aus denen das System (2.5) besteht, sind nicht miteinander gekoppelt, können also getrennt voneinander und in beliebiger Reihenfolge integriert werden. Das Fehlen einer Kopplung ist der mathematische Ausdruck dafür, daß die Bewegungen der Punktmasse in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung voneinander unabhängig sind und – ohne sich gegenseitig zu beeinflussen – überlagert werden können.

Aus der dritten Gleichung des Systems (2.5) liest man ab, daß die  $z$ -Koordinate der Flugbahn zu allen Zeiten  $t$  identisch Null ist:  $z(t) \equiv 0$ .

Die Differentialgleichung für die  $z$ -Koordinate kann deshalb bei den folgenden Überlegungen unberücksichtigt bleiben. Das System (2.5) reduziert sich damit auf:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 0, & \dot{x}(t_0) &= u_0, & x(t_0) &= 0, \\ \ddot{y} &= -g_0, & \dot{y}(t_0) &= w_0, & y(t_0) &= 0.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Das Anfangswertproblem (2.6) ist das mathematische Modell für die ebene Bewegung eines Geschosses im Vakuum.

Es erhebt sich die Frage, wie die in diesem Abschnitt formal eingeführten Begriffe *Anfangszeitpunkt des Vorhersageintervalls*, *Abgangspunkt* und *Anfangsgeschwindigkeit* auf das praktische Schießen zu übertragen sind. Beim Schießen mit Rohr Waffen kann dies in der folgenden Weise geschehen.

Der *Anfangszeitpunkt des Vorhersageintervalls*  $t_0$  ist derjenige Moment, in dem die mechanische Verbindung zwischen Geschöß und Rohr endet.

Der *Abgangszeitpunkt* ist als der Moment definiert, in dem der Geschößboden (bei flügelstabilisierten Geschossen: das Heck des aerodynamischen Stabilisators) durch den Mündungsquerschnitt der Waffe tritt. Dieser Zeitpunkt ist bei Experimenten besser zu bestimmen als der Moment, in dem die mechanische Verbindung zwischen Rohr und Geschöß endet.

Bei Untersuchungen zur Geschößbewegung wird der Abgangszeitpunkt in der Regel als Nullpunkt der Zeitmessung genommen.

Der *Abgangspunkt* wird definiert als Lage des Geschößschwerpunkts im Anfangszeitpunkt  $t_0$  des Vorhersageintervalls.

Da die Abmessungen eines Geschosses im Vergleich zur Schußweite klein sind, kann man als Abgangspunkt auch das Zentrum des Mündungsquerschnitts annehmen.

Der *Abgangswinkel*  $\vartheta_0$  ist der Winkel, den der Vektor der Bahngeschwindigkeit des Geschosses im Abgangspunkt mit der Mündungsebene bildet. Im allgemeinen unterscheidet sich dieser Winkel von dem *Erhöhungswinkel*  $\varphi$  des Rohres, der vor dem Schuß (beim Richten der Waffe) eingestellt worden ist. (Der Winkel  $\varphi$  ist definiert als Winkel zwischen der Seelenachse des Rohres und der horizontalen Mündungsebene.)

Die Abweichung des Abgangswinkels  $\vartheta_0$  von dem Erhöhungswinkel  $\varphi$ , die *Abgangsfehlerwinkel*  $\delta$  genannt wird, kommt durch Deformationen

und Schwingungen des Rohres beim Schuß zustande:  $\vartheta_0 = \varphi + \delta$ . Neben dem vertikalen Abgangsfehler kann auch ein horizontaler Abgangsfehlerwinkel  $\omega$  auftreten. (Die ideale, gewünschte Abgangsebene bildet mit der tatsächlichen Abgangsebene den Winkel  $\omega$ .)

Die *Anfangsgeschwindigkeit*  $v_0$  ist eine hypothetische Größe; sie stimmt nicht mit der *Geschwindigkeit*  $v_a$  des Geschosses im Abgangspunkt überein.

Durch den Gasstrahl, der beim Schuß aus der Waffe austritt, wird das Geschoß nach Verlassen des Rohres noch eine gewisse Strecke beschleunigt; der Geschwindigkeitszuwachs beträgt hierbei etwa 0,5% bis 1,5% von  $v_a$ . Bereits in einer Entfernung von wenigen Metern vor der Waffenmündung ist die Nachwirkung des Gasstrahls jedoch so weit abgesunken, daß die verzögernde Wirkung des Luftwiderstands überwiegt.

Da die Nachströmung der Pulvergase sowohl meßtechnisch wie auch rechnerisch schwer zu erfassen ist, mißt man in mehreren Entfernungen  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), die außerhalb des Nachwirkungsbereichs liegen, die Geschoßgeschwindigkeiten  $v_i$ . Mit Hilfe der Formeln für die Bahnelemente wird hieraus die Geschoßgeschwindigkeit im Abgangspunkt berechnet. Der bei dieser Reduktion ermittelte Zahlenwert für  $v$  heißt *Anfangsgeschwindigkeit* des Geschosses (Symbol:  $v_0$ ).

Aus dem Gesagten ist ersichtlich, daß sich für  $v_0$  unterschiedliche Zahlenwerte ergeben, wenn man den Rückschluß von den Geschwindigkeitsmeßwerten  $v_i$  in den Entfernungen  $x_i$  auf die Geschwindigkeit  $v_0$  im Abgangspunkt ( $x_0 = 0$ ) unter Verwendung unterschiedlicher Bahnmodelle ausführt.<sup>1)</sup>

## 2.2. Die Integration der Bewegungsgleichungen

Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin, die Gleichungen (2.6) des mathematischen Bahnmodells der parabolischen Theorie zu integrieren und Formeln für die Flugbahnelemente aufzustellen. Der Weg, der zur Lösung dieser Aufgabe eingeschlagen wird, ist methodisch so angelegt, daß er auch bei der Behandlung des klassischen Bahnmodells der Äußeren Ballistik gangbar ist.

Aus dem 2. Newtonschen Axiom ergeben sich die ballistischen Bewegungsgleichungen als System von zwei Differentialgleichungen

<sup>1)</sup> Siehe hierzu Abschnitt 5.2.1.5 und Bild 5.5.

2. Ordnung. Eine derartige Darstellung der Bewegungsgleichungen ist für viele Untersuchungen der Ballistik nicht sehr zweckmäßig; man transformiert deshalb das System von zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung in ein System von vier Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Wie aus der Mathematik bekannt ist, kann eine derartige Umwandlung auf unendlich viele Arten vorgenommen werden, wenn man zuläßt, daß in dem transformierten System eine andere unabhängige Variable und neue abhängige Variable auftreten.

In den folgenden Abschnitten werden zwei neue Variablensysteme (Systeme der Bahnelemente) eingeführt, die in der Ballistik häufig benutzt werden. Das Anfangswertproblem für die Flugbahn hat in diesen Variablensystemen unterschiedliche Gestalt und Struktur.

Die Benennung der verschiedenen Formen der Flugbahndifferentialgleichungen soll vereinbarungsgemäß nach der darin auftretenden unabhängigen Variablen erfolgen.

Diese Bezeichnungsweise ist so lange eindeutig, wie bei jeder unabhängigen Variablen nur *ein* Satz von abhängigen Variablen benutzt wird. Für unterschiedliche Variablensysteme mit ein und derselben abhängigen Variablen müssen deshalb zusätzliche Bezeichnungen eingeführt werden (z. B. *t-System* und *modifiziertes t-System*).

### 2.2.1. Das *t*-System der Bewegungsgleichungen

Das *t*-System der Bewegungsgleichungen erhält man aus (2.6), indem man die Horizontal- und die Vertikalkomponente der Bahngeschwindigkeit *v* als neue Variable *u* und *w* einführt:

$$u := dx/dt, \quad w := dy/dt.^1)$$

Man erhält nach einer kurzen Umformung als Anfangswertproblem im  $\{t|x, y, u, w\}$ -System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, & x(t_0) &= 0; \\ \dot{y} &= w, & y(t_0) &= 0; \\ \dot{u} &= 0, & u(t_0) &= u_0 = v_0 \cos \vartheta_0; \\ \dot{w} &= -g_0, & w(t_0) &= w_0 = v_0 \sin \vartheta_0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

<sup>1)</sup> In Definitionsgleichungen steht auf der Seite der zu definierenden Größe neben dem Gleichheitszeichen ein Doppelpunkt (:= oder =:).



Die Integration dieses Anfangswertproblems liefert die Bahnelemente  $x, y, u, w$  als Funktion der Flugzeit  $t$  sowie der Flugbahnparameter  $v_0$  und  $\vartheta_0$ . Die Lösung von (2.7) kann damit in der Form angesetzt werden:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_x(t; t_0 | v_0, \vartheta_0), & y &= \varphi_y(t; t_0 | v_0, \vartheta_0), \\ u &= \varphi_u(t; t_0 | v_0, \vartheta_0), & w &= \varphi_w(t; t_0 | v_0, \vartheta_0). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Die Fallbeschleunigung  $g_0$  wird im Rahmen der parabolischen Theorie als universelle Konstante behandelt.

Um die Struktur der Funktionen  $\varphi_j$  ( $j = x, y, u, w$ ) zu ermitteln, müssen die Differentialgleichungen (2.7) integriert werden.

Die Integration der dritten und vierten Gleichung von (2.7) liefert:

$$u = u_0, \quad w = w_0 - g_0 t.$$

Setzt man dies in die ersten beiden Gleichungen von (2.7) ein, so nehmen diese die Gestalt an:

$$\dot{x} = u_0, \quad \dot{y} = w_0 - g_0 t.$$

Die Integration dieser sehr elementaren Differentialgleichungen ergibt ( $t_0 = 0$ ):

$$x = \int_0^t u_0 \, d\tau = u_0 \tau \Big|_0^t = u_0 t,$$

$$y = \int_0^t (w_0 - g_0 \tau) \, d\tau = \left( w_0 \tau - \frac{1}{2} g_0 \tau^2 \right) \Big|_0^t = w_0 t - \frac{1}{2} g_0 t^2.$$

Die Lösung (2.8) lautet somit explizit:

$$x = \varphi_x(t; t_0 | v_0, \vartheta_0) \equiv (v_0 \cos \vartheta_0) t, \quad (2.9)$$

$$y = \varphi_y(t; t_0 | v_0, \vartheta_0) \equiv (v_0 \sin \vartheta_0) t - \frac{1}{2} g_0 t^2, \quad (2.10)$$

$$u = \varphi_u(t; t_0 | v_0, \vartheta_0) \equiv v_0 \cos \vartheta_0, \quad (2.11)$$

$$w = \varphi_w(t; t_0 | v_0, \vartheta_0) \equiv v_0 \sin \vartheta_0 - g_0 t. \quad (2.12)$$

Aus diesen Formeln ist ersichtlich:

1. Die Kurve  $y = \varphi_y(t)$  ist eine nach unten geöffnete Parabel, deren Scheitel die Koordinaten  $(t_s, y_s)$  hat:

$$(t_s, y_s) = \left( \frac{v_0}{g_0} \sin \vartheta_0, \frac{v_0^2}{2g_0} \sin^2 \vartheta_0 \right).$$

2. Die Flugbahnparabel  $y = \varphi_x(t)$  ergibt sich durch Überlagerung einer Translationsbewegung mit der Geschwindigkeit  $v_0$  in Richtung der Abgangslinie und einer reinen Fallbewegung (siehe Bild 2.3a).

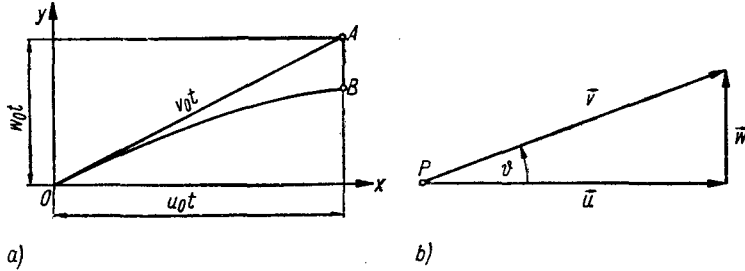


Bild 2.3 Kinematische Beziehungen in der parabolischen Theorie

- a - Zerlegung der Geschosswegung in eine Translationsbewegung längs der Abgangslinie  $\overline{OA}$  und eine reine Fallbewegung längs  $\overline{AB}$ ;  
 b - Zerlegung der Bahngeschwindigkeit  $v$  im Flugbahnpunkt P in die Horizontalgeschwindigkeit  $u$  und die Vertikalgeschwindigkeit  $w$

Man liest in Bild 2.3 b ab:

$$v = \sqrt{u^2 + w^2}, \quad (2.13)$$

$$p := \tan \vartheta = w/u. \quad (2.14)$$

Ersetzt man in (2.13) und (2.14)  $u$  und  $w$  gemäß (2.11) und (2.12), so erhält man für die Zeitabhängigkeit der Bahngeschwindigkeit  $v$  und der Flugbahnneigung  $p$ :

$$v = \varphi_v(t; t_0 | v_0, \vartheta_0) \equiv \sqrt{(v_0 \cos \vartheta_0)^2 + (v_0 \sin \vartheta_0 - g_0 t)^2};$$

$$p = \varphi_p(t; t_0 | v_0, \vartheta_0) \equiv \frac{v_0 \sin \vartheta_0 - g_0 t}{v_0 \cos \vartheta_0}. \quad (2.15)$$

Wegen  $p = \tan \vartheta$  folgt hieraus für den Neigungswinkel  $\vartheta$  der Bahntangente:

$$\vartheta = \varphi_\vartheta(t; t_0 | v_0, \vartheta_0) \equiv \arctan \left( \tan \vartheta_0 - \frac{g_0 t}{v_0 \cos \vartheta_0} \right). \quad (2.16)$$

Die Formeln (2.13) und (2.14) sind rein kinematischer Art und deshalb von der Struktur des verwendeten Bahnmodells unabhängig. Die Gültigkeit der Formeln (2.15) und (2.16) hingegen ist auf die parabolische Theorie beschränkt.

Bild 2.4 veranschaulicht den Verlauf der Bahnelemente  $x, y, u, w, v$  und  $p$  als Funktion der Flugzeit  $t$ , wie er sich nach der parabolischen Theorie ergibt. Zum Vergleich sind die entsprechenden Verläufe für den luftgefüllten Raum eingetragen (unterbrochene Linien). Die Bahnparameter sind der Bildunterschrift zu entnehmen.

Der Charakter der Zeitabhängigkeit der Bahnelemente im luftgefüllten Raum unterscheidet sich quantitativ und qualitativ von der Zeitabhängigkeit der Bahnelemente im Vakuum, was recht deutlich wird, wenn man die Bahnelemente nicht als Funktion von  $t$ , sondern als Funktion von  $t/t_0$  darstellt (Bild 2.5).

## 2.2.2. Das $x$ -System der Bewegungsgleichungen

Neben dem  $t$ -System  $\{t|x, y, u, w\}$  hat das  $x$ -System  $\{x|y, t, u, p\}$ , das die Bahnelemente  $y, t, u, p := \tan \vartheta$  als Funktion von  $x$  und den beiden Parametern  $v_0$  und  $\vartheta_0$  liefert, weite Verbreitung gefunden.

Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen im  $x$ -System bereitet keine Schwierigkeiten.

Durch Anwendung der Kettenregel folgt aus den ersten drei Gleichungen von (2.7):

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{u},$$

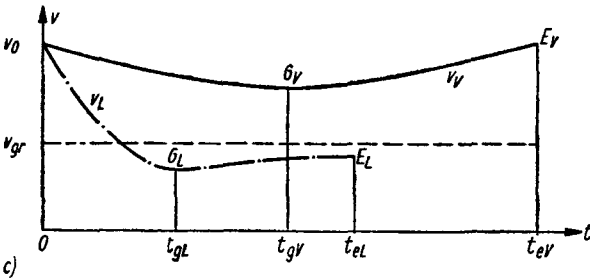
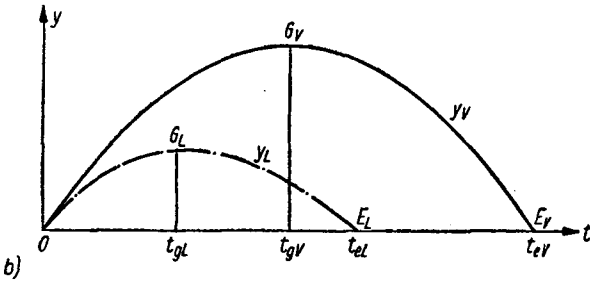
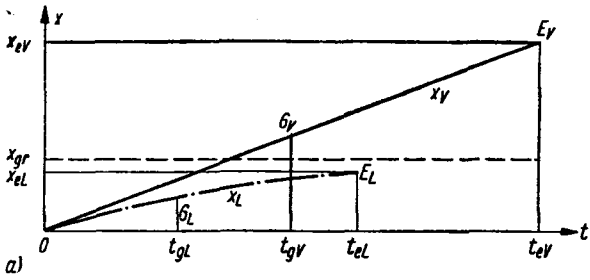
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{w}{u} = p,$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{u}}{\dot{x}} = \frac{0}{u} = 0.$$

Ferner gilt:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left( \frac{w}{u} \right) \cdot \frac{1}{u} = \frac{\dot{w}u - w\dot{u}}{u^3} = -\frac{g_0}{u^2}.$$

(Fortsetzung Seite 28)



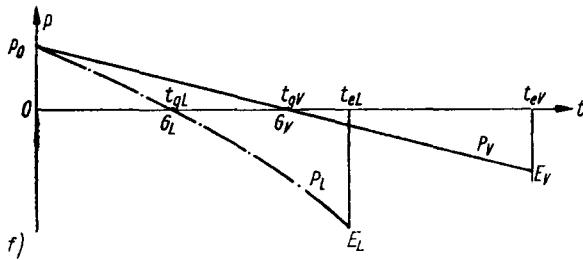
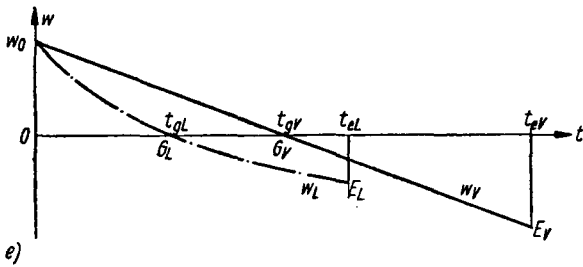
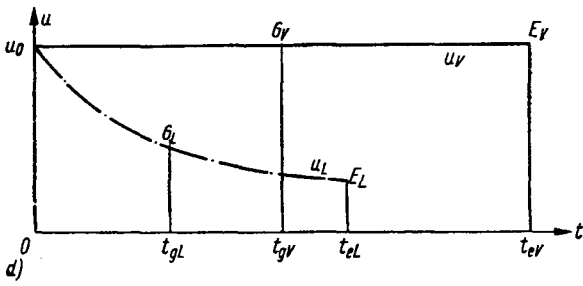
**Bild 2.4** Verlauf der Bahnelemente im Vakuum (—) und im luftgefüllten Raum (·-·-·) als Funktion der Flugzeit  $t$  (bei gleichem Abgangswinkel  $\vartheta_0$  und gleicher Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ )

(Beispiel:  $v_0 = 1000 \text{ m/s}$ ;  $\vartheta_0 = 40^\circ$ ;  $c_{43} = 0$  bzw.  $0,5 \text{ m}^2/\text{kg}$ )

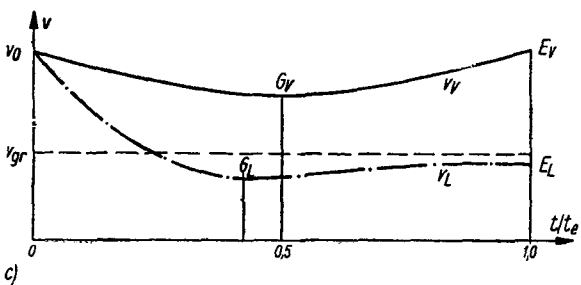
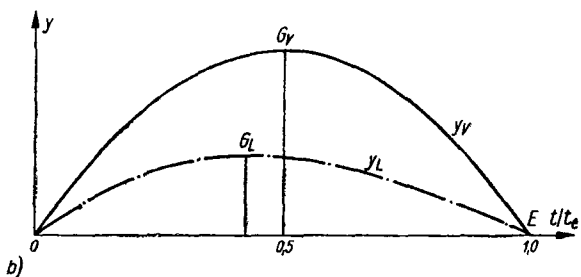
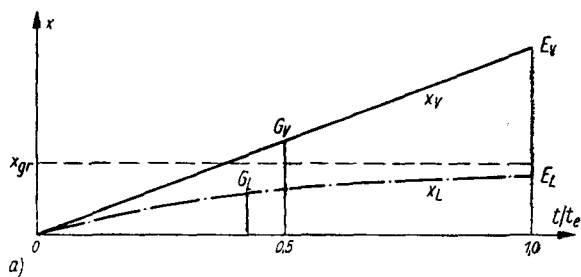
a - Horizontalentfernung  $x$ ;

b - Flugbahnordinate  $y$ ;

c - Betrag  $v$  der Bahngeschwindigkeit  $v$ ;



**Bild 2.4 (Fortsetzung)**  
*d* - Horizontalkomponente  $u$  der Bahngeschwindigkeit  $v$ ;  
*e* - Vertikalkomponente  $w$  der Bahngeschwindigkeit  $v$ ;  
*f* - Neigung  $p := \tan \theta$  der Bahrtangente



**Bild 2.5** Verlauf der Bahnelemente im Vakuum (—) und im luftgefüllten Raum (- · - · -) als Funktion der relativen Flugzeit  $t/t_e$  (bei gleichem Abgangswinkel  $\vartheta_0$  und gleicher Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ )

(Beispiel:  $v_0 = 1000 \text{ m/s}$ ;  $\vartheta_0 = 40^\circ$ ;  $c_{43} = 0$  bzw.  $0,5 \text{ m}^2/\text{kg}$ )

a - Horizontalentfernung  $x$ ;

b - Flugbahnordinate  $y$ ;

c - Betrag  $v$  der Bahngeschwindigkeit  $v$ ;

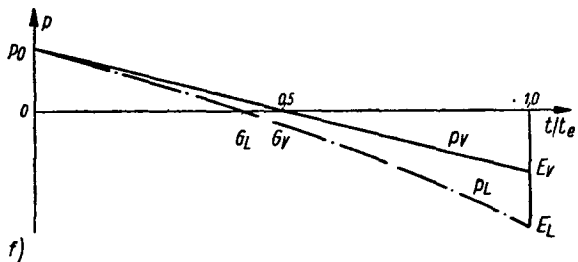
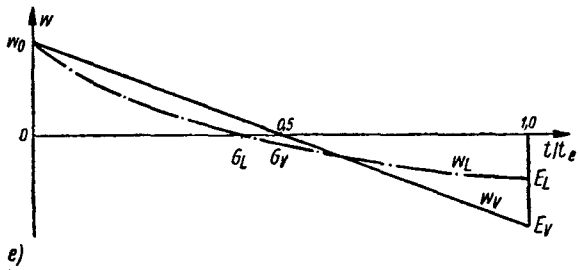
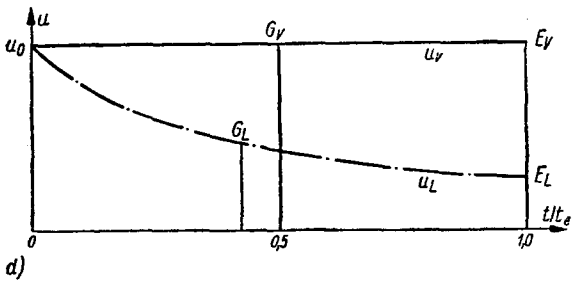


Bild 2.5 (Fortsetzung)

d - Horizontalkomponente  $u$  der Bahngeschwindigkeit  $v$ ;

e - Vertikalkomponente  $w$  der Bahngeschwindigkeit  $v$ ;

f - Neigung  $p := \tan \vartheta$  der Bahntangente

Die Bewegungsgleichungen im  $x$ -System lauten somit:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad y(x_0) = 0; \quad (2.17)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{u}, \quad t(x_0) = 0; \quad (2.18)$$

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad u(x_0) = u_0 = v_0 \cos \vartheta_0; \quad (2.19)$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g_0}{u^2}, \quad p(x_0) = p_0 = \tan \vartheta_0. \quad (2.20)$$

Aus (2.19) folgt  $u = u_0 = \text{const}$ , das Differentialgleichungssystem (2.17) bis (2.20) ist damit elementar integrierbar. Diese Integration braucht jedoch nicht explizit ausgeführt zu werden, da die Beziehung zwischen den Bahnelementen  $t$  und  $x$  auf Grund von (2.9) bekannt ist:

$$x = u_0 t.$$

Schließt man den Schuß senkrecht nach oben ( $\vartheta_0 = +\pi/2$ ) und senkrecht nach unten ( $\vartheta_0 = -\pi/2$ ) ausdrücklich aus, so sind die Zuordnungen  $t \rightarrow x$  und  $x \rightarrow t$  eindeutig. Man erhält die Darstellung der Bahnelemente als Funktion von  $x$  deshalb auch unmittelbar dadurch, daß man in den Formeln des  $t$ -Systems für die Bahnelemente  $t = x/u_0$  einsetzt. Das Ergebnis dieser Umformung lautet:

$$t = \psi_t(x; x_0 | v_0, \vartheta_0) \equiv x/u_0, \quad u_0 = v_0 \cos \vartheta_0, \quad (2.21)$$

$$y = \psi_y(x; x_0 | v_0, \vartheta_0) \equiv x \tan \vartheta_0 - \frac{1}{2} g_0 x^2 / u_0^2, \quad (2.22)$$

$$v = \psi_v(x; x_0 | v_0, \vartheta_0) \equiv v_0 \cos \vartheta_0 \sqrt{1 + (\tan \vartheta_0 - g_0 x / u_0^2)^2}, \quad (2.23)$$

$$\vartheta = \psi_\vartheta(x; x_0 | v_0, \vartheta_0) \equiv \arctan(\tan \vartheta_0 - g_0 x / u_0^2). \quad (2.24)$$

Da die Bahnelemente  $t$  und  $x$  zueinander direkt proportional sind, hat die Flugbahnkurve  $y = \psi_y(x)$  qualitativ den gleichen Verlauf wie  $y = \psi_y(t)$  (Bild 2.4b).

Bei komplizierteren Bahnmodellen existieren im allgemeinen keine geschlossenen Formeln für die Bahnelemente, so daß man gezwungen ist, die Integration der Bewegungsgleichungen wie auch den Wechsel



der unabhängigen Variablen  $t \rightarrow x$  mit Hilfe numerischer Verfahren vorzunehmen.

Welche der beiden Darstellungen der Flugbahnelemente ( $t$ -System oder  $x$ -System) zweckmäßiger ist, hängt von der jeweils zu bearbeitenden Aufgabenstellung ab. Hat man z. B. eine Tabelle der Flugbahnelemente mit dem Tafeleingang  $x$  zu berechnen, so wird man dem Formelsatz (2.21) bis (2.24) den Vorzug geben; werden die Flugbahnelemente hingegen als Funktion der Flugzeit  $t$  benötigt (wie beim Schießen auf sich bewegende Ziele), dann ist der Formelsatz des  $t$ -Systems vorteilhafter.

### 2.2.3. Der Energiesatz für die Geschosßbewegung im Vakuum

Um den *Energiesatz für die Geschosßbewegung im Vakuum* herzuleiten, quadriert man die erste der Gleichungen (2.15):

$$\begin{aligned} v^2 &= (v_0 \cos \vartheta_0)^2 + (v_0 \sin \vartheta_0 - g_0 t)^2 \\ &= v_0^2 (\cos^2 \vartheta_0 + \sin^2 \vartheta_0) - 2 g_0 (v_0 \sin \vartheta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g_0 t^2). \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der ersten Klammer hat den Wert eins; der Term in der zweiten Klammer ist nach (2.10) gleich der Flugbahnordinate  $y$ . Die vorstehende Gleichung vereinfacht sich damit zu

$$v^2 = v_0^2 - 2 g_0 y. \quad (2.25)$$

Nach Multiplikation mit der Masse  $m$  des Geschosses und einer geringfügigen Umformung folgt hieraus der *Energiesatz*

$$\frac{m}{2} v^2 + m g_0 y = \frac{m}{2} v_0^2, \quad (2.26)$$

$$\Psi_{\text{kin}} + \Psi_{\text{pot}} = \Psi_0 = \text{const.}$$

Bei der Bewegung eines Geschosses im Vakuum ist die Summe aus kinetischer Energie  $\Psi_{\text{kin}}$  und potentieller Energie  $\Psi_{\text{pot}}$  längs der Flugbahn konstant und gleich der Mündungsenergie  $\Psi_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$ .<sup>1)</sup>

Die Beziehung (2.25), die man auch in der Form

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2 g_0 y} \quad (2.27)$$

schreiben kann, verdient selbständiges Interesse.

<sup>1)</sup> Ein Bewegungsvorgang mit dieser energetischen Eigenschaft heißt in der Physik *konservativ*.

Bei konstanter Anfangsgeschwindigkeit ( $v_0 = \text{const}$ ) ist die Bahngeschwindigkeit  $v$  durch die Höhe  $y$  über dem Mündungshorizont eindeutig bestimmt: Aus  $y_1 = y_2$  folgt  $v_1 = v_2$ . Somit gilt für die Bahngeschwindigkeit  $v_e$  im Auftreffpunkt (Bedingung:  $y_e = y_0 = 0$ ):

$$v_e = v_0.$$

*Die Auftreffgeschwindigkeit ist im Vakuum gleich der Anfangsgeschwindigkeit.*

Ein senkrecht nach oben geschossener Körper erreicht seine maximale Steighöhe  $y_{\max}$  im Umkehrpunkt der Bewegungsrichtung, der durch die Bedingung  $v = 0$  charakterisiert ist. Mit  $v = 0$  folgt aus (2.25):

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g_0}. \quad (2.28)$$

### 2.3. Die Bahnelemente im Flugbahngipfel

Als *Flugbahngipfel* (kurz: *Gipfel*)  $G$  bezeichnet man denjenigen Punkt im Innern des Vorhersageintervalls  $[t_0, t_e]$ , in dem die Flugbahnkurve

$$y = \psi_y(x; x_0|v_0, \vartheta_0) \quad (2.29)$$

als Funktion von  $x$  ein relatives Maximum annimmt.<sup>1)</sup>

Wie aus der Differentialrechnung bekannt ist, lautet eine *notwendige Bedingung für das Maximum* der Funktion (2.29) (bei konstant gehaltenen Parametern  $v_0$  und  $\vartheta_0$ ):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_g} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \psi_y(x; x_0|v_0, \vartheta_0)\right]_{x=x_g} = 0. \quad (2.30)$$

Da längs der Flugbahn  $dy/dx = p$  gilt, kann man (2.30) ersetzen durch

$$p_g = \psi_p(x_g; x_0|v_0, \vartheta_0) = 0. \quad (2.31)$$

Durch Auflösen von (2.31) nach  $x_g$  erhält man die Gipfelabszisse  $x = x_g$ ; die übrigen Gipfelemente folgen mit  $x = x_g$  aus (2.21) bis (2.24).

<sup>1)</sup> Zu den Begriffen *relatives Maximum* und *absolutes Maximum* einer Funktion siehe etwa *Fichtenholz, G.M.: Differential- und Integralrechnung, 2., berichtigte Aufl., Berlin 1966, Bd.1, S.268.*

Der Nachweis, daß der für  $x = x_g$  erreichte Extremwert ein Maximum ist, läßt sich leicht erbringen. Man hat lediglich zu zeigen:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_g} < 0.$$

Unter Verwendung von (2.20) erhält man

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_g} = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]_{x=x_g} = \left(\frac{dp}{dx}\right)_{x=x_g} = -\frac{g_0}{u_g^2} < 0.$$

In Bild 2.6 sind vier typische Vorhersageintervalle  $[t_0, t_e]$  skizziert.

Bild 2.6a zeigt die Gestalt des Vorhersageintervalls bei Geschosßflugbahnen der Klasse *Boden - Boden*.

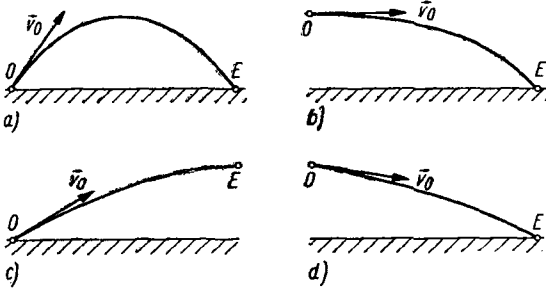


Bild 2.6

Typische Vorhersageintervalle

a - Geschosßflugbahn der Klasse *Boden - Boden*; b - Bombenwurf aus dem Horizontalflug; c - Geschosßflugbahn der Klasse *Boden - Luft*; d - Geschosßflugbahn der Klasse *Luft - Boden*

Vorhersageintervalle der in Bild 2.6b eingezeichneten Art treten beim Bombenwurf aus dem Horizontalflug auf. Die Anwendung der Bedingungsgleichung (2.31) liefert hier den Abgangspunkt  $O$ , der zugleich höchster Flugbahnpunkt über dem Mündungshorizont ist.

Bei Bahnen der Klassen *Boden - Luft* und *Luft - Boden* ist im Vorhersageintervall im allgemeinen kein Punkt enthalten, dessen Abszisse  $x$  der Gleichung (2.31) genügt (Bild 2.6c und d).

Die Vorhersageintervalle, die beim Schießen gegen ein vertikales Bodenziel mit rasanten Flugbahnen auftreten, sind vom Typ Bild 2.6c.

Unter Beachtung von (2.24) und (2.31) erhält man als Bedingungsgleichung für die Gipfelabszisse  $x = x_g$  der parabolischen Flugbahn

$$p_g = \tan \vartheta_0 - \frac{g_0 x_g}{(v_0 \cos \vartheta_0)^2} = 0,$$

$$x_g = \frac{1}{g_0} \tan \vartheta_0 \cdot (v_0 \cos \vartheta_0)^2 = \frac{v_0^2}{g_0} \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0. \quad (2.32)$$

Wegen  $\sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta_0$  kann man hierfür auch schreiben

$$x_g = \frac{v_0^2}{2g_0} \sin 2\vartheta_0. \quad (2.33)$$

Setzt man (2.32) in (2.21) ein, so folgt für die Flugzeit  $t_g$  vom Abgangspunkt bis zum Gipfel

$$t_g = \frac{v_0^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0}{g_0 v_0 \cos \vartheta_0},$$

$$t_g = \frac{v_0}{g_0} \sin \vartheta_0. \quad (2.34)$$

Entsprechend erhält man aus (2.22) und (2.32) für die Gipfelordinate

$$y_g = x_g \left( \tan \vartheta_0 - \frac{g_0 x_g}{2 v_0^2} \right) = \frac{v_0^2}{g_0} \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \left( \tan \vartheta_0 - \frac{1}{2} \tan \vartheta_0 \right),$$

$$y_g = \frac{v_0^2}{2g_0} \sin^2 \vartheta_0. \quad (2.35)$$

Durch Elimination von  $v_0 \sin \vartheta_0$  aus (2.34) und (2.35) findet man die im folgenden wiederholt benutzte Formel

$$y_g = \frac{1}{2} g_0 t_g^2. \quad (2.36)$$

Die Gipfelhöhe  $y_g$  hat die gleiche Größe wie die Strecke, die das Geschöß in der Zeit  $t_g$  im freien Fall zurücklegt.

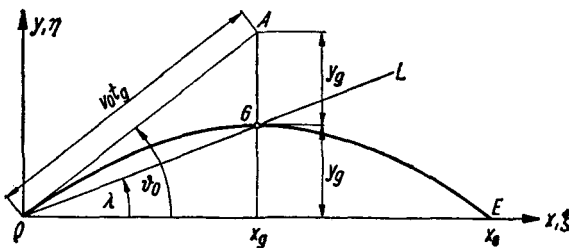


Bild 2.7  
Zur Lage des Gipfels  
der Flugbahnparabel

Die Gipfelpunkte aller Parabeln mit konstantem Abgangswinkel, aber verschiedener Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  liegen auf der Geraden  $L$  mit der Gleichung

$$\frac{\eta}{\xi} = \tan \lambda, \quad \eta = \xi \tan \lambda.$$

Die Symbole  $\eta$  und  $\xi$  bezeichnen hier die Koordinaten der Geraden, die durch den Abgangs- und Gipfelpunkt verläuft.

Für  $\tan \lambda$  erhält man aus (2.32) und (2.35):

$$\tan \lambda = \frac{y_g}{x_g} = \frac{1}{2} \tan \vartheta_0.$$

Im Flugbahngipfel weist der Vektor der Bahngeschwindigkeit parallel zur  $x$ -Achse; der Betrag  $v_g$  von  $v_g$  ist somit gleich  $u_0$ :

$$v_g = |v_g| = u_g = u_0 = v_0 \cos \vartheta_0.$$

Den Punkt, der hier *Gipfel* genannt worden ist, nennt man in der Literatur häufig *Scheitel*. Diese Bezeichnung ist jedoch nur im Vakuum gerechtfertigt. Unter *Scheitel einer Bahnkurve* versteht man in der Mathematik den Punkt größter Bahnkrümmung. Dieser Punkt ist zwar bei parabolischen Bahnen mit dem Gipfelpunkt identisch, nicht jedoch bei Bahnen im luftgefüllten Raum: Hier liegt der Scheitelpunkt auf dem absteigenden Ast der Flugbahn zwischen Gipfel- und Auftreffpunkt.

In der Ballistik des Bombenwurfs wird der Begriff *Gipfelhöhe* nicht nur für den vertikalen Abstand des Gipfelpunkts (Bedingungsgleichung:  $p = 0$ ) von dem Mündungshorizont verwendet, sondern auch für die maximale (geometrische) Höhe der Flugbahn über dem Erdboden.

.

## 2.4. Die Bahnelemente im Auftreffpunkt in der Mündungsebene

Der Auftreffpunkt in der Mündungsebene liegt in der gleichen Höhe wie der Abgangspunkt (siehe Bild 2.1, Seite 16).

Die Bedingungsgleichung für den Auftreffpunkt lautet somit

$$y_e = \varphi_y(t_e; t_0 | v_0, \vartheta_0) = y_0 \quad (2.37)$$

bzw. bei Verwendung des  $x$ -Systems

$$y_e = \psi_y(x_e; x_0 | v_0, \vartheta_0) = y_0. \quad (2.38)$$

Durch Auflösen von (2.37) nach  $t_e$  bzw. (2.38) nach  $x_e$  erhält man die Flugzeit bis zum Auftreffpunkt bzw. die Horizontalschußweite.

Mit  $\varphi_y$  aus (2.10) folgt gemäß (2.37) für die *Flugzeit*  $t_e$  vom Abgangs- bis zum Auftreffpunkt ( $y_0 = y_e = 0$ ):

$$v_0 \sin \vartheta_0 \cdot t_e - \frac{1}{2} g_0 t_e^2 = 0; \quad (2.39)$$

$$t_e = \frac{2 v_0}{g_0} \sin \vartheta_0. \quad (2.40)$$

Der trivialen Lösung  $t_e = 0$ , die (2.39) ebenfalls erfüllt, entspricht der Abgangspunkt.

Für die *Horizontalschußweite*  $x_e$  erhält man aus (2.9) und (2.40):

$$\begin{aligned} x_e &= u_0 t_e = v_0 \cos \vartheta_0 \cdot \frac{2 v_0}{g_0} \sin \vartheta_0, \\ x_e &= \frac{v_0^2}{g_0} \sin 2\vartheta_0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Für die *Auftreffgeschwindigkeit*  $v_e$  war bereits aus (2.27) gefolgert worden:  $v_e = v_0$ .

Um den *Neigungswinkel der Bahrtangente im Auftreffpunkt*  $\vartheta_e$  zu ermitteln, setzt man (2.40) in (2.16) ein:

$$\begin{aligned} \vartheta_e &= \arctan \left( \tan \vartheta_0 - \frac{g_0}{v_0 \cos \vartheta_0} \cdot \frac{2 v_0}{g_0} \sin \vartheta_0 \right) \\ &= \arctan (-\tan \vartheta_0) = \arctan [\tan (-\vartheta_0)] = -\vartheta_0. \end{aligned}$$

Der Auftreffwinkel  $\vartheta_e$  ist betragsmäßig gleich dem Abgangswinkel:  $\omega_e = |\vartheta_e| = \vartheta_0$  (Bild 2.8).

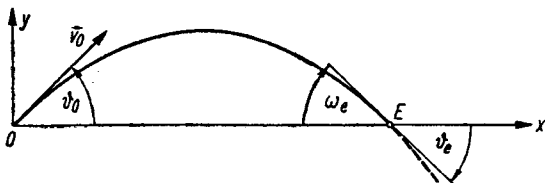


Bild 2.8  
Zur Definition der Auftreffwinkel  $\vartheta_e$  und  $\omega_e$

Die in den Abschnitten 2.3. und 2.4. abgeleiteten Formeln für die Bahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt sind in Tabelle 2.1 zusammengestellt.

Durch Vergleich der angegebenen Formeln findet man

$$x_g = \frac{1}{2} x_e, \quad t_g = \frac{1}{2} t_e. \quad (2.42)$$

Die Gipfelabszisse  $x_g$  halbiert die Horizontalschußweite  $x_e$ ; die Flugzeit  $t_g$  vom Abgangspunkt 0 bis zum Gipfel G ist betragsmäßig gleich der Flugzeit vom Gipfel G bis zum Auftreffpunkt E in der Mündungsebene.

Tabelle 2.1 *Bahnelemente von Abgangs-, Gipfel- und Auftreffpunkt nach der parabolischen Theorie*

Bahnelement	Abgangspunkt	Gipfelpunkt	Auftreffpunkt
$t$	0	$\frac{v_0}{g_0} \sin \vartheta_0$	$\frac{2 v_0}{g_0} \sin \vartheta_0$
$x$	0	$\frac{v_0^2}{2 g_0} \sin 2\vartheta_0$	$\frac{v_0^2}{g_0} \sin 2\vartheta_0$
$y$	0	$\frac{v_0^2}{2 g_0} \sin^2 \vartheta_0$	0
$v$	$v_0$	$v_0 \cos \vartheta_0$	$v_0$
$\vartheta$	$\vartheta_0$	0	$-\vartheta_0$

Ersetzt man in (2.36)  $t_g$  gemäß (2.42) durch  $\frac{1}{2} t_e$ , so erhält man eine Beziehung, die unter dem Namen *Hauptsche Formel* bekannt geworden ist:

$$y_g = \frac{g_0}{8} t_e^2. \quad (2.43)$$

Die *Hauptsche Formel* gilt auch im luftgefüllten Raum in guter Näherung.

## 2.5. Die maximale Schußweite in der Mündungsebene

Wie man (2.41) entnimmt, ist die Schußweite in der Mündungsebene eine Funktion der beiden Flugbahnparameter  $v_0$  und  $\vartheta_0$ . Man kann deshalb symbolisch schreiben

$$x_e = f(v_0, \vartheta_0).$$

Es erhebt sich die Frage: Wie muß der Abgangswinkel  $\vartheta_0$  gewählt werden, damit (bei vorgegebener Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ ) die Schußweite möglichst groß wird?

Diese Frage läßt sich an Hand von (2.41) sehr leicht beantworten:

Die Horizontalschußweite  $x_e$  wird am größten, wenn  $\sin 2\vartheta_0 = 1$  ist. Das ist der Fall für

$$2\vartheta_0 = \pi/2 + n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Bei Beschränkung auf Abgangswinkel, die im 1. Quadranten liegen, gilt für den optimalen Abgangswinkel  $\vartheta_0^*$ :

$$\vartheta_0^* = \pi/4. \quad (2.44)$$

Die Herleitung von (2.44) kann auch mathematisch formal erfolgen.

In einem Maximum der Funktion  $x_e = f(v_0, \vartheta_0)$  muß (für  $v_0 = \text{const}$ ) die Bedingung erfüllt sein

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta_0} f(v_0, \vartheta_0) \right]_{\vartheta_0 = \vartheta_0^*} = 0. \quad (2.45)$$

Löst man diese Gleichung nach  $\vartheta_0^*$  auf, so erhält man die Beziehung für den optimalen Abgangswinkel.

Die Beziehung (2.45) ist eine *notwendige*, jedoch keine *hinreichende* Bedingung für die Existenz eines Maximums.

Ein Maximum liegt mit Sicherheit dann vor, wenn zusätzlich zu (2.45) gilt:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_0^2} f(v_0, \vartheta_0) \right]_{\vartheta_0 = \vartheta_0^*} < 0. \quad (2.46)$$

Differentiation von  $f(v_0, \vartheta_0) \equiv (v_0^2/g_0) \sin 2\vartheta_0$  ergibt

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_0} f(v_0, \vartheta_0) = \frac{2v_0^2}{g_0} \cos 2\vartheta_0, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_0^2} f(v_0, \vartheta_0) = -\frac{4v_0^2}{g_0} \sin 2\vartheta_0. \quad (2.48)$$

Die Bedingungsgleichung für den optimalen Abgangswinkel lautet somit:  $\cos 2\vartheta_0^* = 0$ . Hieraus folgt:  $2\vartheta_0^* = \pi/2 + n\pi \quad (n = 0, 1, \dots)$ ,

$$\vartheta_0^* = \frac{\pi}{4} + n \frac{\pi}{2},$$

und bei Beschränkung auf den ersten Quadranten ( $0 \leq \vartheta_0^* \leq \pi/2$ ):

$$\vartheta_0^* = \pi/4 \cong 45^\circ. \quad (2.49)$$

Mit  $\vartheta_0^*$  aus (2.49) erhält man für die 2. Ableitung von  $x_e$  nach  $\vartheta_0$ :

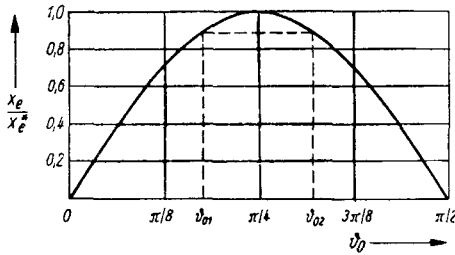
$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta_0^2} \right)_{\vartheta_0 = \vartheta_0^*} = -\frac{4v_0^2}{g_0} < 0;$$

die Bedingung (2.46) ist also erfüllt.



Die *maximale Schußweite*  $x_e^*$  ergibt sich durch Einsetzen von (2.44) in (2.41) zu

$$x_e^* = \frac{v_0^2}{g_0} \sin 2\vartheta_0^* = \frac{v_0^2}{g_0}. \quad (2.50)$$



**Bild 2.9**  
Relative Schußweite  $x_e/x_e^*$  als Funktion des Abgangswinkels  $\vartheta_0$

Die zugehörige Flugzeit  $t_e^*$  hat den Wert

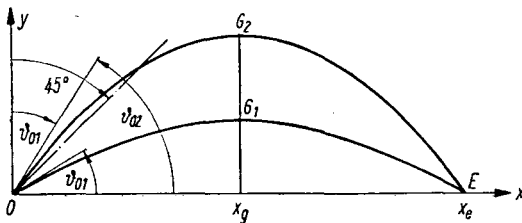
$$t_e^* = \frac{2v_0}{g_0} \sin \vartheta_0^* = \sqrt{2} \frac{v_0}{g_0}. \quad (2.51)$$

Man beachte, daß  $t_e^*$  nicht die maximale Flugzeit des Geschosses ist, sondern die Flugzeit für die maximale Schußweite!

Die Flugzeit erreicht ihren größten Wert, wenn das Geschöß senkrecht nach oben geschossen wird ( $\vartheta_0 = \pi/2$ ):

$$(t_e)_{\max} = \frac{2v_0}{g_0} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{2v_0}{g_0}.$$

Trägt man  $x_e/x_e^* = \sin 2\vartheta_0$  als Funktion von  $\vartheta_0$  ( $0 \leq \vartheta_0 \leq \pi/2$ ) auf, so erkennt man, daß jede Schußweite  $x_e < x_e^*$  unter zwei Abgangswinkeln  $\vartheta_{01}, \vartheta_{02}$  erreicht werden kann: Der eine dieser Abgangswinkel ist größer, der andere *kleiner* als der optimale Abgangswinkel (Bild 2.9).



**Bild 2.10**  
Zur Definition der unteren und oberen Winkelgruppe

Man sagt, die Winkel  $\vartheta_{01}$  und  $\vartheta_{02}$  gehören der *unteren* bzw. *oberen Winkelgruppe* an.

Auf Grund der Symmetrie der Sinuskurve gilt (siehe Bild 2.9):

$$\vartheta_{01} + \vartheta_{02} = \pi/2, \quad \vartheta_{02} = \pi/2 - \vartheta_{01}, \quad (2.52)$$

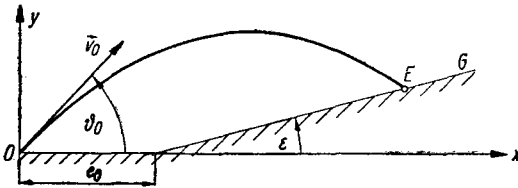
$$\pi/4 - \vartheta_{01} = \vartheta_{02} - \pi/4. \quad (2.53)$$

## 2.6. Der Schuß im geneigten Gelände

### 2.6.1. Aufgabenstellung

Bei der Ableitung der Formeln für die Bahnelemente war stillschweigend angenommen worden, daß sich der Auftreffpunkt  $E$  (das Ziel) in der durch den Abgangspunkt verlaufenden Horizontalebene, der sogenannten Mündungsebene, befindet. Diese Voraussetzung soll nunmehr fallengelassen werden.

In Verallgemeinerung der früheren Ableitungen wird angenommen, daß das Gelände in Schußrichtung gleichförmig ansteigt oder abfällt (*Schuß im geneigten Gelände*). Das Geländeprofil in der Umgebung des Auftreffpunktes möge hierbei hinreichend genau durch eine Ebene  $G$  approximiert werden können, die senkrecht auf der Abgangsebene steht (Bild 2.11).



**Bild 2.11**  
Der Schuß im geneigten Gelände

Um die Rechnungen nicht unnötig zu komplizieren, sollen die Ableitungen auf den Sonderfall beschränkt werden, daß die Geländeebene  $G$  durch den Abgangspunkt  $O$  verläuft, also sowohl Abgangspunkt wie Auftreffpunkt in der Ebene  $G$  liegen (Bild 2.12).

Der Winkel zwischen der Mündungsebene und der Richtung zum Ziel heiße *Geländewinkel* (Symbol:  $\varepsilon$ ).

Der Vektor der Anfangsgeschwindigkeit bildet mit der Richtung zum Ziel den *Aufsatzwinkel* (Symbol:  $\alpha$ ).

Zwischen dem Abgangswinkel  $\vartheta_0$ , dem Geländewinkel  $\varepsilon$  und dem Auf-  
satzwinkel  $\alpha$  besteht somit die Beziehung

$$\vartheta_0 = \alpha + \varepsilon. \quad (2.54)$$

Für den Geländewinkel  $\varepsilon = 0$  erhält man  $\vartheta_0 = \alpha$ . Um Mißverständ-  
nissen vorzubeugen, wird  $\alpha$  in diesem Fall mit dem Index „0“ gekenn-  
zeichnet ( $\varepsilon = 0: \alpha = \alpha_0$ ).

Der Betrag des Winkels zwischen der Flugbahntangente im Auftreff-  
punkt und der Geländeebene  $G$  wird *Auftreffwinkel im Gelände* genannt  
und mit  $\omega_E$  bezeichnet.

Das Symbol  $D$  bedeutet die *Schrägschußweite*  $\overline{OE}$  (Bild 2.12);  $(x_E, y_E)$   
sind die Koordinaten des Auftreffpunkts im  $x, y$ -System.

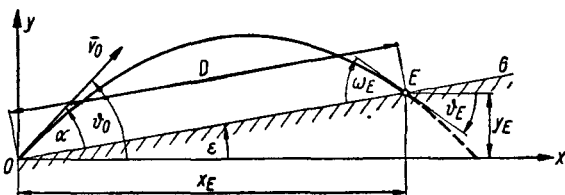


Bild 2.12  
Die Flugbahnelemente  
beim Schuß auf einer  
geneigten Ebene  $G$

Ziel der folgenden Ausführungen ist es, die Schrägschußweite  $D$  sowie  
die Bahnelemente im Auftreffpunkt  $E$  durch  $v_0, \alpha$  und  $\varepsilon$  darzustellen,  
die Bedingung für das Erreichen einer maximalen Schrägschußweite  
herzuleiten und praktische Anwendungen der abgeleiteten Formeln zu  
erschließen.

### 2.6.2. Die Bahnelemente im Auftreffpunkt

Die kartesischen Koordinaten  $x_E, y_E$  des Auftreffpunkts  $E$  ergeben  
sich mathematisch als Koordinaten des Schnittpunkts der Flugbahn-  
parabel mit der Geraden  $G$  (Bild 2.12).

Die Gerade  $G$  (Ebene) hat die Gleichung

$$y = x \tan \varepsilon. \quad (2.55)$$

Die Flugbahn des Geschosses wird im  $x, y$ -System durch

$$y = x \tan \vartheta_0 - \frac{g_0 x^2}{2u_0^2} \quad (2.22)$$

beschrieben.

Im Schnittpunkt  $E = (x_E, y_E)$  der Kurven (2.55) und (2.22) muß somit gelten

$$y_E = x_E \tan \varepsilon = x_E \tan \vartheta_0 - \frac{g_0 x_E^2}{2u_0^2}. \quad (2.56)$$

Die triviale Lösung  $x_E = 0, y_E = 0$  liefert den Abgangspunkt  $O$ . Da diese Lösung hier nicht von Interesse ist, kann  $x_E > 0$  vorausgesetzt und (2.56) durch  $x_E$  dividiert werden. Man erhält

$$\tan \varepsilon = \tan \vartheta_0 - \frac{g_0 x_E}{2u_0^2}$$

bzw. nach  $x_E$  aufgelöst

$$x_E = \frac{2u_0^2}{g_0} (\tan \vartheta_0 - \tan \varepsilon). \quad (2.57)$$

Diese Gleichung läßt sich noch auf eine etwas andere Form bringen, wenn man  $\vartheta_0$  und  $u_0$  gemäß

$$\vartheta_0 = \alpha + \varepsilon, \quad u_0 = v_0 \cos \vartheta_0 = v_0 \cos (\alpha + \varepsilon) \quad (2.58)$$

ersetzt und das Additionstheorem für den Sinus anwendet:

$$\begin{aligned} x_E &= \frac{2v_0^2}{g_0} \cos^2 (\alpha + \varepsilon) [\tan (\alpha + \varepsilon) - \tan \varepsilon] \\ &= \frac{2v_0^2 \cos (\alpha + \varepsilon)}{g_0 \cos \varepsilon} [\sin (\alpha + \varepsilon) \cos \varepsilon - \sin \varepsilon \cos (\alpha + \varepsilon)] \\ &= \frac{2v_0^2 \cos (\alpha + \varepsilon)}{g_0 \cos \varepsilon} \sin [(\alpha + \varepsilon) - \varepsilon], \\ x_E &= \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos (\alpha + \varepsilon)}{g_0 \cos \varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Zwischen den Koordinaten  $x_E, y_E$  des Auftreffpunkts  $E$ , dem Geländewinkel  $\varepsilon$  und der Schrägschußweite  $D$  bestehen die Beziehungen

$$x_E = D \cos \varepsilon, \quad y_E = D \sin \varepsilon, \quad (2.60)$$

wie man aus Bild 2.12 abliest.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Die Variablen  $D, \varepsilon$  sind die ebenen Polarkoordinaten des Punktes  $E$ .

Durch Gleichsetzen von (2.59) mit der ersten der Gleichungen (2.60) erhält man für die *Schrägschußweite*  $D$  die Formel

$$D = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos(\alpha + \varepsilon)}{g_0 \cos^2 \varepsilon}, \quad (2.61)$$

die für  $\varepsilon = 0$  in die früher abgeleitete Formel (2.41) für die Horizontal-schußweite  $x_e$  übergeht.

Um die *Flugzeit*  $t = t_e$  vom Abgangs- bis zum Auftreffpunkt zu berechnen, benutzt man die Beziehung  $x = u_0 t$  (2.9), die im Auftreffpunkt  $E$  die spezielle Form  $x_E = u_0 t_E$  annimmt. Einsetzen von (2.58) und (2.60) in  $t_E = x_E/u_0$  liefert

$$t_E = \frac{x_E}{u_0} = \frac{D \cos \varepsilon}{v_0 \cos(\alpha + \varepsilon)}$$

bzw. mit  $D$  aus (2.61):

$$t_E = \frac{2v_0}{g_0} \frac{\sin \alpha}{\cos \varepsilon}. \quad (2.62)$$

Zur Berechnung der *Auftreffgeschwindigkeit*  $v_E$  geht man zweckmäßigerweise von der aus dem Energiesatz abgeleiteten Formel (2.27) aus, in die man  $y = y_E$  aus (2.60) einsetzt. Man erhält

$$v_E = v_0 \sqrt{1 - (2g_0/v_0^2) D \sin \varepsilon}. \quad (2.63)$$

Der *Neigungswinkel*  $\vartheta_E$  der Flugbahntangente ergibt sich aus (2.24):

$$\tan \vartheta_E = \tan \vartheta_0 - \frac{g_0 x_E}{u_0^2}$$

bzw. mit  $x_E = D \cos \varepsilon$  und  $\vartheta_0 = \alpha + \varepsilon$ :

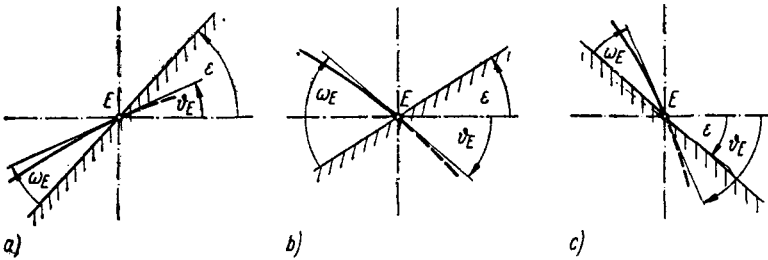
$$\begin{aligned} \tan \vartheta_E &= \tan(\alpha + \varepsilon) - \frac{gD \cos \varepsilon}{v_0^2 \cos^2(\alpha + \varepsilon)} \\ &= \tan(\alpha + \varepsilon) - \frac{2 \sin \alpha}{\cos \varepsilon \cos(\alpha + \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann mit Hilfe der bekannten trigonometrischen Beziehung

$$\sin \varphi \cos \psi = \frac{1}{2} [\sin(\varphi - \psi) + \sin(\varphi + \psi)] \quad (2.64)$$

wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\tan \vartheta_E &= \frac{\sin(\alpha + \varepsilon) \cos \varepsilon - 2 \sin \alpha}{\cos \varepsilon \cos(\alpha + \varepsilon)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} [\sin(\alpha + 2\varepsilon) + \sin \alpha] - 2 \sin \alpha}{\cos \varepsilon \cos(\alpha + \varepsilon)}, \\ \tan \vartheta_E &= \frac{\sin(\alpha + 2\varepsilon) - 3 \sin \alpha}{2 \cos(\alpha + \varepsilon) \cos \varepsilon}.\end{aligned}\quad (2.65)$$



**Bild 2.13** Der Auftreffwinkel  $\omega_E$  im Gelände

- a – Auftreffpunkt  $E$  auf dem aufsteigenden Flugbahnast;  
Geländewinkel  $\varepsilon > 0$ ;
- b – Auftreffpunkt  $E$  auf dem absteigenden Flugbahnast;  
Geländewinkel  $\varepsilon > 0$ ;
- c – Auftreffpunkt  $E$  auf dem absteigenden Flugbahnast;  
Geländewinkel  $\varepsilon < 0$

Für den (stets positiv gewählten) Auftreffwinkel  $\omega_E$  im Gelände liest man in Bild 2.13 ab:

$$\omega_E = \varepsilon - \vartheta_E.$$

Die Beziehung, die  $\omega_E$  durch  $\alpha$  und  $\varepsilon$  ausdrückt, erhält eine sehr einfache Form, wenn man zum Kotangens des Winkels  $\omega_E$  übergeht.

Unter Verwendung des Additionstheorems für den Kotangens ergibt sich

$$\cot \omega_E = \cot(\varepsilon - \vartheta_E) = \frac{\cot \varepsilon \cot \vartheta_E + 1}{\cot \vartheta_E - \cot \varepsilon} = \frac{1 + \tan \varepsilon \tan \vartheta_E}{\tan \varepsilon - \tan \vartheta_E}.$$

Einsetzen des für  $\tan \vartheta_E$  abgeleiteten Ausdrucks liefert nach einiger Zwischenrechnung, die hier weggelassen ist, die Formel

$$\cot \omega_E = \cot \alpha - 2 \tan \varepsilon. \quad (2.66)$$

(Siehe Übungsaufgabe 2.7.)

Damit sind alle Bahnelemente im Auftreffpunkt  $E$  bekannt.

Die abgeleiteten Formeln für die Bahnelemente im Auftreffpunkt  $E$  lassen sich auch dadurch gewinnen, daß man ein  $x', y'$ -System einführt, das gegenüber dem  $x, y$ -System um den Winkel  $\varepsilon$  gedreht ist (siehe Abschnitt 2.9.2.3.).

### 2.6.3. Die maximale Schrägschußweite

Die Berechnung der maximalen Schrägschußweite  $D^*$  sowie der Bahnelemente, die dieser Schußweite entsprechen, erfolgt mathematisch in der gleichen Weise wie bei der Ermittlung der maximalen Horizontalschußweite (Abschnitt 2.5.).

Eine notwendige Bedingung für das Erreichen eines Maximums der Schrägschußweite  $D = F(\alpha; v_0, \varepsilon)$  lautet

$$\left[ \frac{\partial F(\alpha; v_0, \varepsilon)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=\alpha^*} = 0, \quad (2.67)$$

wenn  $v_0$  und  $\varepsilon$  als konstante Parameter angesehen werden und  $\alpha^*$  den optimalen Aufsatzwinkel bezeichnet. Mit

$$D = F(\alpha; v_0, \varepsilon) \equiv \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos(\alpha + \varepsilon)}{g_0 \cos^2 \varepsilon} \quad (2.61)$$

lautet die Gleichung für den optimalen Abgangswinkel  $\alpha^*$  (2.67) explizit

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha^*} = \frac{2v_0^2}{g_0 \cos^2 \varepsilon} [\cos \alpha^* \cos(\alpha^* + \varepsilon) - \sin \alpha^* \sin(\alpha^* + \varepsilon)] = 0.$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern kann mit Hilfe des Additionstheorems für den Kosinus zusammengefaßt werden zu

$$\cos(2\alpha^* + \varepsilon) = 0.$$

Bei Beschränkung auf den 1. Quadranten gilt:

$$2\alpha^* + \varepsilon = \frac{1}{2}\pi, \quad \alpha^* = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - \varepsilon). \quad (2.68)$$

Der optimale Winkel  $\alpha^*$  läßt sich sehr leicht konstruieren. Man erhält  $\alpha^*$ , wenn man den Winkel zwischen der Entfernung zum Ziel  $\overline{OE}$  und der positiven  $y$ -Achse halbiert (siehe Bild 2.14).

Für  $\varepsilon > 0$  (in Schußrichtung ansteigendes Gelände) ist  $\alpha^* < 45^\circ$ ; für  $\varepsilon < 0$  (in Schußrichtung abfallendes Gelände) ist  $\alpha^* > 45^\circ$ .

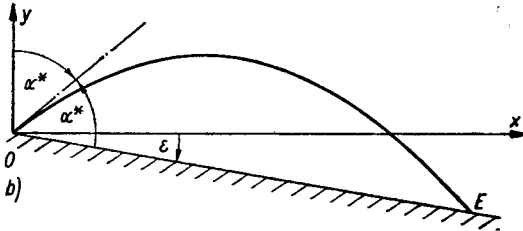
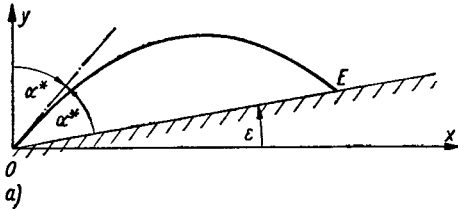


Bild 2.14  
Zur Konstruktion des  
optimalen Aufsatz-  
winkels  $\alpha^*$

Aufsatzwinkel  $\alpha$ , die größer als der optimale Aufsatzwinkel  $\alpha^*$  sind ( $\alpha > \alpha^*$ ), werden als *Aufsatzwinkel der oberen Winkelgruppe* bezeichnet; Aufsatzwinkel  $\alpha < \alpha^*$  sollen *Aufsatzwinkel der unteren Winkelgruppe* heißen. Diese Festlegung stellt eine naheliegende Verallgemeinerung der früher gegebenen Definition der Winkelgruppen dar. Man beachte jedoch, daß der Grenzwinkel zwischen unterer und oberer Winkelgruppe vom Geländewinkel abhängt.

Um die Formel für die maximale Schrägschußweite  $D = D^*$  zu erhalten, muß  $\alpha^*$  aus (2.68) in (2.61) eingesetzt werden:

$$D^* = \frac{2v_0^2 \sin(\pi/4 - \varepsilon/2) \cos(\pi/4 + \varepsilon/2)}{g_0 \cos^2 \varepsilon}.$$

Unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung (2.64) folgt hieraus

$$\begin{aligned} D^* &= \frac{v_0^2}{g_0} \cdot \frac{-\sin \varepsilon + \sin(\pi/2)}{\cos^2 \varepsilon} = \frac{v_0^2}{g_0} \cdot \frac{1 - \sin \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon} \\ &= \frac{v_0^2}{g_0} \cdot \frac{1 - \sin \varepsilon}{1 - \sin^2 \varepsilon} = \frac{v_0^2}{g_0} \cdot \frac{1 - \sin \varepsilon}{(1 - \sin \varepsilon)(1 + \sin \varepsilon)}. \end{aligned}$$



Die maximale Schrägschußweite genügt somit der Beziehung

$$D^* = \frac{v_0^2}{g_0} \cdot \frac{1}{1 + \sin \varepsilon}. \quad (2.69)$$

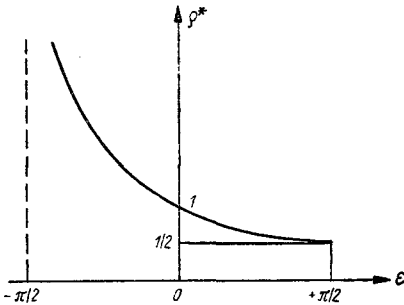
Für  $\varepsilon = 0$  geht  $D^*$  in die Maximalschußweite in der Mündungsebene  $x_e^*$  über:

$$D_0^* = x_e^* = v_0^2/g_0 \quad (\varepsilon = 0).$$

Man kann deshalb an Stelle von (2.69) auch schreiben

$$D^* = \frac{x_e^*}{1 + \sin \varepsilon}. \quad (2.70)$$

In Bild 2.15 ist  $\varrho^* := D^*/x_e^*$  als Funktion von  $\varepsilon$  aufgetragen.



**Bild 2.15**  
Relative maximale Schrägschußweite  
 $\varrho^* := D^*/x_e^*$  als Funktion des Geländewinkels  $\varepsilon$

Die maximale Steighöhe des Geschosses, die bei  $\varepsilon = \pi/2$  erreicht wird, ist halb so groß wie die Maximalschußweite in der Mündungsebene ( $\varepsilon = 0$ ):

$$\frac{1}{2} x_e^* \leq D^* \leq x_e^* \quad (\frac{1}{2}\pi \geq \varepsilon \geq 0).$$

Bei einem vorgegebenen Geländewinkel  $\varepsilon$  können nur diejenigen Ziele  $E$  erreicht werden, deren Schrägentfernung  $\overline{OE} = D$  vom Abgangspunkt  $O$  kleiner, höchstens gleich der maximalen Schrägschußweite  $D^*$  ist:  $D \leq D^*$ . Die Kurve, die in der  $x, y$ -Ebene von den Endpunkten  $E^*$  der maximalen Schrägschußweiten  $D^* = f(\varepsilon)$  beschrieben wird, grenzt somit den Einflußbereich einer im Punkt  $O$  stationierten Waffe ab. Bei Gültigkeit der parabolischen Theorie ist diese Grenzkurve eine Parabel, die sogenannte *Sicherheitsparabel* (siehe Bild 2.16).

Die Beziehung (2.70) stellt die Gleichung der Sicherheitsparabel in Polarkoordinaten  $D, \varepsilon$  dar. Man kann sie unschwer auf die von der Schule her gewohnte Form der Parabelgleichung bringen. Mit

$$D^* = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad D^* \sin \varepsilon = \eta,$$

( $\xi, \eta$ : laufende Koordinaten der Sicherheitsparabel) geht (2.70) über in

$$x_e^* = D^* (1 + \sin \varepsilon) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + \eta,$$

$$(x_e^* - \eta)^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

$$\xi^2 = x_e^* (x_e^* - 2\eta). \quad (2.71)$$

Führt man in (2.71) noch eine Parallelverschiebung der  $\xi$ -Achse gemäß  $\eta = \bar{\eta} + \frac{1}{2} x_e^*$  durch, so folgt

$$\xi^2 = -2x_e^* \bar{\eta}.$$

Das ist aber die Gleichung einer nach unten (zur negativen  $\eta$ -Achse zu) geöffneten Parabel, deren Scheitel im Ursprung des  $\xi, \bar{\eta}$ -Systems liegt.

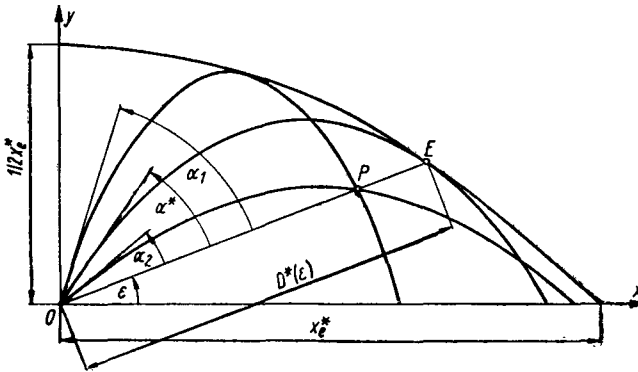


Bild 2.16 Die Sicherheitsparabel

Ziele, die im Innern der Sicherheitsparabel liegen, können jeweils durch zwei Bahnen mit unterschiedlichen Abgangswinkeln  $\alpha_1, \alpha_2$  erreicht werden. Zwischen diesen Winkeln besteht die Beziehung

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha^*$$

bzw. mit (2.68):

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \pi - \varepsilon - \alpha_1. \quad (2.72)$$

Durch Einsetzen von (2.72) in (2.61) prüft man leicht nach, daß sich für  $\alpha_2$  die gleiche Schußweite wie für  $\alpha_1$  ergibt:

$$D(\alpha_1; v_0, \varepsilon) = D(\alpha_2; v_0, \varepsilon).$$

Durch Rotation der Sicherheitsparabel um die  $y$ -Achse erhält man den räumlichen Wirkungsbereich der Waffe.

## \*2.7. Ballistik des Bombenwurfs

### 2.7.1. Aufgabenstellung

Der Bombenwurf ist ballistisch dadurch gekennzeichnet, daß der Abgangspunkt höher liegt als der Auftreffpunkt (Bild 2.17). Die Flugbahn beginnt somit nicht mehr im Ursprung des Koordinatensystems, sondern in einer endlichen Höhe  $y_0 > 0$  über dem Bezugsniveau  $y = 0$ .

Der Einfachheit halber soll angenommen werden, daß die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  der Bombe mit der Fluggeschwindigkeit des Bombenflugzeugs im Abwurfzeitpunkt ( $t_0 = 0$ ) übereinstimmt.

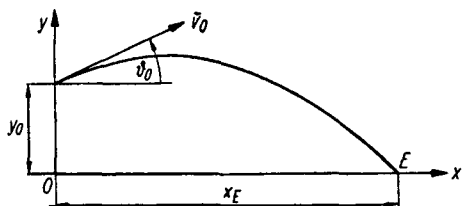


Bild 2.17  
Flugbahn einer Bombe (Abwurf aus dem Steigflug:  $\theta_0 > 0$ )

Das mathematische Bahnmodell des  $t$ -Systems (Abschnitt 2.2.1.) ist abzuändern in:

$$\dot{x} = u, \quad x(t_0) = 0; \quad (2.73)$$

$$\dot{y} = w, \quad y(t_0) = y_0; \quad (2.74)$$

$$\dot{u} = 0, \quad u(t_0) = u_0; \quad (2.75)$$

$$\dot{w} = -g_0, \quad w(t_0) = w_0. \quad (2.76)$$

Das vorstehende Differentialgleichungssystem unterscheidet sich von dem System (2.7) lediglich dadurch, daß die Anfangsbedingung  $y(t_0) = 0$  durch die Anfangsbedingung

$y(t_0) = y_0 \neq 0$  ersetzt ist. Diese an sich geringfügige Änderung erschwert jedoch an einigen Stellen die mathematische Behandlung wesentlich.

Das Ziel der folgenden Betrachtungen besteht darin, das Anfangswertproblem (2.73) bis (2.76) zu integrieren und Formeln für die Bahnelemente aufzustellen.

## 2.7.2. Die Bahnelemente der Bombenbahn

Auf die gleiche Weise wie in Abschnitt 2.2.1. erhält man für die Elemente der Bombenbahn:

$$x = u_0 t, \quad (2.77)$$

$$y = y_0 + w_0 t - \frac{1}{2} g_0 t^2, \quad (2.78)$$

$$u = u_0, \quad (2.79)$$

$$w = w_0 - g_0 t. \quad (2.80)$$

Für  $v$  findet man

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g_0(y_0 - y)}; \quad (2.81)$$

der Neigungswinkel  $\vartheta$  der Bahntangente ergibt sich wiederum aus

$$\tan \vartheta = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{w}{u},$$

$$\tan \vartheta = \tan \vartheta_0 - \frac{g_0 t}{u_0}. \quad (2.82)$$

Die Beziehungen für die Bahnelemente des Gipfels können aus Abschnitt 2.3. übernommen werden; lediglich  $y_g$  ist durch  $(y_g - y_0)$  zu ersetzen.

Zur Vereinfachung der Formelschreibweise ist es zweckmäßig, das Verhältnis der potentiellen Energie des Geschosses zu dessen kinetischer Energie im Abgangspunkt als Parameter  $q$  einzuführen:

$$q := \frac{\Psi_{\text{pot}}^{(0)}}{\Psi_{\text{kin}}^{(0)}} = \frac{m g_0 y_0}{\frac{1}{2} m v_0^2} = \frac{2 g_0 y_0}{v_0^2}. \quad (2.83)$$

Die Beziehung (2.81) für die Bahngeschwindigkeit kann man damit in der Form schreiben

$$v = v_0 \sqrt{1 + q \left(1 - \frac{y}{y_0}\right)}. \quad (2.84)$$

Die Bedingungsgleichung für den Auftreffpunkt der Bombe in der durch den Koordinatenursprung verlaufenden Horizontalebene lautet:  $y = 0$ .

Setzt man in (2.78)  $y = 0$ , so erhält man eine Gleichung für die Flugzeit  $t_E$  der Bombe vom Ausklinken bis zum Auftreffen auf der Erdoberfläche:

$$y_0 + w_0 t_E - \frac{1}{2} g_0 t_E^2 = 0.$$

Als Lösung dieser quadratischen Gleichung in  $t_E$  ergibt sich

$$t_E = \frac{w_0}{g_0} \left( \pm \sqrt{\frac{w_0^2}{g_0^2} + \frac{2y_0}{g_0}} \right)$$

bzw. mit  $w_0 = v_0 \sin \vartheta_0$  und (2.83):

$$t_E = \frac{v_0 \sin \vartheta_0}{g_0} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{q}{\sin^2 \vartheta_0}} \right).$$

Der Ausdruck vor der Klammer ist gleich der Flugzeit  $t_g$  vom Abgangspunkt bis zum Flugbahngipfel, so daß man die vorstehende Beziehung auch schreiben kann

$$t_E = t_g \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{q}{\sin^2 \vartheta_0}} \right). \quad (2.85)$$

Um die *horizontale Wurfweite*  $x_E$  der Bombe zu ermitteln, ist in (2.77) für  $t$  die Flugzeit  $t_E$  einzusetzen:

$$x_E = x_g \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{q}{\sin^2 \vartheta_0}} \right); \quad (2.86)$$

$x_g$  bezeichnet die Abszisse des Flugbahngipfels.

Die *Auftreffgeschwindigkeit*  $v_E$  folgt mit  $y = 0$  aus (2.84):

$$v_E = v_0 \sqrt{1 + q}; \quad (2.87)$$

sie ist *unabhängig von dem Abgangswinkel*  $\vartheta_0$ .

Der *Auftreffwinkel*  $\vartheta_E$  ergibt sich mit  $t = t_E$  aus (2.82):

$$\tan \vartheta_E = -\tan \vartheta_0 \sqrt{1 + \frac{q}{\sin^2 \vartheta_0}} = \tan \vartheta_e \sqrt{1 + \frac{q}{\sin^2 \vartheta_0}}. \quad (2.88)$$

Beim *Bombenwurf aus dem Horizontalflug* vereinfachen sich die Formeln (2.85), (2.86) und (2.88) wegen  $\vartheta_0 = 0$  zu

$$t_E' = \sqrt{2y_0/g_0}, \quad x_E' = v_0 \sqrt{2y_0/g_0}, \quad \tan \vartheta_E' = -\sqrt{q}. \quad (2.89)$$

Die Flugzeit  $t_E'$  ist gleich der Zeit, die ein Körper benötigt, um im Vakuum die Höhe  $y_0$  zu durchfallen:

$$y_0 = \frac{1}{2} g_0 (t_E')^2, \quad (t_E')^2 = 2y_0/g_0.$$

Wenn die Bombe vor dem Abwurf die Geschwindigkeit  $v_0$  des Flugzeugs hat und über keinen Eigenantrieb verfügt, so muß sie – um das Ziel zu treffen – in der Entfernung  $x_E'$  vor dem Ziel ausgeklinkt werden (Bild 2.18).

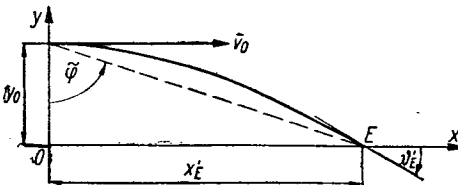


Bild 2.18

Zur Definition des Vorhaltewinkels  $\varphi$

In der Praxis des Bombenwurfs wird beim Anflug jedoch nicht die Kartenentfernung  $x_E$  verfolgt; man mißt vielmehr fortlaufend den *Vorhaltewinkel*  $\bar{\varphi}$  und die Flughöhe  $y_0$  über Grund. Für den Tangens des Vorhaltewinkels  $\bar{\varphi}$  liest man in Bild 2.18 ab

$$\begin{aligned}\tan \bar{\varphi} &= \frac{x'_E}{y_0} = \frac{v_0}{y_0} \sqrt{\frac{2y_0}{g_0}} = \frac{2}{\sqrt{q}}, \\ \cot \bar{\varphi} &= \frac{1}{2} \sqrt{q}.\end{aligned}\tag{2.90}$$

### 2.7.3. Die maximale Bombenwurfweite

Die maximale Bombenwurfweite wird nicht aus dem Horizontalflug, sondern beim Steigflug ( $\vartheta_0 > 0$ ) des Trägerflugzeugs erreicht.

Der optimale Winkel  $\vartheta_0 = \vartheta_0^*$  folgt mit  $x_E$  (2.86) aus der Bedingung

$$(\partial x_E / \partial \vartheta_0)_{\vartheta_0 = \vartheta_0^*} = 0.$$

Nach einigen Zwischenrechnungen, die hier weggelassen sind, findet man

$$\cot \vartheta_0^* = \sqrt{1 + q}\tag{2.91}$$

(siehe Übungsaufgabe 2.2.). Für die *maximale Wurfweite*  $x_E$  erhält man damit

$$x_E^* = \frac{v_0^2}{g_0} \sqrt{1 + q} = x_E^* \sqrt{1 + q}.\tag{2.92}$$

Setzt man  $y_0 = 0$  ( $q = 0$ ), so gehen die in diesem Abschnitt abgeleiteten Formeln in die bekannten Beziehungen für Bahnen der *Klasse Boden – Boden* über.

## 2.8. Grundbegriffe der Störungstheorie

Die schußtafelmäßige Anfangsgeschwindigkeit und die berechneten Abgangswinkel werden beim Gefechtsschießen wohl in den seltensten Fällen eingehalten werden können. Die wahre Anfangsgeschwindigkeit und der tatsächlich vorliegende Abgangswinkel unterscheiden sich von den Sollwerten um kleine Beträge  $\delta v_0$ ,  $\delta \vartheta_0$ . Es erhebt sich die Frage, wie sich diese kleinen Fehler  $\delta v_0$ ,  $\delta \vartheta_0$  der Anfangsgeschwindigkeit und des Abgangswinkels auf die Flugbahnelemente auswirken.

Die Beantwortung dieser und ähnlicher Fragen ist Gegenstand der ballistischen Störungstheorie.

Die Ausführungen dieses Abschnitts verfolgen das Ziel, eine erste Einführung in die Methodik der linearen Behandlung von Parameterstörungen zu geben. Hinsichtlich der systematischen Darstellung der linearen Störungstheorie sei auf Abschnitt 6.3. verwiesen.

### 2.8.1. Vergleichsvariable

Wählt man für die Flugbahnparameter  $v_0$  und  $\vartheta_0$  spezielle Zahlenwerte  $v_0 = \hat{v}_0$ ,  $\vartheta_0 = \hat{\vartheta}_0$ , so ist der Flugbahnverlauf eindeutig bestimmt. Eine Änderung der Flugbahnparameter gemäß

$$v_0 = \hat{v}_0 \rightarrow \tilde{v}_0 = \hat{v}_0 + \delta v_0, \quad \vartheta_0 = \hat{\vartheta}_0 \rightarrow \tilde{\vartheta}_0 = \hat{\vartheta}_0 + \delta \vartheta_0$$

bewirkt den Übergang von der ursprünglichen Bahn zu einer benachbarten (gestörten) Bahn (Bild 2.19).

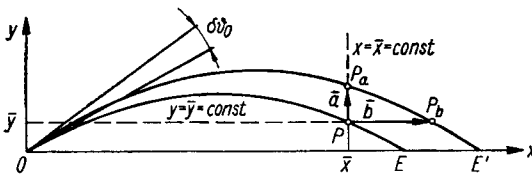


Bild 2.19 Zur Definition des Begriffs Vergleichsvariable

$\widehat{OE}$  – ungestörte (Normal-) Bahn;

$\widehat{OE'}$  – gestörte Bahn;

$a$  – störungsbedingte Verschiebung des Flugbahnpunktes  $P$  der Normalbahn für die Vergleichsvariable  $x = \bar{x} = \text{const}$ ;

$b$  – störungsbedingte Verschiebung des Flugbahnpunktes  $P$  der Normalbahn für die Vergleichsvariable  $y = \bar{y} = \text{const}$

Um die durch Parameteränderungen bewirkten Abweichungen der Bahnelemente zu berechnen, reicht die Kenntnis der Parameteränderungen  $\delta v_0$ ,  $\delta \vartheta_0$  und des Verlaufs der ungestörten Flugbahn nicht aus, da jedem Punkt der ungestörten Bahn auf unendlich viele Arten Vergleichspunkte der gestörten Bahn zugeordnet werden können. Um das Störungsproblem eindeutig lösbar zu machen, muß somit zusätzlich ein *Vergleichskriterium* vorgegeben sein, das jedem Punkt der ungestörten Bahn eindeutig einen Punkt der gestörten Bahn zuordnet.

Die Zuordnung der Referenzpunkte erfolgt meist in der Weise, daß man eines der Bahnelemente (z. B.  $x$ ) konstant hält. Die in der Ballistik am häufigsten benutzten Vergleichskriterien (Zuordnungsvorschriften) sind

$$t = \tilde{t} = \text{const}; \quad x = \bar{x} = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad y = \bar{y} = \text{const}.$$

Die festgehaltene Variable, bezüglich der die Zuordnung von gestörter und ungestörter Bahn erfolgt, heißt *Vergleichsvariable*.

Die *Vergleichsvariable*  $t$  wird für die Berechnung der störungsbedingten Sprengpunktverlagerung beim Schießen auf Luftziele mit (Uhrwerks-) Zündern benötigt.

Die *Vergleichsvariable*  $x$  stellt die adäquate Vergleichsvariable beim Schießen gegen Ziele dar, deren Höhe in der Größenordnung der Gipfelhöhe der Flugbahn liegt (z.B. Beschuß von Panzern mit Pak).

Die *Vergleichsvariable*  $y$  ist der Bekämpfung von Flächenzielen mit Bahnen der Klasse Boden – Boden angepaßt.

Bei unterschiedlichen Vergleichsvariablen ergeben sich auch unterschiedliche Zahlenwerte für die Störungen. Es ist eine wichtige Teilaufgabe der Störungstheorie, Verfahren zu entwickeln, mit denen Störungsvektoren von einer Vergleichsvariablen auf eine andere transformiert werden können.

### 2.8.2. Störungskoeffizienten

Der Einfluß von Parameterstörungen  $\hat{v}_0 \rightarrow \hat{v}_0 + \delta v_0$ ,  $\hat{\vartheta}_0 \rightarrow \hat{\vartheta}_0 + \delta \vartheta_0$  auf die Bahnelemente wird in der Ballistik durch Angabe der entsprechenden *Störungskoeffizienten* beschrieben. So setzt man die Störung  $\delta x_1$  der Horizontalschußweite  $x_e$ , die durch eine  $v_0$ -Änderung bedingt ist, in der Form an (Vergleichsvariable  $y$ ):

$$\delta x_1 = X_v^y(t_e | \hat{\mu}) \delta v_0, \quad \hat{\mu} := (\hat{v}_0, \hat{\vartheta}_0).$$

Der Störungskoeffizient  $X_v^y(t_e | \hat{\mu})$  ist der Proportionalitätsfaktor zwischen der  $v_0$ -Änderung und der daraus resultierenden Abweichung  $\delta x_1$  der Horizontalschußweite.

Die Bahnelemente werden (wie bisher) mit Kleinbuchstaben bezeichnet, die dazugehörigen Störungskoeffizienten mit dem entsprechenden Großbuchstaben. An dem Symbol des Störungskoeffizienten steht als oberer Index die Vergleichsvariable, als unterer Index der die Störung verursachende Flugbahnparameter. Das Argument  $\hat{\mu}$  weist darauf hin, daß die Störungskoeffizienten für die *ungestörte* Lösung (die *Normalbahn*) zu berechnen sind. Man nennt  $\hat{\mu}$  *Parametervektor* der Bahn.

Analog schreibt man für den Einfluß einer  $\vartheta_0$ -Änderung auf die Horizontalschußweite

$$\delta x_2 = X_{\vartheta}^y(t_e | \hat{\mu}) \delta \vartheta_0.$$



Die Addition dieser beiden Fehlerterme liefert ( $\delta x_e = \delta x_1 + \delta x_2$ ):

$$\delta x_e = X_v^y(t_e|\hat{\mu}) \delta v_0 + X_\vartheta^y(t_e|\hat{\mu}) \delta \vartheta_0. \quad (2.93)$$

Entsprechende Beziehungen ergeben sich für die Abweichungen  $\delta t_e$ ,  $\delta v_e$  und  $\delta \vartheta_e$  der Bahnelemente  $t_e$ ,  $v_e$  und  $\vartheta_e$ :

$$\delta t_e = T_v^y(t_e|\hat{\mu}) \delta v_0 + T_\vartheta^y(t_e|\hat{\mu}) \delta \vartheta_0, \quad (2.94)$$

$$\delta v_e = V_v^y(t_e|\hat{\mu}) \delta v_0 + V_\vartheta^y(t_e|\hat{\mu}) \delta \vartheta_0, \quad (2.95)$$

$$\delta \vartheta_e = \theta_v^y(t_e|\hat{\mu}) \delta v_0 + \theta_\vartheta^y(t_e|\hat{\mu}) \delta \vartheta_0. \quad (2.96)$$

Um einen Störungskoeffizienten vollständig zu kennzeichnen, sind anzugeben:

- das zugrunde liegende ballistische Bahnmodell,
- das Bahnelement, dessen Störung berechnet werden soll,
- das Vergleichskriterium (die Vergleichsvariable) für die Zuordnung der gestörten Bahn zur ungestörten (Normal-) Bahn,
- der Parameter, dessen Änderung die Störung der Bahnelemente hervorruft, und
- die Stelle der (Normal-) Bahn, an der die Änderung der Bahnelemente infolge des Störungseinflusses untersucht werden soll.

Die *Störungskoeffizienten* sind also keineswegs Konstanten.

Um die in (2.93) bis (2.96) auftretenden Störungskoeffizienten zu berechnen, entwickelt man die Bahnelemente der gestörten Bahn um den Auftreffpunkt  $E$  der ungestörten Bahn (Parameter:  $\hat{v}_0$ ,  $\hat{\vartheta}_0$ ) in *Taylor-Reihen*.

Unter Verwendung der in Tabelle 2.1 (Seite 35) angegebenen Formeln gilt

a) für die ungestörte Bahn:

$$\hat{x}_e = (\hat{v}_0^2/g_0) \sin 2\hat{\vartheta}_0, \quad \hat{t}_e = (2\hat{v}_0/g_0) \sin \hat{\vartheta}_0,$$

$$\hat{v}_e = \hat{v}_0, \quad \hat{\vartheta}_e = -\hat{\vartheta}_0;$$

b) für die gestörte Bahn:

$$\tilde{x}_e = \hat{x}_e + \delta x_e = \frac{(\hat{v}_0 + \delta v_0)^2}{g_0} \sin 2(\hat{\vartheta}_0 + \delta \vartheta_0),$$

$$\tilde{t}_e = \hat{t}_e + \delta t_e = \frac{2(\hat{v}_0 + \delta v_0)}{g_0} \sin(\hat{\vartheta}_0 + \delta \vartheta_0),$$

$$\tilde{v}_e = \hat{v}_e + \delta v_e = \hat{v}_0 + \delta v_0,$$

$$\tilde{\vartheta}_e = \hat{\vartheta}_e + \delta \vartheta_e = -(\hat{\vartheta}_0 + \delta \vartheta_0).$$

Entwickelt man die rechten Seiten dieser Gleichungen nach Potenzen von  $\delta v_0$  und  $\delta \vartheta_0$ , so erhält man – bei Abbrechen der Entwicklungen nach den linearen Gliedern – für die Störungen der Bahnelemente im Auftreffpunkt

$$\delta x_e = \frac{2 \hat{v}_0}{g_0} \sin 2\hat{\vartheta}_0 \cdot \delta v_0 + \frac{2 \hat{v}_0^2}{g_0} \cos 2\hat{\vartheta}_0 \cdot \delta \vartheta_0,$$

$$\delta t_e = \frac{2}{g_0} \sin \hat{\vartheta}_0 \cdot \delta v_0 + \frac{2 \hat{v}_0}{g_0} \cos \hat{\vartheta}_0 \cdot \delta \vartheta_0,$$

$$\delta v_e = \delta v_0, \quad \delta \vartheta_e = -\delta \vartheta_0.$$

Hierfür kann man auch schreiben

$$\delta x_e = (2\hat{x}_e/\hat{v}_0) \delta v_0 + 2\hat{x}_e \cot 2\hat{\vartheta}_0 \cdot \delta \vartheta_0, \quad (2.97)$$

$$\delta t_e = (\hat{t}_e/\hat{v}_0) \delta v_0 + \hat{t}_e \cot \hat{\vartheta}_0 \cdot \delta \vartheta_0, \quad (2.98)$$

$$\delta v_e = \delta v_0, \quad (2.99)$$

$$\delta \vartheta_e = -\delta \vartheta_0. \quad (2.100)$$

Vergleicht man die Beziehungen (2.93) bis (2.96) mit (2.97) bis (2.100), so findet man für die Störungskoeffizienten:

$$\begin{aligned} X_e^y(t_e|\hat{\boldsymbol{\mu}}) &= 2\hat{x}_e/\hat{v}_0, & X_\vartheta^y(t_e|\hat{\boldsymbol{\mu}}) &= 2\hat{x}_e \cot 2\hat{\vartheta}_0, \\ T_e^y(t_e|\hat{\boldsymbol{\mu}}) &= \hat{t}_e/\hat{v}_0, & T_\vartheta^y(t_e|\hat{\boldsymbol{\mu}}) &= \hat{t}_e \cot \hat{\vartheta}_0, \\ V_e^y(t_e|\hat{\boldsymbol{\mu}}) &= 1, & V_\vartheta^y(t_e|\hat{\boldsymbol{\mu}}) &= 0, \\ \theta_e^y(t_e|\hat{\boldsymbol{\mu}}) &= 0, & \theta_\vartheta^y(t_e|\hat{\boldsymbol{\mu}}) &= -1. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Analog lassen sich die Störungskoeffizienten für andere Variablen-systeme und Vergleichsvariable ermitteln.

Im luftgefüllten Raum ist eine analytische Berechnung der Störungs-koeffizienten im allgemeinen unmöglich.

### 2.8.3. Die Fehlertransport-Matrix

Die Beziehungen (2.93) bis (2.96) können zu einer Matrixgleichung zusammengefaßt werden. Hierzu definiert man die beiden Spaltenmatrizen (Spaltenvektoren):

$$\xi_e := \begin{bmatrix} \delta x_e \\ \delta t_e \\ \delta v_e \\ \delta \vartheta_e \end{bmatrix}, \quad \delta \mu := \begin{bmatrix} \delta v_0 \\ \delta \vartheta_0 \end{bmatrix}$$

sowie die  $4 \times 2$ -Matrix

$$\Psi^y(t_e | \hat{\mu}) = \begin{bmatrix} X_v^y(t_e | \hat{\mu}) & X_\vartheta^y(t_e | \hat{\mu}) \\ T_v^y(t_e | \hat{\mu}) & T_\vartheta^y(t_e | \hat{\mu}) \\ V_v^y(t_e | \hat{\mu}) & V_\vartheta^y(t_e | \hat{\mu}) \\ \theta_v^y(t_e | \hat{\mu}) & \theta_\vartheta^y(t_e | \hat{\mu}) \end{bmatrix}. \quad (2.102)$$

Die vier Gleichungen (2.93) bis (2.96) sind dann der Matrixgleichung<sup>1)</sup> gleichwertig:

$$\xi_e = \Psi^y(t_e | \hat{\mu}) \delta \mu. \quad (2.103)$$

Die Multiplikation der im Abgangspunkt vorhandenen (Anfangs-) Störung  $\delta \mu$  mit der Matrix  $\Psi^y(t_e | \hat{\mu})$  bewirkt, daß die Störung  $\delta \mu$  längs der Flugbahn bis zum Auftreffpunkt  $E$  fortgepflanzt und dort in eine Störung  $\xi_e$  der Bahnelemente „umgewandelt“ wird. Der Name *Fehlertransport-Matrix* für  $\Psi^y(t_e | \hat{\mu})$  wird hierdurch verständlich.

Wie man aus (2.101) folgert, hat die Fehlertransport-Matrix im vorliegenden Fall die Struktur

$$\Psi^y(t_e | \hat{\mu}) = \begin{bmatrix} 2 \hat{x}_e / \hat{v}_0 & 2 \hat{x}_e \cot 2\hat{\vartheta}_0 \\ \hat{t}_e / \hat{v}_0 & \hat{t}_e \cot \hat{\vartheta}_0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

<sup>1)</sup> Hinsichtlich der Rechenregeln für Matrizen siehe das auf Seite 30, Fußnote 1, zitierte Buch von *Fichtenholz*.

In der ersten *Zeile* dieser Matrix stehen die Störungskoeffizienten für die Schußweite  $x_e$ , in der zweiten die Störungskoeffizienten für die Flugzeit  $t_e$ , in der dritten und vierten Zeile die Störungskoeffizienten für die Auftreffgeschwindigkeit  $v_e$  und den Auftreffwinkel  $\vartheta_e$ .

Die Störungskoeffizienten der ersten *Spalte* gehören zu dem Parameter  $v_0$ , die der zweiten Spalte betreffen Änderungen des Abgangswinkels  $\vartheta_0$ .

Ist  $\vartheta_0$  gleich dem Winkel der maximalen Schußweite ( $\vartheta_0 = \vartheta_0^* \cong 45^\circ$ ), so geht die Matrix (2.103) über in

$$\Psi^y(t_e|\hat{\mu}) = \begin{bmatrix} 2\hat{v}_0/g_0 & 0 \\ \sqrt{2/g_0} & \sqrt{2} \hat{v}_0/g_0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Man erkennt an dem Element  $[\Psi^y(t_e|\hat{\mu})]^{12}$ , daß eine kleine Abweichung  $\delta\vartheta_0$  von dem optimalen Abgangswinkel die maximale Horizontalschußweite (in erster Näherung) nicht verändert; die Flugzeit ändert sich jedoch.

## 2.8.4. Ballistische Mittelwerte

### 2.8.4.1. Aufgabenstellung und Ausgangsannahmen

Die Störungen der Bahnelemente, die in dem vorangegangenen Abschnitt behandelt worden sind, kamen durch konstante Abweichungen der Flugparameter  $v_0$ ,  $\vartheta_0$  von einem Normalwert  $\hat{v}_0$ ,  $\hat{\vartheta}_0$  zustande.

Neben diesen relativ einfach zu behandelnden *Parameterstörungen* treten häufig Störungen auf, deren Betrag längs der Flugbahn variiert. Hierfür ein Beispiel:

Die Größe des Widerstandes, den ein Geschöß bei seiner Bewegung durch die Luft erfährt, hängt von dem physikalischen Zustand der Erdatmosphäre ab. Die meteorologischen Elemente der Atmosphäre (Luftdruck, Luftdichte, Lufttemperatur u. a.) sind Funktionen der Höhe über dem Erdboden. Um die mathematische Behandlung der außenballistischen Bewegungsgleichungen zu vereinfachen, kann man diese Funktionen in vielen Fällen durch ihre konstanten Mittelwerte ersetzen und die Veränderlichkeit der meteorologischen Elemente mit der Höhe

dann als „Abweichung“ („Störung“) von den konstanten Mittelwerten interpretieren.

Auch dann, wenn die Normalbahn für einen bestimmten Standardverlauf der meteorologischen Elemente berechnet worden ist, besteht die Notwendigkeit, den Einfluß der (im allgemeinen höhenabhängigen) Abweichungen des realen Verlaufs der meteorologischen Elemente von dem Standardverlauf der Normalatmosphäre<sup>1)</sup> zu bestimmen.

*Die Mittelung der meteorologischen Elemente muß in den genannten Fällen so erfolgen, daß der Mittelwert die gleiche ballistische Wirkung auf das betrachtete Flugbahnelement ausübt wie die variable (Stör-) Funktion selbst.*

Die exakte Erfüllung dieser Anpassungsbedingung ist im allgemeinen nur für ein einziges Bahnelement und in einem einzigen Flugbahnpunkt (etwa dem Auftreffpunkt) möglich; sie erfordert erheblichen mathematischen Aufwand.<sup>2)</sup>

Zur Ermittlung von ballistischen Mittelwerten geht man in der ballistischen Praxis nach folgendem Schema vor:

- Das von der Flugbahn überstrichene Höhenintervall  $[0, y_g]$  wird in  $m$  (in der Regel gleich breite) horizontale Schichten unterteilt.
- Innerhalb der einzelnen Schichten wird die zu mittelnde (Stör-) Funktion  $\varphi(y)$  durch einen konstanten Wert  $\varphi_i$  (das arithmetische Mittel in der  $i$ -ten Schicht) ersetzt.
- Die Schichtmittel  $\varphi_i$  werden mit geeignet gewählten (universellen oder auf das Waffensystem bezogenen) Gewichtsfaktoren  $q_i$  multipliziert und zu dem ballistischen Mittelwert  $\bar{\varphi}$  nach der folgenden Vorschrift zusammengefaßt:

$$\bar{\varphi} = \frac{\sum_{i=1}^m \varphi_i q_i}{\sum_{i=1}^m q_i} . \quad (2.105)$$

Das Problem der ballistischen Mittelung reduziert sich somit darauf, geeignete Gewichtsfunktionen vorzugeben.

Um die Gewichtsfaktoren  $q_i$  zu ermitteln, wird in der älteren Ballistik

<sup>1)</sup> Siehe Abschnitt 3.2.6.

<sup>2)</sup> Hinsichtlich der exakten Berechnung ballistischer Mittelwerte sei auf Abschnitt 6.9. verwiesen.

die Hypothese benutzt: Der Einfluß einer Störung auf die Flugbahn eines Geschosses ist um so größer, je länger diese auf das Geschöß einwirkt. Diese Annahme lautet in der Sprache der Mathematik: Das ballistische Mittel der höhenveränderlichen Funktion  $\varphi(y)$  ist das Zeitmittel  $\bar{\varphi}_t$  dieser Funktion längs der Flugbahn des Geschosses,

$$\bar{\varphi}_t = \frac{1}{t_e} \int_0^{t_e} \varphi(y) d\tau. \quad (2.106)$$

Um das Integral (2.106) auswerten zu können, benötigt man die Zeitabhängigkeit der Flugbahnordinate  $y = y(t)$ ; die Lösung der ballistischen Bewegungsgleichungen muß also bereits bekannt sein. Die Zahlenwerte der Gewichtsfaktoren und der ballistischen Mittelwerte hängen über die Flugbahndifferentialgleichungen somit wesentlich von dem zugrunde liegenden Bahnmodell ab.

Mit  $y = y(t)$  kann man (2.106) in der Form schreiben

$$\bar{\varphi}_t = \frac{1}{t_e} \int_0^{t_e} \varphi[y(\tau)] d\tau. \quad (2.107)$$

Unterteilt man das von der Flugbahn überstrichene Höhenintervall  $[0, y_g]$  in  $m$  horizontale Schichten der Breite  $\Delta y_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) und sieht die zu mittelnde Funktion innerhalb der einzelnen Schichten als konstant an,

$$\varphi(y) = \varphi_i = \text{const}$$

$$(y_{i-1} \leq y \leq y_i = y_{i-1} + \Delta y_i; \quad i = 1, 2, \dots, m),$$

dann geht (2.107) in die Summe über

$$\bar{\varphi}_t = \sum_{i=1}^m \varphi_i q_i, \quad q_i = \Delta t_i / t_e. \quad (2.108)$$

$\Delta t_i$  ist die Verweilzeit des Geschosses in der  $i$ -ten Schicht.

Mit (2.108) hat man eine Darstellung des Typs (2.105) gefunden.<sup>1)</sup>

Je feiner die Schichteinteilung gewählt wird (das heißt: je größer  $m$  ist), um so besser approximiert die Summe (2.108) das Integral (2.107).

<sup>1)</sup> Es ist auch der umgekehrte Weg möglich: Geht man von (2.108) aus, so läßt sich (2.106) durch den Grenzübergang  $\Delta t_i \rightarrow 0$  gewinnen.

Die Annahme, daß der Einfluß des Zustands der Atmosphäre auf ein Geschoß um so größer ist, je länger sich das Geschoß in den betreffenden Schichten der Atmosphäre aufhält, erscheint auf den ersten Blick als sehr vernünftig. Eine eingehendere Nachprüfung zeigt jedoch, daß diese Hypothese einen schwerwiegenden Mangel hat: Sie unterscheidet nicht zwischen Einflüssen, die am Anfang der Bahn auftreten, und Einflüssen, die in der Endphase der Bahn vorliegen. Eine derartige Unterscheidung ist jedoch erforderlich: Störungen, die bereits kurz nach dem Abschuß auf das Geschoß einwirken, verändern den gesamten nachfolgenden Bahnverlauf, während Einflüsse, die erst kurz vor dem Auftreffen des Geschosses entstehen, „keine Zeit mehr haben“, die Flugbahnelemente zu verfälschen. So kann ein Fehler des Abgangswinkels um einige Grad bewirken, daß das Geschoß das Ziel weit verfehlt, während eine Änderung des Auftreffwinkels um den gleichen Betrag die Effektivität des Schusses praktisch nicht beeinträchtigt.

#### 2.8.4.2. Gewichtsfaktoren für die Mittelung variabler Störungen

Die Gewichtsfaktoren  $q_i = \Delta t_i / t_e$ , die gleich der relativen Verweilzeit des Geschosses in der  $i$ -ten Schicht sind, können bei Zugrundelegung des parabolischen Bahnmodells rasch berechnet werden.

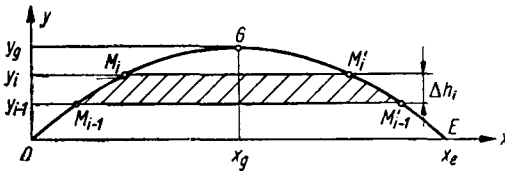


Bild 2.20  
Schichteinteilung des Höhenintervalls  $[0, y_g]$  zur Berechnung der ballistischen Gewichtsfaktoren  $q_i$   
( $\Delta h_i = \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ )

Nach der *Hauptschen Formel* (2.43) gilt für die Flugzeit  $t_i$  vom Punkt  $M_i$  bis zum Punkt  $M'_i$  (Bild 2.20):

$$t_i = \sqrt{8/g_0} \sqrt{y_g - y_i}.$$

Entsprechend erhält man für die Flugzeit  $t_{i-1}$  vom Punkt  $M_{i-1}$  bis zum Punkt  $M'_{i-1}$ :

$$t_{i-1} = \sqrt{8/g_0} \sqrt{y_g - y_{i-1}}.$$

Die Aufenthaltsdauer des Geschosses in der  $i$ -ten Schicht beträgt damit

$$\Delta t_i = t_{i-1} - t_i = \sqrt{8/g_0} (\sqrt{y_x - y_{i-1}} - \sqrt{y_x - y_i}).$$

Hieraus folgt für die relative Verweilzeit  $\Delta t_i/t_e$  in der  $i$ -ten Schicht

$$\frac{\Delta t_i}{t_e} = \frac{t_{i-1} - t_i}{t_e} = \sqrt{1 - \frac{y_{i-1}}{y_x}} - \sqrt{1 - \frac{y_i}{y_x}}. \quad (2.109)$$

Bis jetzt ist noch nichts über die Dicke  $\Delta y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) der einzelnen Schichten vorausgesetzt worden; die Formel (2.109) gilt somit für *beliebige* Schichtdicken.

Unterteilt man den Bereich zwischen Mündungshorizont und Flugbahngipfel in  $m$  Schichten gleicher Stärke  $\Delta y$ ,

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 = \dots = \Delta y_m = \Delta y,$$

dann wird  $y_i = i \Delta y$ ,  $y_x = m \Delta y$ , und man erhält für das Gewicht  $q_i$  der  $i$ -ten Schicht

$$q_i := \Delta t_i/t_e = \sqrt{1 - (i-1)/m} - \sqrt{1 - i/m}. \quad (2.110)$$

Die nach (2.110) berechneten Gewichte  $q_i$  sind für  $m = 1$  bis  $m = 5$  in Tabelle 2.2 aufgeführt.

Die oberste Schicht erhält jeweils das größte Gewicht, die unterste

Tabelle 2.2 Gewichtungsfaktoren  $q_i = \Delta t_i/t_e$   
nach der parabolischen Theorie

$i \backslash m$	1	2	3	4	5
1	1,00	0,29	0,18	0,13	0,11
2		0,71	0,24	0,16	0,12
3			0,58	0,21	0,14
4				0,50	0,19
5					0,44



Schicht das geringste. Das Verhältnis der Gewichte von oberster und unterster Schicht wächst mit zunehmender Schichtanzahl.

Berücksichtigt man die Fehlerfortpflanzung längs der Flugbahn, so kann die Tabelle der Gewichtsfaktoren eine wesentlich andere Struktur aufweisen.

Tabelle 2.3 *Gewichtsfaktoren für Fla-Bahnen*  
(Dmitriev [1], zitiert nach [2])

$i \backslash m$	1	2	3	4	5
1	1,000	0,678	0,467	0,355	0,287
2		0,322	0,381	0,298	0,271
3			0,152	0,252	0,229
4				0,095	0,150
5					0,063

Tabelle 2.3 enthält einen Auszug aus einer Gewichtsfaktortafel für Geschosse von Fla-Waffen, die durch numerische Integration der Störungsdifferentialgleichungen ermittelt worden ist. Man erkennt, daß die bodennächste Schicht das stärkste Gewicht erhält, die Gipfelschicht hingegen das geringste. Hieraus ist zu schlußfolgern, daß die in Bodennähe auftretenden Störungen den stärksten Einfluß auf den Bahnverlauf ausüben.

#### 2.8.4.3. Die mittlere Flugbahnhöhe

Ist die Funktion  $\varphi[y(t)]$  von einfacher analytischer Gestalt, etwa ein Polynom in  $t$ ,

$$\varphi(t) = \varphi[y(t)] \equiv a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n,$$

so läßt sich das Integral (2.107) geschlossen auswerten. Der auf diesem Wege ermittelte analytische Ausdruck für  $\bar{\varphi}_t$  kann dazu benutzt werden, eine *mittlere ballistische Höhe*  $\bar{y}$  zu definieren, indem man fordert: Die Funktion  $\varphi(y)$  nehme in der Höhe  $y = \bar{y}$  ihren ballistischen Mittelwert  $\bar{\varphi}_t$  an.

Die Bedingungsgleichung für  $\bar{y}$  lautet damit  $\varphi(\bar{y}) = \bar{\varphi}_t$ .

Ist  $\varphi(y)$  für  $y \in [0, y_g]$  stetig, dann kann man wegen der Gültigkeit des 1. Mittelwertsatzes der Integralrechnung schreiben:

$$\bar{y} = \beta y_g \quad (0 \leq \beta \leq 1).$$

Im folgenden soll  $\beta$  für zwei spezielle Funktionen  $\varphi(y)$  explizit berechnet werden; die Zeitabhängigkeit der Flugbahnordinate  $y = y(t)$  möge hierbei Gleichung (2.10) genügen.

a) Ansatz  $\varphi(y) \equiv a_0 + a_1 y$ : Mit

$$y(t) = w_0 t - \frac{1}{2} g_0 t^2, \quad w_0 = v_0 \sin \vartheta_0;$$

$$t_e = 2 w_0 / g_0, \quad y_g = \frac{1}{2} w_0^2 / g_0$$

folgt gemäß (2.107) für  $\bar{\varphi}_t$ :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_t &= \frac{1}{t_e} \int_0^{t_e} (a_0 + a_1 y) d\tau = a_0 + \frac{a_1}{t_e} \int_0^{t_e} \left( w_0 \tau - \frac{1}{2} g_0 \tau^2 \right) d\tau \\ &= a_0 + a_1 \left( \frac{1}{2} w_0 t_e - \frac{1}{6} g_0 t_e^2 \right) = a_0 + a_1 \frac{w_0^2}{g_0} \left( 1 - \frac{2}{3} \right) \\ &= a_0 + a_1 \left( \frac{2y_g}{3} \right). \end{aligned}$$

Es gilt somit

$$\bar{y} = \frac{2}{3} y_g, \quad \beta = \frac{2}{3} = 0,667. \quad (2.111)$$

b) Ansatz  $\varphi(y) \equiv a_0 + a_2 y^2$ : Man erhält für  $\bar{\varphi}_t$ :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_t &= \frac{1}{t_e} \int_0^{t_e} (a_0 + a_2 y^2) d\tau \\ &= a_0 + \frac{a_2}{t_e} \int_0^{t_e} \left( w_0^2 \tau^2 - g_0 w_0 \tau^3 + \frac{1}{4} g_0^2 \tau^4 \right) d\tau \\ &= a_0 + a_2 \left( \frac{1}{3} w_0^2 t_e^2 - \frac{1}{4} g_0 w_0 t_e^3 + \frac{1}{20} g_0^2 t_e^4 \right) \\ &= a_0 + a_2 w_0^2 t_e^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = a_0 + a_2 \frac{8}{15} y_g^2. \end{aligned}$$

Damit folgt als mittlere Höhe  $\bar{y}$ :

$$\bar{y} = \sqrt{8/15} y_g, \quad \beta = \sqrt{8/15} = 0,730. \quad (2.112)$$

Ein Vergleich der Resultate (2.111) und (2.112) zeigt

$$(\bar{y})^2 \neq \bar{y}^2,$$

*es gibt also keine universelle mittlere ballistische Höhe.* Die in der klassischen Ballistik sehr häufig benutzte Beziehung  $\bar{y} = \frac{2}{3} y_g$  gilt lediglich bei linearem Verlauf von  $\varphi$  mit der Höhe  $y$ .

Enthält die als Polynom angesetzte Funktion  $\varphi = \varphi(y)$  verschieden hohe Potenzen von  $y$ , so ist  $\beta$  keine reine Zahl mehr, sondern hängt von den Entwicklungskoeffizienten  $a_j$  sowie  $y_g$  selbst ab.

## 2.9. Einige Anwendungen der parabolischen Theorie

In diesem Abschnitt soll an einigen ausgewählten Fragestellungen gezeigt werden, wie die parabolische Theorie zur (näherungsweise) Lösung von Aufgaben der ballistischen Praxis benutzt werden kann.

### 2.9.1. Die Formel von Lender zur Korrektur des Aufsatzwinkels

Bei einer gegebenen Waffe ist der Aufsatzwinkel  $\alpha_0$ , der zum Treffen eines in der Mündungsebene in der Entfernung  $x_e$  befindlichen Zieles erforderlich ist, eine bekannte Funktion von  $x_e$ , die der Schußtafel entnommen werden kann. Waffen, die vorzugsweise im direkten Richten eingesetzt werden, tragen an oder in der Visiereinrichtung eine entsprechende Skala  $\alpha_0 = \alpha_0(x_e)$ .

Liegt das Ziel außerhalb der Mündungsebene (Geländewinkel  $\varepsilon \neq 0$ ), so ist zum Erreichen der Schrägschußweite  $D = x_e$  an der Waffe im allgemeinen ein anderer Aufsatzwinkel  $\alpha \neq \alpha_0$  einzustellen.<sup>1)</sup>

Bei Gültigkeit der parabolischen Theorie und bekannten  $\alpha_0$  und  $\varepsilon$  kann der für das Schießen mit Geländewinkel erforderliche Aufsatz  $\alpha$  (bzw. die Aufsatzwinkelkorrektur  $\Delta\alpha := \alpha - \alpha_0$ ) rechnerisch ermittelt werden.

Für ein in der Mündungsebene liegendes Ziel (Horizontalentfernung:  $x_e$ ) ergibt sich der Aufsatzwinkel  $\alpha_0$  aus

$$x_e = \frac{v_0^2}{g_0} \sin 2\alpha_0.$$

<sup>1)</sup> Bei den folgenden Betrachtungen wird angenommen, daß der Abgangsfehlerwinkel Null ist:  $\delta = 0$ .

Für die Schrägschußweite  $D$  war abgeleitet worden (2.61):

$$D = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha \cos (\alpha + \varepsilon)}{g_0 \cos^2 \varepsilon}.$$

Gleichsetzen der beiden letzten Gleichungen liefert eine Beziehung zwischen  $\alpha, \alpha_0$  und  $\varepsilon$ :

$$\sin 2\alpha_0 \cos^2 \varepsilon = 2 \sin \alpha \cos (\alpha + \varepsilon). \quad (2.113)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird so umgeformt, daß der gesuchte Winkel  $\alpha$  nur in dem Argument *einer* Winkelfunktion vorkommt.

Mit Hilfe der Additionstheoreme für den Sinus und Kosinus sowie der Beziehungen

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha); \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

erhält man für die rechte Seite von (2.113):

$$\begin{aligned} 2 \sin \alpha \cos (\alpha + \varepsilon) &= 2 \sin \alpha (\cos \alpha \cos \varepsilon - \sin \alpha \sin \varepsilon) \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \cos \varepsilon - 2 \sin^2 \alpha \cdot \sin \varepsilon \\ &= \sin 2\alpha \cdot \cos \varepsilon - (1 - \cos 2\alpha) \cdot \sin \varepsilon \\ &= (\sin 2\alpha \cos \varepsilon + \cos 2\alpha \sin \varepsilon) - \sin \varepsilon; \\ 2 \sin \alpha \cos (\alpha + \varepsilon) &= \sin (2\alpha + \varepsilon) - \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.114)$$

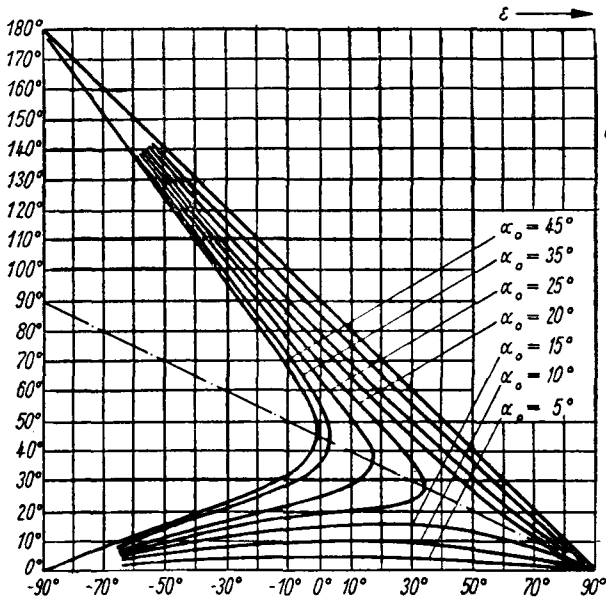


Bild 2.21 Aufsatzwinkel  $\alpha$  als Funktion des Geländewinkels  $\varepsilon$  (nach [2])

Einsetzen von (2.114) in (2.113) ergibt die Formel von Lender<sup>1)</sup>:

$$\sin(2\alpha + \varepsilon) = \sin 2\alpha_0 \cos^2 \varepsilon + \sin \varepsilon \quad (2.115)$$

bzw. nach  $\alpha$  aufgelöst

$$\alpha = \frac{1}{2} [\arcsin(\sin 2\alpha_0 \cos^2 \varepsilon + \sin \varepsilon) - \varepsilon].$$

Bild 2.21 veranschaulicht den Verlauf des Aufsatzwinkels als Funktion von  $\alpha$  und  $\alpha_0$ . Sind  $\alpha$  und  $\alpha_0$  klein, dann kann man (2.115) dadurch vereinfachen, daß man die  $\alpha$  und  $\alpha_0$  enthaltenden Winkelfunktionen jeweils durch das erste Glied ihrer Potenzreihenentwicklungen ersetzt:

$$\sin 2\alpha_0 \approx 2\alpha_0,$$

$$\sin(2\alpha + \varepsilon) = \sin 2\alpha \cos \varepsilon + \cos 2\alpha \sin \varepsilon \approx 2\alpha \cos \varepsilon + \sin \varepsilon.$$

Unter Verwendung dieser Entwicklungen folgt aus (2.115):

$$\alpha \approx \alpha_0 \cos \varepsilon \quad (\alpha, \alpha_0 \ll 1). \quad (2.116)$$

Die Aufsatzwinkelkorrektur

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha_0} = \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0}$$

errechnet sich damit aus der Beziehung

$$\Delta\alpha/\alpha_0 \approx \cos \varepsilon - 1 \leq 0 \quad (\alpha, \alpha_0 \ll 1) \quad (2.117)$$

bzw. bei kleinem Geländewinkel ( $\varepsilon \ll 1$ ):

$$\Delta\alpha/\alpha_0 \approx -\frac{1}{2}\varepsilon^2. \quad (2.118)$$

Die Beziehungen (2.116) und (2.118) leisten im luftgefüllten Raum als Näherungsformeln gute Dienste.

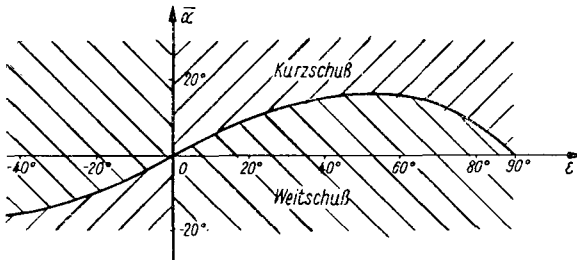


Bild 2.22  
Aufsatzwinkel  $\bar{\alpha}$ , für den starres Schwenken der Flugbahn erlaubt ist, als Funktion des Geländewinkels  $\varepsilon$

Bei Schützenwaffen wird die Abhängigkeit des Aufsatzwinkels vom Geländewinkel meist vernachlässigt; man schwenkt die Flugbahn „starr“. Hierdurch ergeben sich im allgemeinen Schußweitenfehler, da es für jeden Geländewinkel  $\varepsilon$  jeweils nur einen einzigen Aufsatzwinkel  $\alpha_0 = \bar{\alpha}$  gibt, bei dem (im Rahmen der parabolischen Theorie) starres Schwenken erlaubt ist.

<sup>1)</sup> F. F. Lender, sowjetischer Waffenkonstrukteur, veröffentlichte diese Formel 1921 [3]. (Zitiert nach [4].)

Mit  $\alpha = \alpha_0 = \bar{\alpha}$  geht die *Lendersche* Formel in eine Bestimmungsgleichung für  $\bar{\alpha}$  über:

$$\sin(2\bar{\alpha} + \varepsilon) = \sin 2\bar{\alpha} \cos^2 \varepsilon + \sin \varepsilon.$$

Diese Gleichung läßt sich durch geeignete Umformung der Winkelfunktionen nach  $\bar{\alpha}$  auflösen:

$$\tan \bar{\alpha} = (1 - \cos \varepsilon) \cot \varepsilon. \quad (2.119)$$

Die Kurve  $\bar{\alpha} = f(\varepsilon)$  ist in Bild 2.22 wiedergegeben.

## \*2.9.2. Rasanzmaße für Flugbahnen<sup>1)</sup>

### 2.9.2.1. Vorbemerkungen

Die ballistischen Eigenschaften einer Flugbahn werden durch den Verlauf der Bahnelemente charakterisiert. Neben diesen ballistischen Charakteristiken können eine Reihe von taktischen Flugbahnparametern eingeführt werden, die Aussagen darüber treffen, inwieweit ein bestimmter Flugbahntyp zur Lösung einer speziellen (taktischen) Gefechtsaufgabe geeignet ist.

Die Ausführungen des Abschnitts 2.9.2. verfolgen das Ziel, zwei der taktischen Flugbahnparameter, nämlich die *Rasanz*  $R$  und die *Entfernung des direkten Schusses*  $X$ , zu definieren. Ein weiterer taktischer Flugbahnparameter, der *bestrichene Raum*  $B$ , wird in Abschnitt 2.9.3. eingeführt.

Während der Parameter  $R$  eine reine Flugbahneigenschaft ist, stellen die Parameter *Entfernung des direkten Schusses* und *bestrichener Raum* eine Verbindung zwischen der Geometrie der Flugbahn und der Geometrie des Zieles her.

Die auf der Grundlage des parabolischen Bahnmodells gewonnenen Aussagen gelten auch im luftgefüllten Raum in überraschend guter Näherung, wie an Zahlenbeispielen gezeigt wird.

### 2.9.2.2. Die Definition des Rasanzmaßes $R$

Der taktische Wert einer Rohrwaaffe, die im direkten Richten eingesetzt wird, ist (bei sonst konstanten Leistungsdaten) um so größer, je gestreckter („rasanter“) die Flugbahn verläuft.<sup>2)</sup>

Als Maß für die Gestrecktheit einer Flugbahn dient in der Artillerie die Entfernung des direkten Schusses (bezogen auf ein Ziel vorgegebener Höhe  $\hat{a}$ ).

Der taktische Flugbahnparameter *Entfernung des direkten Schusses*  $X$  ist in allen modernen Schußtafeln angeführt, weist jedoch den Nachteil auf, von der Bezugszielhöhe abhängig zu sein. Im folgenden wird deshalb ein Rasanzmaß  $R$  eingeführt, das (unabhängig von der Geometrie des Zieles) eine reine Flugbahneigenschaft ist.

<sup>1)</sup> Dieser Abschnitt ist eine überarbeitete Fassung der Arbeit [5].

<sup>2)</sup> Der Grund für diesen dem Artilleristen geläufigen Sachverhalt wird in den folgenden Abschnitten ersichtlich werden.

Am Beispiel des parabolischen Bahnmodells läßt sich zeigen, daß das Rasanzmaß  $R$  die taktischen Eigenschaften gestreckter Flugbahnen adäquat beschreibt.

Die Zusammenhänge zwischen den taktischen Flugbahnparametern Rasanz  $R$  und Entfernung des direkten Schusses  $X$  werden in Abschnitt 2.9.2.5. behandelt.

Eine Flugbahn wird (im taktischen Sinne) als *rasant* bezeichnet, wenn sie in dem Intervall zwischen Abgangspunkt (Mündung der Waffe)  $O$  und Auftreffpunkt  $E$  (Ziel) gestreckt verläuft. Es ist deshalb sinnvoll, die Rasanz einer Flugbahn (bzw. eines Flugbahnabschnitts) durch das Verhältnis der Schrägentfernung des Zieles vom Abgangspunkt zum maximalen Abstand der Flugbahn von der Visierlinie zu messen. Dieser Quotient ist um so größer, je geringer die Abweichung der Flugbahn von der Visierlinie ist.

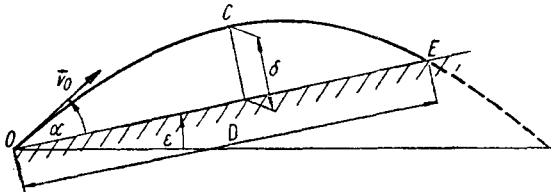


Bild 2.23  
Zur Definition des  
Rasanzmaßes  $R$

Bezeichnet man die Schrägentfernung zum Ziel mit  $D$  und den maximalen Abstand der Flugbahn von der Visierlinie im Intervall  $[0, x_E]$  mit  $\delta$ , so lautet die Definition der Rasanz  $R$ :

$$R := D/\delta, \quad x \in [0, x_E] \quad (2.120)$$

(siehe Bild 2.23). Die Rasanz  $R$  ist ein dimensionsloser Parameter; er nimmt Zahlenwerte zwischen 0 und  $+\infty$  an:

$$0 \leq R \leq +\infty.$$

Wenn Abgangs- und Auftreffpunkt in derselben Horizontalebene liegen, spezialisiert sich die Definitionsgleichung (2.120) zu dem Quotienten  $R_0$  aus Horizontalschußweite  $x_e$  und Flugbahnhöhe (Gipfelordinate)  $y_g$ :

$$R = R_0 = x_e/y_g. \quad (2.121)$$

Die Flugbahnelemente  $x_e$  und  $y_g$  können der jeweiligen Schußtafel oder einem ballistischen Tafelwerk (z. B. [6]) entnommen werden, falls für  $x_e$  und  $y_g$  keine geschlossenen Darstellungen möglich sind.

Bei vorgegebener Schrägentfernung  $D$  ist die Rasanz  $R$  um so größer, je geringer die Überhöhung  $\delta$  der Flugbahn über der Visierlinie ist. Aus der Definitionsgleichung (2.120) und Bild 2.23 ist jedoch andererseits ersichtlich, daß die Rasanz  $R$  keine universelle Flugbahnkonstante darstellt; ihr konkreter Zahlenwert hängt vielmehr wesentlich von der Lage und Länge des herausgegriffenen Flugbahnabschnitts ab.

### 2.9.2.3. Die Rasanz R beim Schießen mit Geländewinkel

Legt man das parabolische Bahnmodell zugrunde, so läßt sich R durch den Aufsatzwinkel  $\alpha$  und den Geländewinkel  $\varepsilon$  darstellen.

Die Gleichungen für die Flugbahnelemente  $x$  und  $y$  im  $t$ -System lauten

$$x = u_0 t, \quad y = w_0 t - \frac{1}{2} g_0 t^2; \quad (2.122)$$

$$u_0 := v_0 \cos \vartheta_0 = v_0 \cos (\alpha + \varepsilon); \quad (2.123)$$

$$w_0 := v_0 \sin \vartheta_0 = v_0 \sin (\alpha + \varepsilon);$$

sie können als Parameterdarstellung der Flugbahnparabel  $y = y(x)$  aufgefaßt werden.

Man erhält die Schrägentfernung  $D$  und die Überhöhung  $\delta$  sehr rasch, wenn man ein rechtwinklig-kartesisches Koordinatensystem  $x', y'$  einführt, das aus dem  $x, y$ -System durch eine Drehung um den Winkel  $\varepsilon$  entsteht (Bild 2.24).

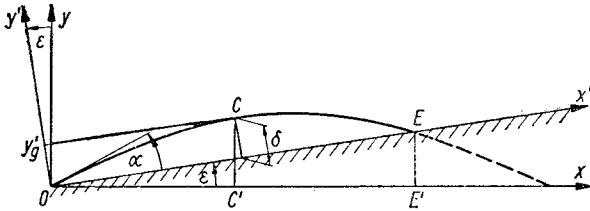


Bild 2.24  
Drehung des Koordinatensystems  $x, y$ - in das  $x', y'$ -System

Wegen Gültigkeit der Transformationsformeln<sup>1)</sup>

$$x' = x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon,$$

$$y' = -x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon$$

geht die Parameterdarstellung (2.122) der Flugbahn über in

$$x' = u_0 t \cos \varepsilon + (w_0 t - \frac{1}{2} g_0 t^2) \sin \varepsilon, \quad (2.124)$$

$$y' = -u_0 t \sin \varepsilon + (w_0 t - \frac{1}{2} g_0 t^2) \cos \varepsilon. \quad (2.125)$$

Die Bedingungsgleichungen für die Schrägentfernung  $D$  und die maximale Überhöhung  $\delta$  lauten (siehe Bild 2.24):

$$y' = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy'/dt}{dx'/dt} = 0.$$

Mit  $y' = 0$  folgt aus (2.125) für die Flugzeit  $t_E$  vom Abgangspunkt 0 bis zum Auftreffpunkt E:

$$t_E = \frac{2w_0 \sin \alpha}{g_0 \cos \varepsilon}. \quad (2.126)$$

<sup>1)</sup> Siehe etwa Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik für Ingenieure und Studenten der Technischen Hochschulen. Leipzig 1958, S.170.



Entsprechend liefert  $dy'/dx' = 0$  die Flugzeit  $t_\delta$  vom Abgangspunkt  $O$  bis zum Punkt  $C$  (siehe Bild 2.24):

$$t_\delta = \frac{v_0}{g_0} \frac{\sin \alpha}{\cos \varepsilon} = \frac{1}{2} t_E \cdot 1) \quad (2.127)$$

Für die Schrägentfernung  $D$  und die Überhöhung  $\delta$  erhält man durch Einsetzen von (2.126) in (2.124) bzw. (2.127) in (2.125):

$$D = x'(t_E) = \frac{2v_0^2}{g_0} \frac{\sin \alpha \cos \vartheta_0}{\cos^2 \varepsilon}, \quad (2.128)$$

$$\delta = y'(t_\delta) = \frac{v_0^2}{2g_0} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \varepsilon}. \quad (2.129)$$

Die Rasananz  $R$  beträgt damit

$$R = \frac{D}{\delta} = \frac{4 \cos(\alpha + \varepsilon)}{\sin \alpha \cos \varepsilon}$$

oder

$$R = 4(\cot \alpha - \tan \varepsilon). \quad (2.130)$$

Der Zahlenwert von  $R$  hängt (beim parabolischen Bahnmodell) nur von dem Aufsatzwinkel  $\alpha$  und dem Geländewinkel  $\varepsilon$  ab (siehe Bild 2.25).

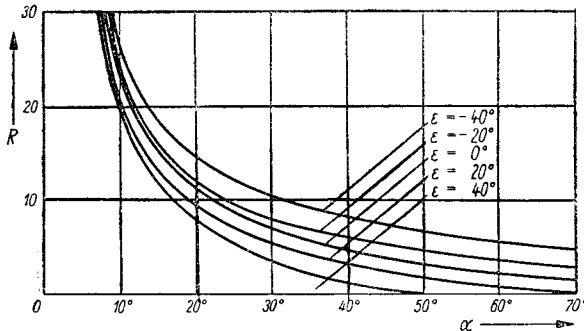


Bild 2.25 Rasananzmaß  $R$  der parabolischen Flugbahnen als Funktion des Aufsatzwinkels  $\alpha$  für  $\varepsilon = 0^\circ, \pm 20^\circ, \pm 40^\circ$

Für  $\varepsilon = 0$  (Schuß im horizontalen Gelände) spezialisiert sich (2.130) zu

$$R = 4 \cot \vartheta_0 \quad (\vartheta_0 = \alpha_0). \quad (2.131)$$

Mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und einem bestimmten Aufsatzwinkel  $\alpha$  werde eine Schrägentfernung  $D_e$  erreicht. Wollte man in der Mündungsebene

1) Wegen  $x \sim t$  ist  $\overline{OC}' = \frac{1}{2} \overline{OE}'$ , was zur Konstruktion des Punktes  $C$  benutzt werden kann.

die gleiche Schußweite  $x_e = D_e$  erzielen, so ist ein anderer Abgangswinkel  $\alpha_0 \neq \alpha$  erforderlich, der sich aus

$$\sin 2\alpha_0 = D_e g_0 / v_0^2$$

errechnet ( $v_0 = \text{const}$ ). Die zugehörige Flugbahn besitzt die Rasanzenz  $R = R_0 = 4 \cot \alpha_0$ . Die Beziehung (2.130) für die Rasanzenz  $R$  kann man damit in der Form schreiben

$$R = R_0 \tan \alpha_0 (\cot \alpha - \tan \varepsilon) = R_0 \tan \alpha_0 \cot \alpha (1 - \tan \alpha \tan \varepsilon). \quad (2.132)$$

Für kleine Aufsatzwinkel ( $\alpha, \alpha_0 \ll 1$ ) gilt auf Grund der *Lenderschen* Formel (2.116),

$$\alpha \approx \alpha_0 \cos \varepsilon \quad (D = \text{const}),$$

so daß sich (2.132) vereinfacht zu

$$R \approx R_0 \frac{\alpha_0}{\alpha} = \frac{R_0}{\cos \varepsilon} = R_0 \sec \varepsilon \quad (D = x_e = \text{const}). \quad (2.133)$$

*Bei konstanter (vorgegebener) Schußweite nimmt die Rasanzenz mit wachsendem Betrag des Geländewinkels  $\varepsilon$  proportional zu  $\sec \varepsilon$  zu.*

Eine von (2.132) abweichende Darstellung für  $R$  ergibt sich, wenn nicht die Schrägentfernung  $D$ , sondern der Aufsatzwinkel  $\alpha$  konstant gehalten wird ( $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$ ). Die Rasanzenz  $R$  der Flugbahn beim Geländewinkel  $\varepsilon = 0$  werde wieder mit  $R_0$  bezeichnet. Dann ist für  $R$  die Darstellung möglich

$$R = R_0 (1 - \tan \alpha_0 \tan \varepsilon) \quad (\alpha = \alpha_0 = \text{const}). \quad (2.134)$$

*Bei konstantem Aufsatzwinkel ( $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$ ) verringert sich die Rasanzenz mit wachsendem Geländewinkel; sie ist bei positivem Geländewinkel ( $\varepsilon > 0$ ) kleiner, bei negativem Geländewinkel ( $\varepsilon < 0$ ) hingegen größer als  $R_0$ .*

Für  $\alpha_0 \ll 1$  vereinfacht sich (2.134) zu

$$R \approx R_0 (1 - \alpha_0 \tan \varepsilon). \quad (2.135)$$

Sind sowohl der Aufsatzwinkel  $\alpha$  wie auch der Geländewinkel  $\varepsilon$  klein, so kann die Rasanzenz  $R$  in erster Näherung als konstant angenommen werden; siehe (2.133) und (2.135).

#### 2.9.2.4. Die Rasanzenz $R$ bei einem in der Mündungsebene liegenden Ziel

Die folgenden Überlegungen beschränken sich auf den Spezialfall, daß das Ziel in der Mündungsebene liegt, da hierbei bereits die wesentlichen Eigenschaften rasanter Flugbahnen erkennbar sind.

Bild 2.26 zeigt den Verlauf der Rasanzenz  $R_0$  als Funktion des Abgangswinkels  $\vartheta_0$  nach der parabolischen Theorie sowie für drei ausgewählte Bahnscharen im luftgefüllten Raum.

Man liest aus Bild 2.26 ab: *Mit wachsendem Abgangswinkel  $\vartheta_0$  nimmt die Rasanzenz  $R_0$  monoton ab ( $v_0 = \text{const}$ ,  $c = \text{const}$ ).<sup>1)</sup>*

<sup>1)</sup> Hinsichtlich der Definition des Ballistischen Koeffizienten  $c$  siehe Abschnitt 3.4.

Da sich mit zunehmendem Abgangswinkel die Schußweite in der unteren Winkelgruppe vergrößert, in der oberen Winkelgruppe jedoch verringert, kann die vorstehende Aussage auch wie folgt formuliert werden: *Mit Vergrößerung der Schußweite  $x_e$  nimmt in der unteren Winkelgruppe die Rasanz ab, in der oberen Winkelgruppe jedoch zu.*

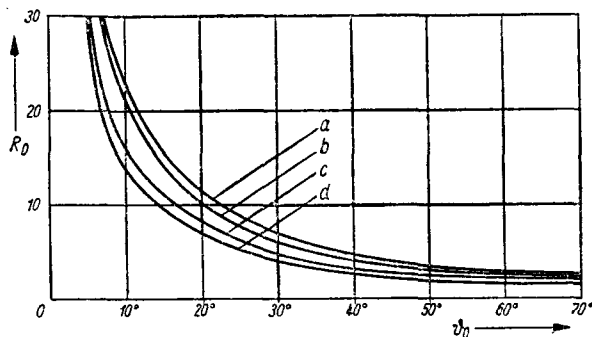


Bild 2.26 Rasanzmaß  $R_0$  als Funktion des Abgangswinkels  $\vartheta_0$

a – parabolische Theorie;

b – klassisches Bahnmodell:  $v_0 = 800 \text{ m/s}$ ;  $c_{43} = 0,1 \text{ m}^2/\text{kg}$ ;

c – klassisches Bahnmodell:  $v_0 = 800 \text{ m/s}$ ;  $c_{43} = 1,0 \text{ m}^2/\text{kg}$ ;

d – klassisches Bahnmodell:  $v_0 = 800 \text{ m/s}$ ;  $c_{43} = 6,0 \text{ m}^2/\text{kg}$

Um die mathematische Beziehung zwischen der Rasanz  $R_0$ ,

$$R_0 = 4 \cot \vartheta_0, \quad (2.135)$$

und der Horizontalschußweite  $x_e$ ,

$$x_e = \frac{v_0^2}{g_0} \sin 2\vartheta_0, \quad (2.137)$$

herzuleiten, ist aus (2.136) und (2.137) der Abgangswinkel  $\vartheta_0$  zu eliminieren. Führt man einen dimensionslosen Parameter  $\varrho$  gemäß

$$\varrho := g_0 x_e / v_0^2 \quad (2.138)$$

ein, so kann (2.137) wie folgt geschrieben werden:

$$\varrho = 2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 = \frac{2 \cot \vartheta_0}{1 + \cot^2 \vartheta_0}.$$

Durch Substitution  $\cot \vartheta_0 = R_0/4$  geht diese Gleichung in eine Beziehung zwischen  $\varrho$  und  $R_0$  über:

$$\varrho [1 + (R_0/4)^2] = R_0/2$$

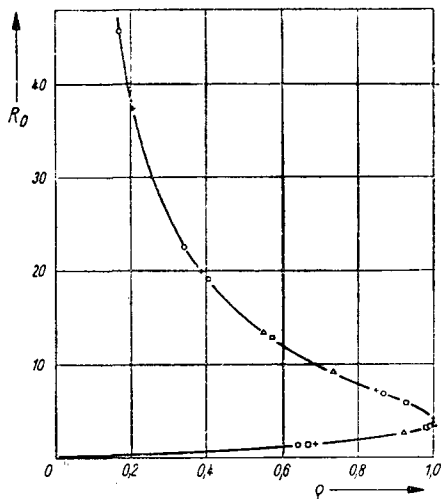
bzw. nach  $R_0$  aufgelöst

$$R_0 = \frac{4}{\varrho} [1 \mp \sqrt{1 - \varrho^2}]. \quad (2.139)$$

Das obere (untere) Vorzeichen gilt für die obere (untere) Winkelgruppe.

Bei der Diskussion der Beziehung (2.139) können zwei Fälle unterschieden werden:

- a) Man verfolgt den Verlauf der Rasanz  $R_0$  bei einer Flugbahnschar, deren Bahnen gleiche Anfangsgeschwindigkeit, jedoch unterschiedliche Abgangswinkel haben ( $v_0 = \text{const}, \vartheta_0: \text{variabel}$ ).
- b) Man untersucht die Rasanz  $R_0$  bei einer vorgegebenen Schußweite und variabler Anfangsgeschwindigkeit ( $x_e = \text{const}, v_0: \text{variabel}$ ).



**Bild 2.27**  
Rasanzmaß  $R_0$  als Funktion des Parameters  $\rho = x_e/x_e^*$

- – parabolische Theorie;
- + – klassisches Bahnmodell:  
 $v_0 = 800 \text{ m/s};$   
 $c_{43} = 0,1 \text{ m}^2/\text{kg};$
- – klassisches Bahnmodell:  
 $v_0 = 800 \text{ m/s};$   
 $c_{43} = 1,0 \text{ m}^2/\text{kg};$
- △ – klassisches Bahnmodell:  
 $v_0 = 800 \text{ m/s};$   
 $c_{43} = 6,0 \text{ m}^2/\text{kg}$

Zu a) Für eine Flugbahnschar mit konstanter Anfangsgeschwindigkeit ist der Parameter  $\rho$  gleich dem Verhältnis von Schußweite  $x_e$  zu maximaler Schußweite  $x_e^*$ :

$$\rho := \frac{g_0 x_e}{v_0^2} = \frac{x_e}{v_0^2/g_0} = \frac{x_e}{x_e^*}. \quad (2.140)$$

Interpretiert man  $\rho$  als Quotienten aus Schußweite und maximaler Schußweite, so ist (2.140) in ausgezeichnete Näherung auf Flugbahnen im luftgefüllten Raum anwendbar (siehe Bild 2.27).

Ein Vergleich der Rasanzkurven in Bild 2.26 und 2.27 zeigt, daß bei der dimensionslosen Darstellung  $R_0 = R_0(\rho)$  die parabolische Theorie eine bessere Näherung liefert, als dies bei Darstellung der Rasanz als Funktion des Abgangswinkels  $\vartheta_0$  der Fall ist. In der unteren Winkelgruppe, die beim Schießen im direkten Richten auf Bodenziele ausschließlich interessiert, werden um so größere Rasanzwerte erhalten, je kleiner die Schußweite  $x_e$  gegenüber der maximal möglichen Schußweite  $x_e^*$  ist. Hieraus ergibt sich eine für die Praxis bedeutungsvolle Konsequenz: Wird zur Lösung einer Gefechtsaufgabe eine hohe Rasanz der Flugbahn gefordert, wie dies etwa bei der Panzerbekämpfung der Fall ist, so kann jeweils nur ein kleiner Bereich der mit der betreffenden Waffe maximal erzielbaren Schußweite taktisch genutzt werden.

Mit Vergrößerung des Entfernungsbereichs  $0 \leq x \leq x'$ , in dem  $R_0 \leq R'_0$  ( $R'_0$ : vorgegeben) gelten soll, muß die maximale Reichweite  $x_c^*$  des Geschosses gesteigert werden, wie man aus (2.139) und (2.140) abliest.

Zu b) Bei vorgegebener Schußentfernung ( $x_e = \text{const}$ ) wird die Rasanz in der unteren Winkelgruppe  $R_{0u}$  mit zunehmender Anfangsgeschwindigkeit rasch größer.

Unter der Voraussetzung  $\varrho \ll 1$ , die beim Schießen im direkten Richten auf Bodenziele praktisch immer erfüllt ist, folgt aus (2.139):

$$R_{0u} \approx \frac{8}{\varrho} \sim v_0^2. \quad (2.141)$$

Die Rasanz  $R_0$  wächst in der unteren Winkelgruppe etwa proportional zum Quadrat der Anfangsgeschwindigkeit.

### 2.9.2.5. Die Entfernung des direkten Schusses

Als Entfernung des direkten Schusses bezeichnet man diejenige Grenzschußweite  $X$ , bis zu der die Flugbahnhöhe  $y_g$  kleiner als eine vorgegebene Zielhöhe  $d$  ist:

$$y_g \leq d \quad (x_e \leq X).$$

In dem Entfernungsbereich  $[0, X]$  kann ein Ziel vorgegebener Höhe  $d$  (beim Schießen im direkten Richten) mit fester Visiereinstellung  $x_e = X$  bekämpft werden (siehe Bild 2.28).

Zwischen der Entfernung des direkten Schusses  $X$ , der Zielhöhe  $d$  und den ballistischen Flugbahnparametern bestehen einige einfache Beziehungen, die im folgenden abgeleitet werden sollen.

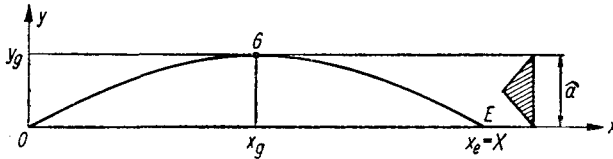


Bild 2.28 Zur Definition der Entfernung des direkten Schusses  $X$

Die Bedingungsgleichung für die Entfernung des direkten Schusses lautet:  $y_g = d$ . Tabelle 2.1 entnimmt man für  $y_g$ :

$$y_g = \frac{v_0^2}{2g_0} \sin^2 \vartheta_0.$$

Der Grenzwinkel  $\vartheta_0 = \vartheta_0$ , der zu der Entfernung des direkten Schusses  $X$  gehört, genügt somit der Gleichung

$$\sin^2 \vartheta_0 = \frac{2dg_0}{v_0^2} =: s.$$

Für die Entfernung des direkten Schusses gilt andererseits

$$X = \frac{v_0^2}{g_0} \sin 2\vartheta_0, \quad (2.142)$$

bzw. mit  $\bar{\varrho} := g_0 X / v_0^2$ :

$$\sin 2\vartheta_0 = \bar{\varrho}. \quad (2.143)$$

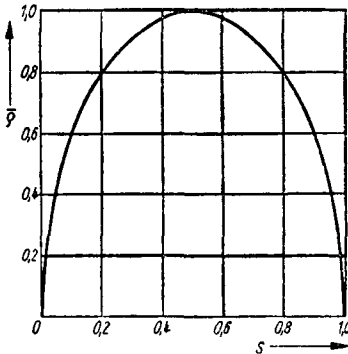
Die Größe  $s$  ist die auf die maximale Steighöhe  $y_g^*$  des Geschosses bezogene relative Zielhöhe, der Parameter  $\bar{\varrho}$  ist der Quotient aus der Entfernung des direkten Schusses  $X$  und der maximalen Schußweite  $x_c^*$ .

Um die Beziehung zwischen  $s$  und  $\bar{\varrho}$  herzuleiten, ist aus den Gleichungen (2.142) und (2.143) der Abgangswinkel  $\vartheta_0$  zu eliminieren:

$$\begin{aligned} \bar{\varrho} &= \sin 2\vartheta_0 = 2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 = 2 \sqrt{\sin^2 \vartheta_0 (1 - \sin^2 \vartheta_0)}, \\ \bar{\varrho} &= 2 \sqrt{s(1-s)}. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Da  $\bar{\varrho}$  und  $s$  dimensionslose Parameter sind, gilt (2.144) für beliebige (parabolische) Flugbahnen.

Der Verlauf der Funktion  $\bar{\varrho} = \bar{\varrho}(s)$  ist in Bild 2.29 veranschaulicht.



*Bild 2.29*  
Relative Entfernung des direkten Schusses  $\bar{\varrho} = X/x_c^*$  als Funktion der relativen Zielhöhe  $s = d/y_g^*$

Bei der Übertragung der Formel (2.144) auf den luftgefüllten Raum macht sich störend bemerkbar, daß die maximale Steighöhe  $y_g^*$  des Geschosses in den Schußtafeln in der Regel nicht angegeben ist. Man kann sich hier mit der für das Vakuum gültigen Beziehung helfen<sup>1)</sup>:

$$y_g^* = \frac{1}{2} x_c^*.$$

Aus (2.144) lassen sich zwei Beziehungen gewinnen, mit deren Hilfe aus einer bekannten Entfernung des direkten Schusses die Entfernungen des direkten Schusses für eine andere Zielhöhe bzw. eine andere Anfangsgeschwindigkeit errechnet werden können.

<sup>1)</sup> Hinsichtlich der exakten Berechnung der maximalen Steighöhe eines Geschosses im luftgefüllten Raum siehe Abschnitt 5.2.2.

Bei einer vorgegebenen Anfangsgeschwindigkeit und einem speziellen Geschöß sei die Entfernung des direkten Schusses  $X = X_1$  für die Zielhöhe  $\hat{a} = a_1$  bekannt. Gesucht ist die Entfernung des direkten Schusses  $X = X_2$  für die neue Zielhöhe  $\hat{a} = a_2$ .

Mit  $\bar{e}_1 = X_1/x_c^*$ ,  $s_1 = \hat{a}_1/y_g^*$ ;  $\bar{e}_2 = X_2/x_c^*$ ,  $s_2 = \hat{a}_2/y_g^*$

folgt aus (2.144):

$$\frac{\bar{e}_2}{\bar{e}_1} = \sqrt{\frac{s_2(1-s_2)}{s_1(1-s_1)}} \quad (2.145)$$

bzw. unter Beachtung der Definitionsgleichungen für  $\bar{e}$  und  $s$ :

$$X_2 = X_1 \sqrt{\frac{\hat{a}_2}{\hat{a}_1}} \sqrt{\frac{1-s_2}{1-s_1}} \quad (v_{01} = v_{02} = v_0). \quad (2.146)$$

Die in der Praxis interessierenden Zielhöhen  $\hat{a}_i$  sind klein gegenüber der halben Maximalschußweite ( $\hat{a}_i \ll x_c^*/2$ ). Unter dieser Voraussetzung gilt

$$s_i = \frac{\hat{a}_i}{y_g^*} = \frac{2\hat{a}_i}{x_c^*} \ll 1,$$

so daß man (2.146) vereinfachen kann zu

$$X_2 = X_1 \sqrt{\hat{a}_2/\hat{a}_1} \quad (v_{01} = v_{02} = v_0). \quad (2.147)$$

*Bei einer vorgegebenen Flugbahn verhalten sich die Entfernungen des direkten Schusses wie die Quadratwurzeln aus den Zielhöhen.*

Diese Aussage gilt auch im luftgefüllten Raum in guter Näherung, wie das im folgenden Abschnitt wiedergegebene Beispiel zeigt.

*Bei konstanter Zielhöhe ( $\hat{a}_1 = \hat{a}_2 = \hat{a}$ ) sind die Entfernungen des direkten Schusses proportional zur Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses.*

Diese Behauptung kann leicht bewiesen werden. Unter den Voraussetzungen  $s_1, s_2 \ll 1$ ,  $\hat{a}_1 = \hat{a}_2 = \hat{a}$  erhält man aus (2.145):

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{x_{e2}^*}{x_{e1}^*} \sqrt{\frac{y_{g1}^*}{y_{g2}^*}} = \frac{v_{02}}{v_{01}},$$

$$X_2 = X_1 \frac{v_{02}}{v_{01}} \quad (\hat{a}_1 = \hat{a}_2 = \hat{a}), \quad (2.148)$$

was zu zeigen war.

Da  $X_1/\hat{a} = R_{01}$ ,  $X_2/\hat{a} = R_{02}$  ist, folgert man aus (2.148):

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{R_{02}}{R_{01}}, \quad \frac{R_{02}}{R_{01}} = \frac{v_{02}}{v_{01}} \quad (\hat{a}_1 = \hat{a}_2 = \hat{a}). \quad (2.149)$$

*Bei vorgegebener (konstanter) Zielhöhe  $\hat{a}$  verhalten sich die Entfernungen des direkten Schusses wie die Rasanzwerte der Flugbahnen.*

Diese Aussage darf als Bestätigung dafür gewertet werden, daß das Rasanzmaß  $R$  zweckentsprechend definiert worden ist: *Eine große Rasanz  $R$  hat eine große Entfernung des direkten Schusses  $X$  zur Folge.*

Ferner gilt: *Bei Entfernungen des direkten Schusses, die zu ein und derselben Zielhöhe  $\hat{a}$  gehören, verhalten sich die Rasanzwerte der entsprechenden Flugbahnen wie die Anfangsgeschwindigkeiten.*

### 2.9.2.6. Ein Zahlenbeispiel zur Transformation der Entfernung des direkten Schusses

Aus der Schußtafel eines Artilleriegeschosses ( $v_0 = 515 \text{ m/s}$ ) entnimmt man für die Zielhöhe  $a_1 = 2 \text{ m}$  als Entfernung des direkten Schusses  $X_1 = 630 \text{ m}$ . Gemäß (2.147) sollte die Entfernung des direkten Schusses  $X_2$  für ein Ziel der Höhe  $a_2 = 3 \text{ m}$  dann betragen

$$X_2 = 630 \sqrt{1,5} \text{ m} = 772 \text{ m}.$$

Die Schußtafel gibt  $X_{2S} = 760 \text{ m}$  an.

Die Übereinstimmung zwischen  $X_2$  und  $X_{2S}$  ist für die Belange des praktischen Schießens völlig ausreichend.

Verringert man die Anfangsgeschwindigkeit von  $v_0 = 515 \text{ m/s}$  auf  $v_0 = 458 \text{ m/s}$ , so erwartet man gemäß (2.148) für die Zielhöhe  $a = 2 \text{ m}$  als Entfernung des direkten Schusses

$$X_2 = 630 \cdot \frac{458}{515} \text{ m} = 560 \text{ m}.$$

Laut Schußtafel ist  $X_{2S} = 550 \text{ m}$ .

Die Übereinstimmung zwischen  $X_2$  und  $X_{2S}$  ist auch in diesem Fall überraschend gut.

### \*2.9.3. Der bestrichene Raum

Ist die Zielhöhe  $a$  kleiner als die Gipfelhöhe  $y_g$  der Flugbahn ( $a < y_g$ ), dann kann das Ziel – bei fester Visiereinstellung  $x_e = \tilde{x}$  – nur in einem Teilbereich  $B$  des Entfernungintervalls  $[0, \tilde{x}]$  bekämpft werden (Bild 2.30). Dieser Bereich  $B$  heißt *bestrichener Raum*. Seine Größe hängt sowohl von den Flugbahnparametern wie auch von der Höhe  $a$  des Zieles ab.

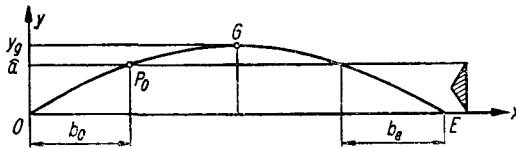


Bild 2.30  
Zur Definition des bestrichenen Raumes  $B$  ( $B = b_0 + b_e$ )

Sieht man die Flugbahn als Parabel an, dann sind die Teilbereiche  $b_0$  und  $b_e$ , aus denen sich der Entfernungsbereich  $B$  zusammensetzt, aus Symmetriegründen gleich groß:

$$B = b_0 + b_e = 2b_0 = 2b_e.$$

Es genügt somit, die Tiefe eines dieser Bereiche explizit zu berechnen.

Setzt man in der Gleichung für die Flugbahnparabel (2.22) die Koordinaten  $(b_0, a)$  des Flugbahnpunkts  $P_0$  (Bild 2.30) ein, so entsteht eine quadratische Gleichung für  $b_0$ :

$$a = b_0 \tan \vartheta_0 - \frac{g_0 b_0^2}{2 u_0^2}. \quad (2.150)$$



Division dieser Gleichung durch die Gipfelhöhe  $y_g$  liefert

$$\begin{aligned} \frac{d}{y_g} &= \frac{b_0 \tan \vartheta_0}{y_g} \left( 1 - \frac{g_0 b_0}{2 u_0^2 \tan \vartheta_0} \right) \\ &= \frac{2 b_0 g_0}{v_0^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0} \left( 1 - \frac{g_0 b_0}{2 v_0^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0} \right), \\ \frac{d}{y_g} &= \frac{4 b_0}{x_e} \left( 1 - \frac{b_0}{x_e} \right). \end{aligned} \quad (2.151)$$

Es erweist sich als zweckmäßig, die relative Zielhöhe und die relative Ausdehnung des bestrichenen Raumes als neue Parameter  $k$  bzw.  $\bar{s}$  einzuführen,

$$k := \frac{d}{y_g}, \quad \bar{s} := \frac{B}{x_e} = \frac{2 b_0}{x_e}.$$

Die Beziehung (2.151) geht damit in eine quadratische Gleichung für  $\bar{s}$  über:

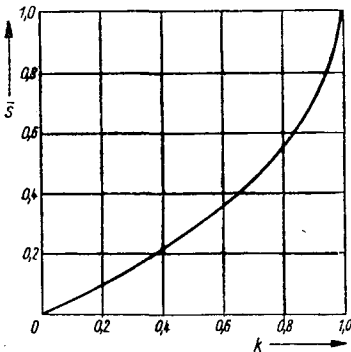
$$k = 2 \bar{s} \left( 1 - \frac{1}{2} \bar{s} \right).$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$\bar{s} = 1 \pm \sqrt{1 - k}.$$

Da für  $k < 1$  ( $d < y_g$ ) der relative bestrichene Bereich  $\bar{s} < 1$  sein muß, gilt in der vorstehenden Gleichung das untere Vorzeichen:

$$\bar{s} = 1 - \sqrt{1 - k}. \quad (2.152)$$



*Bild 2.31*  
*Relativer bestrichener Bereich  $\bar{s} = B/x_e$  als*  
*Funktion der relativen Zielhöhe  $k = d/y_g$*

Bild 2.31 veranschaulicht den Verlauf des relativen bestrichenen Bereichs  $\bar{s} = B/x_e$  als Funktion der relativen Zielhöhe  $k = d/y_g$ .

Gleichung (2.152) läßt sich auch in der Form schreiben

$$B = x_e (1 - \sqrt{1 - k}). \quad (2.153)$$

Für  $k = 1$  ( $\hat{a} = y_g$ ) ist B mit der Entfernung des direkten Schusses X identisch ( $k \rightarrow 1$ ; B  $\rightarrow$  X).

Bei Steilbahnen der Erdartillerie interessiert ausschließlich der zielnahe Anteil  $b_e$  des bestrichenen Raumes. Außerdem ist bei Bahnen dieses Typs  $k \ll 1$  ( $\hat{a} \ll y_g$ ).

Unter der Voraussetzung  $k \ll 1$  kann die Wurzel in (2.153) in guter Näherung durch die ersten beiden Glieder ihrer Reihendarstellung ersetzt werden:

$$b_e \approx \frac{1}{2} x_e [1 - (1 - \frac{1}{2} k - \frac{1}{8} k^2)] = \frac{1}{4} x_e k (1 + \frac{1}{4} k).$$

Mit Hilfe der Definitionsgleichung für  $k$  sowie der Formeln für  $x_e$  und  $y_e$  folgt hieraus

$$b_e \approx \hat{a} \cot \vartheta_0 [1 + (\hat{a}/x_e) \cot \vartheta_0].$$

Im luftleeren Raum ist der (positive) Auftreffwinkel  $\omega_e = -\vartheta_e$  gleich dem Abgangswinkel  $\vartheta_0$ , so daß  $\cot \vartheta_0$  durch  $\cot \omega_e$  ersetzt werden kann:

$$b_e \approx \hat{a} \cot \omega_e [1 + (\hat{a}/x_e) \cot \omega_e]. \quad (2.154)$$

Die Übertragung dieser Formel auf den luftgefüllten Raum erfolgt in der Weise, daß man für  $\omega_e$  den Auftreffwinkel  $\omega_{es}$  aus der Schußtafel einsetzt.

Im luftgefüllten Raum erhält man Auftreffwinkel  $\vartheta_e$  mit  $|\vartheta_e| > \vartheta_0$ .<sup>1)</sup> Die Flugbahn-  
parabel, die die gleiche Schußweite und den gleichen Auftreffwinkel wie die Flugbahn  
im luftgefüllten Raum hat, verläuft somit oberhalb der Schußtafel-Flugbahn; sie  
ist in der Nähe des Auftreffpunkts schwächer gekrümmt als die Flugbahn im luft-  
gefüllten Raum.

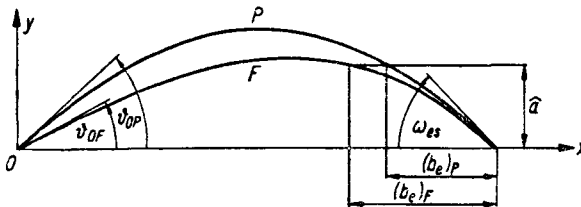


Bild 2.32 Zur Definition des Korrekturfaktors  $\zeta$   
(P – Parabel; F – Flugbahn im luftgefüllten Raum)

Da zur Herleitung von (2.154) die Flugbahn als Parabel angenommen worden ist, erhält man bei der Anwendung von (2.154) auf Flugbahnen im luftgefüllten Raum einen zu kleinen bestrichenen Bereich (Bild 2.32). Man korrigiert diese Abweichung durch Einfügen eines Faktors  $\zeta > 1$ :

$$b_e = \hat{a} \cot \omega_{es} [1 + \zeta (\hat{a}/x_e) \cot \omega_{es}]. \quad (2.155)$$

Erfahrungsgemäß liegt  $\zeta$  in der Größenordnung  $\zeta \approx 4/3$ .

<sup>1)</sup> Siehe hierzu Abschnitt 4.3.2.

## \*2.9.4. Die Verkantungsfehler

### 2.9.4.1. Vorbemerkungen

Ein Fehler, der beim Schießen im direkten Richten relativ häufig auftritt, ist das Verkanten der Waffe. Man versteht hierunter die (ungewollte) Drehung der Waffe um eine Verkantungsachse. Der Einfachheit halber soll im folgenden angenommen werden, daß die Verkantungsachse mit der Visierlinie identisch ist.

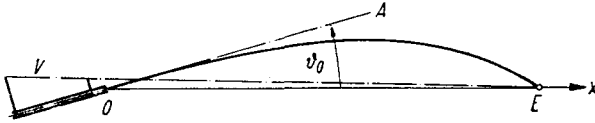


Bild 2.33 Lage von Abgangslinie  $\overline{OA}$  und Visierlinie  $\overline{VE}$  beim Schuß ohne Verkanten ( $\overline{OE}$  – Horizontalebene)

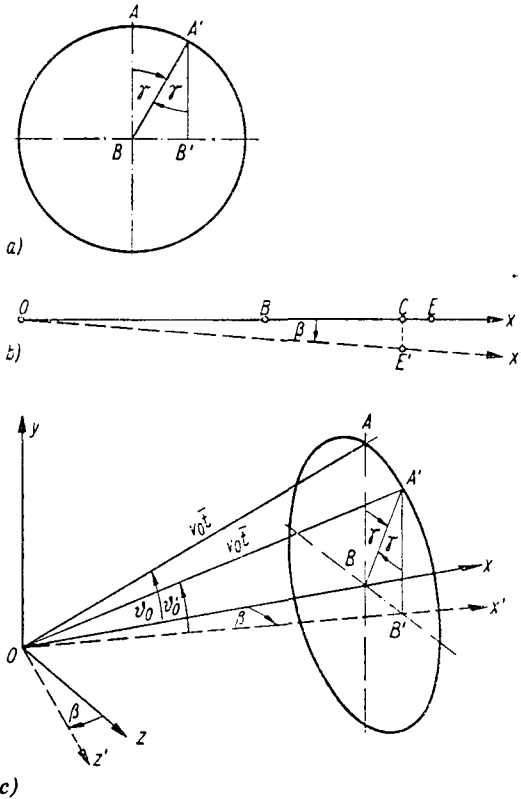


Bild 2.34  
Relative Lage von Visierlinie  $\overline{OA}$  und Abgangslinie  $\overline{OA'}$  beim rechtsverkanteten Schuß (Verkantungswinkel  $\gamma$ ; die Visierlinie liegt in der Horizontalebene)  
a – Blick in Schußrichtung;  
b – Draufsicht; c – Seitenansicht (perspektivisch)

Die Waffe sei mit Hilfe des daran angebrachten Visiers auf ein Ziel gerichtet, das sich in dem Punkt  $E$  der Mündungsebene befindet. Die Seelenachse der Waffe bildet dann mit der Visierlinie den Erhöhungswinkel  $\varphi$ , der bei dem Abgangsfehlerwinkel  $\delta = 0$  mit dem schußtafelmäßigen Erhöhungswinkel  $\vartheta_0$  übereinstimmt (Bild 2.33).

Um das im Punkt  $E$  befindliche Ziel zu treffen, reicht es allein noch nicht aus, daß die Abgangs- und Visierlinie den Winkel  $\vartheta_0$  einschließen. Es muß darüber hinaus gefordert werden, daß die Visierlinie in der Abgangsebene liegt, die von dem Vektor der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und dem Vektor der Fallbeschleunigung  $g_0$  aufgespannt wird. (Seelenachse, Visierlinie und Vektor der Fallbeschleunigung müssen komplanar sein.)

Wird die Waffe um die Visierlinie als Drehachse gedreht (verkantet), so weist die Abgangslinie aus der Zeichenebene von Bild 2.33 heraus. Hierdurch ergibt sich ein effektiver Abgangswinkel  $\vartheta'_0$ , der kleiner als der schußtafelmäßige Abgangswinkel  $\vartheta_0$  ist ( $\vartheta'_0 < \vartheta_0$ ) und eine Schußweitenverkürzung zur Folge hat. Außerdem entsteht eine seitliche Abweichung der Flugbahn aus der Zielebene  $OAB$  (Bild 2.34).

Die das Dreieck  $OA'B'$  enthaltende Ebene ist die *Abgangsebene* des Geschosses; sie bildet mit der *Zielebene* den Seitenwinkel  $\beta$ .

Gegenstand der folgenden Ableitungen ist es, den Schußweitenfehler  $\delta x_e$  und die Seitenabweichung  $z_e$  des Auftreffpunkts in der Mündungsebene zu berechnen, die bei Verkantung der Waffe um einen gewissen Winkel  $\gamma$  entstehen.

Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt in zwei Schritten: Im ersten Schritt werden einige Beziehungen abgeleitet, die unabhängig von dem zugrunde liegenden Bahnmodell sind. Diese universellen Beziehungen werden im zweiten Schritt für die parabolische Theorie spezialisiert.

#### 2.9.4.2. Die universellen geometrischen Beziehungen

Der effektive Abgangswinkel  $\vartheta'_0$  und der Seitenwinkel  $\beta$  (Bild 2.34) können in einfacher Weise durch den schußtafelmäßigen Abgangswinkel  $\vartheta_0$  und den vorgegebenen Verkantungswinkel  $\gamma$  dargestellt werden. Man liest aus Bild 2.34c ab

$$\sin \vartheta'_0 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{A'B} \cdot \cos \gamma}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \cdot \cos \gamma,$$

$$\sin \vartheta'_0 = \sin \vartheta_0 \cos \gamma. \quad (2.156)$$

Für  $\tan \beta$  ergibt sich entsprechend

$$\tan \beta = \frac{\overline{BB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B} \cdot \sin \gamma}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} \cdot \sin \gamma,$$

$$\tan \beta = \tan \vartheta_0 \sin \gamma. \quad (2.157)$$

Die Formeln (2.156) und (2.157) ermöglichen die Berechnung der gesuchten Winkel  $\vartheta'_0$  und  $\beta$ .

Mit  $\overline{OE} = : x_e$ ,  $\overline{OE'} = : x'_e$ ,  $\overline{OC} = : x_1$  und  $\overline{CE'} = : z_e$  entnimmt man Bild 2.34b:

$$x_1 = x'_e \cos \beta.$$

Für den relativen Schußweitenfehler infolge Verkantens besteht somit die Beziehung

$$\frac{\delta x_e}{x_e} = \frac{x_1 - x_e}{x_e} = \frac{x'_e}{x_e} \cos \beta - 1. \quad (2.158)$$

Entsprechend erhält man für die Seitenabweichung

$$z_e = x'_e \sin \beta = \frac{x'_e}{x_e} \cdot x_e \sin \beta. \quad (2.159)$$

Die Schußweite  $x_e$  in der Mündungsebene ist (im Rahmen der parabolischen Theorie) eine Funktion von  $v_0$  und  $\vartheta_0$ ;  $x_e = f(v_0, \vartheta_0)$ . Entsprechend gilt  $x'_e = f(v_0, \vartheta'_0)$ . Um den Schußweitenfehler  $\delta x_e$  und die Seitenabweichung  $z_e$  numerisch berechnen zu können, muß somit die funktionelle Abhängigkeit der Horizontalschußweite  $x_e$  vom Abgangswinkel  $\vartheta_0$  bekannt sein, die sich durch Integration der Bewegungsgleichungen des betreffenden Bahnmodells ergibt.

### 2.9.4.3. Die Treffpunktabweichung nach der parabolischen Theorie

Bei Gültigkeit des parabolischen Bahnmodells läßt sich die Treffpunktsverlagerung in der Mündungsebene formelmäßig berechnen.

Der Quotient  $x'_e/x_e$ , der in (2.158) und (2.159) auftritt, kann wie folgt durch Winkelgrößen ausgedrückt werden:

$$\frac{x'_e}{x_e} = \frac{\sin 2 \vartheta'_0}{\sin 2 \vartheta_0} = \frac{\sin \vartheta'_0 \cos \vartheta'_0}{\sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0},$$

und mit (2.156):

$$\frac{x'_e}{x_e} = \frac{\cos \vartheta'_0}{\cos \vartheta_0} \cdot \cos \gamma.$$

Unter Zuhilfenahme der Geometrie von Bild 2.34c findet man

$$\frac{\cos \vartheta'_0}{\cos \vartheta_0} = \frac{\overline{OB'} \overline{OA'}}{\overline{OB} \overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{1}{\overline{OB} \overline{OB'}} = \frac{1}{\cos \beta}.$$

Für  $x'_e/x_e$  folgt:

$$\frac{x'_e}{x_e} = \frac{\cos \gamma}{\cos \beta}. \quad (2.160)$$

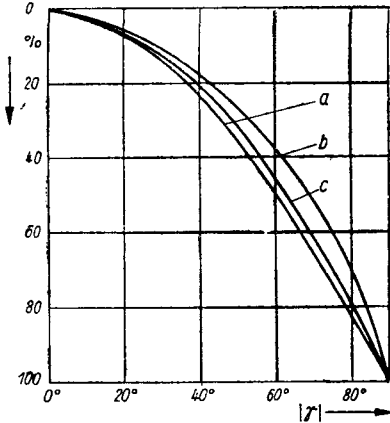
Für den relativen Schußweitenfehler infolge Verkantens erhält man somit die Formel

$$\delta x_e/x_e = \cos \gamma - 1 \leq 0. \quad (2.161)$$

Die Flugzeit  $t_e$  erfährt beim Verkanten der Waffe den gleichen relativen Fehler wie die Schußweite:

$$\begin{aligned} \frac{\delta t_e}{t_e} &= \frac{t'_e - t_e}{t_e} = \frac{t'_e}{t_e} - 1 = \frac{\sin \vartheta'_0}{\sin \vartheta_0} - 1, \\ \frac{\delta t_e}{t_e} &= \cos \gamma - 1. \end{aligned} \quad (2.162)$$

Der Verlauf des Schußweitenfehlers (2.161) ist in Bild 2.35 wiedergegeben. Unabhängig vom Vorzeichen des Verkantungswinkels  $\gamma$  ergibt sich eine Schußweitenverkürzung ( $\delta x_e/x_e \leq 0$ ). Zum Vergleich sind der relative Schußweitenfehler und der relative Flugzeitfehler infolge Verkantens für eine spezielle Flugbahn im luftgefüllten Raum<sup>1)</sup> mit eingezeichnet. Die Übereinstimmung der drei Kurven ist bei kleinen Verkantungswinkeln für praktische Belange recht gut.



**Bild 2.35**  
 Relativer Schußweitenfehler  $\delta x_e/x_e$  und relativer Flugzeitfehler  $\delta t_e/t_e$  als Funktion des Verkantungswinkels  $\gamma$   
 a – parabolische Theorie:  $|\delta x_e/x_e|$  und  $|\delta t_e/t_e|$  (für  $v_0 = 800$  m/s;  $\vartheta_0 = 30^\circ$ );  
 b – klassisches Bahnmodell:  $|\delta x_e/x_e|$  (für  $v_0 = 800$  m/s;  $\vartheta_0 = 30^\circ$ ;  $c_{43} = 0,34$  m<sup>2</sup>/kg);  
 c – klassisches Bahnmodell:  $|\delta t_e/t_e|$  (für die Flugbahnparameter gemäß b)

Ist der Verkantungswinkel klein, so kann  $\cos \gamma$  durch die ersten beiden Glieder seiner Reihenentwicklung ersetzt werden. Man gelangt hierbei zu der Näherungsformel

$$\frac{\delta x_e}{x_e} = \frac{\delta t_e}{t_e} \approx -\frac{\gamma^2}{2}. \quad (2.163)$$

Für die Seitenabweichung  $z_e$  folgt auf Grund von (2.157), (2.159) und (2.160):

$$\begin{aligned} z_e &= x_e \tan \beta \cos \gamma = x_e \tan \vartheta_0 \sin \gamma \cos \gamma, \\ z_e &= \frac{1}{2} x_e \tan \vartheta_0 \sin 2\gamma. \end{aligned} \quad (2.164)$$

Unter Beachtung von

$$x_e \tan \vartheta_0 = \frac{v_0^2}{g_0} \sin 2\vartheta_0 \cdot \tan \vartheta_0 = \frac{2 v_0^2}{g_0} \sin^2 \vartheta_0 = 4 y_g$$

kann (2.164) auch in der Form geschrieben werden:

$$z_e = 2 y_g \sin 2\gamma = \frac{2 x_e}{R_0} \sin 2\gamma \sim \frac{1}{R_0}. \quad (2.165)$$

<sup>1)</sup> Die Vergleichsbahn hat die Bahnparameter  $c_{43} = 0,34$  m<sup>2</sup>/kg,  $v_0 = 800$  m/s;  $\vartheta_0 = 30^\circ$ .

Für den Tangens des Seitenwinkels  $\beta$  gilt auf Grund von (2.157) und (2.136):

$$\tan \beta = \tan \vartheta_0 \sin \gamma = \frac{4 \sin \gamma}{R_0} \quad (2.166)$$

Bild 2.36 zeigt den Verlauf von  $|\beta|$  als Funktion von  $|\gamma|$  und  $\vartheta_0$ .

Bei einem vorgegebenen Verkantungswinkel ist die Seitenabweichung  $z_e$  um so geringer, je größer die Rasananz der Flugbahn wird ( $x_e: \text{const}$ ).

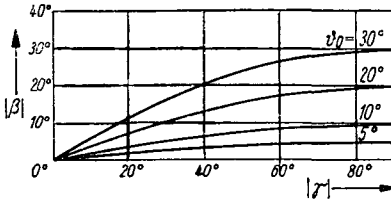


Bild 2.36  
Seitenwinkel  $|\beta|$  als Funktion des Verkantungswinkels  $|\gamma|$  für  $\vartheta_0 = 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$  (parabolische Theorie;  $v_0 = 800 \text{ m/s}$ )

Wird gegen ein Ziel geschossen, das sich in der Entfernung  $x_e$  von der Mündung der Waffe befindet und eine merkliche vertikale Ausdehnung besitzt, so ist der Schußweitenfehler  $\delta x_e$  einem Höhenfehler  $\delta y_e$  äquivalent (Bild 2.37):

$$\delta y_e = \delta x_e \tan \vartheta_e \quad \omega_e \quad (2.167)$$

Nach Einführung der Rasananz  $R_0$  in (2.167) erhält man hieraus unter Beachtung von (2.161) für die Höhenabweichung des Treffpunkts infolge Verkantens

$$\delta y_e = \frac{4 x_e (\cos \gamma - 1)}{R_0} \sim \frac{1}{R_0};$$

für die Seitenabweichung  $z_e$  gilt wieder (2.165).

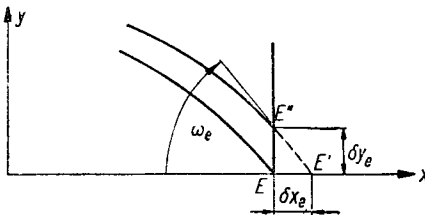


Bild 2.37  
Der Höhenfehler  $\delta y_e$  infolge Verkantens beim Schuß auf ein vertikales Ziel

Beim Schießen gegen ein vertikales Ziel sind die Fehler der Treffpunktslage infolge Verkantens der Waffe (bei vorgegebener Schußentfernung  $x_e$  und konstantem Verkantungswinkel  $\gamma$ ) somit um so geringer, je größer die Rasananz der Flugbahn ist. Hierin besteht ein wesentlicher Vorzug rasanter Flugbahnen gegenüber stark gekrümmten Bahnen.

## Kontrollfragen zu Kapitel 2

- 2.1. Auf welchen Grundannahmen beruht das Bahnmodell der parabolischen Theorie?
- 2.2. Welcher physikalische Sachverhalt spiegelt sich in dem Fehlen einer Kopplung zwischen den ballistischen Bewegungsdifferentialgleichungen wider?
- 2.3. Wie sind Gipfelpunkt und Auftreffpunkt einer Flugbahn definiert?
- 2.4. Was verstehen Sie unter dem Begriff *optimaler Abgangswinkel*? Wie kann er grafisch ermittelt werden?
- 2.5. Wodurch ist die Grenze zwischen der unteren und oberen Winkelgruppe erklärt?
- 2.6. Welche Symmetrieeigenschaften besitzen die nach dem parabolischen Bahnmodell berechneten Bahnelemente?
- 2.7. Wie ist beim Schießen mit Handfeuerwaffen der Aufsatzwinkel (bzw. die Entfernungseinstellung am Visier) zu korrigieren, wenn das Ziel vom Abgangspunkt aus unter einem Geländewinkel  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon < 0$ ) erscheint?
- 2.8. Erläutern Sie die Begriffe *Vergleichsvariable* und *Störungskoeffizient*!
- 2.9. Welche Angaben sind erforderlich, um einen Störungskoeffizienten eindeutig zu bestimmen?
- 2.10. Was verstehen Sie unter einem *ballistischen Mittelwert*?
- 2.11. Wie ist die Rasanaz einer Flugbahn definiert? Welche Bedeutung besitzt eine hohe Rasanaz für das praktische Schießen?
- 2.12. Welchen Einfluß hat ein Geländewinkel  $\varepsilon \gtrsim 0$  auf die Rasanaz?
- 2.13. Erläutern Sie die taktische Bedeutung des Parameters *Entfernung des direkten Schusses*!
- 2.14. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Rasanaz einer Flugbahn, der Entfernung des direkten Schusses und dem bestrichenen Raum?
- 2.15. Welchen Einfluß hat die Verkantung einer Waffe auf die Treffpunktlage? Wodurch kann der Einfluß des Verkantungsfehlers (bei vorgegebenem Verkantungswinkel  $\gamma$ ) verringert werden?

## Übungsaufgaben zu Kapitel 2

- 2.1. Man ermittle die Isochronen der Flugbahnschar mit konstanter Anfangsgeschwindigkeit ( $v_0 = \text{const}$ )! (Als Isochrone einer Flugbahnschar bezeichnet man den geometrischen Ort aller Punkte, die vom Abgangspunkt aus in der gleichen Zeit  $t = \bar{t}$ ,  $0 \leq \bar{t} \leq t_e$  erreicht werden.)
- 2.2. Man beweise die Formeln für den optimalen Abgangswinkel beim Bombenwurf  $\vartheta_0^*$  (2.91) und die maximale Bombenwurfweite  $x_E^*$  (2.92)!
- 2.3. Ziele, deren Schrägentfernung  $D$  kleiner als die maximale Schrägschußweite  $D^*$  ist, können durch zwei Flugbahnen erreicht werden, von denen die eine Flugbahn der unteren und die andere der oberen Winkelgruppe angehört. In welchem Verhältnis stehen die zur gleichen Abszisse  $x$  gehörigen Bahnelemente beider Bahnen?
- 2.4. Man vergleiche die Bahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt, die sich beim Schuß im geneigten Gelände für den Geländewinkel  $\varepsilon = +\varepsilon_1 > 0$  ergeben, mit den entsprechenden Bahnelementen, die zu dem Geländewinkel  $\varepsilon = -\varepsilon_1 < 0$  gehören!
- 2.5. Aus den Formeln für die Bahnelemente  $D$ ,  $t_E$ ,  $v_E$ ,  $\omega_E$  beim Schießen im Gelände leite man Näherungsformeln für kleine Aufsatzwinkel ( $\alpha, \alpha_0 \ll 1$ ) her.



- \*2.6. Man berechne die Bahnelemente im Auftreffpunkt für den in Bild 2.11 dargestellten Fall des Schusses im geneigten Gelände! Welche Sonderfälle sind in den abgeleiteten Formeln enthalten?
- 2.7. Man beweise die Formeln (2.66) und (2.119)!
- \*2.8. Man erweitere die Definition für die Entfernung des direkten Schusses  $X$  auf Flugbahnen im geneigten Gelände (Entfernung des direkten Schusses  $D$ ) und stelle  $D$  als Funktion der Bahnelemente  $\alpha, \varepsilon, v_0$  (bzw.  $\alpha, \varepsilon, D^*$ ) sowie der Zielhöhe  $d$  dar!
- 2.9. Wie lautet die Fehlertransportmatrix  $\Psi^x(t_e|\hat{\mu})$  für Störungen der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und des Abgangswinkels  $\vartheta_0$ , bezogen auf die Vergleichsvariable  $x$ , im Auftreffpunkt in der Mündungsebene ( $t = t_e$ )?
- 2.10. Berechnen Sie die Änderungen der Bahnelemente im Auftreffpunkt  $E$  im geneigten Gelände bei Änderung des Geländewinkels um  $\delta\varepsilon$ !  
 Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:  
 a) Bei der Änderung von  $\varepsilon$  wird der Aufsatzwinkel  $\alpha$  beibehalten.  
 b) Trotz Änderung von  $\varepsilon$  soll die gleiche Schrägschußweite erreicht werden.
- 2.11. a) Man berechne auf der Grundlage der in Abschnitt 2.8.4.2. angegebenen Theorie das Verhältnis der Gewichtsfaktoren der untersten und obersten Schicht  $q_1/q_m$  für  $m = 1, 5, 10$ !  
 b) Welchem Grenzwert strebt  $q_1/q_m$  für  $m \rightarrow \infty$  zu?
- 2.12. Das Höhenintervall  $[0, y_g]$  werde in  $m$  Schichten konstanten Gewichts ( $q_i = \text{const}$ ) unterteilt. Man berechne die Schichtgrenzen  $y_i$  ( $i = 1, \dots, m; y_m = y_g$ ).

### 3. Der Luftwiderstand eines Geschosses

#### 3.1. Übersicht

Ein Geschöß erfährt bei seiner Bewegung durch die Luft einen Widerstand. Richtung und Betrag der an dem Geschöß angreifenden aerodynamischen Kräfte hängen ab von der geometrischen Form und der Oberflächenbeschaffenheit des Geschosses, seiner Relativgeschwindigkeit (und -beschleunigung) gegenüber der ungestörten Luft in der Umgebung des Geschosses, der räumlichen Orientierung der Geschößachse zur Richtung des Bahngeschwindigkeitsvektors und – in starkem Maße – von den Eigenschaften und dem physikalischen Zustand der Atmosphäre.

Das parabolische Bahnmodell, das in dem vorangegangenen Kapitel behandelt worden ist, beruht auf der Annahme, daß an dem Geschöß als einzige Kraft die Schwerkraft angreift. Der Luftwiderstand, der bei allen Schüssen im erdnahen Raum die Geschößbewegung (mehr oder weniger stark) beeinflußt, war unberücksichtigt geblieben.

Das Ziel dieses Kapitels besteht darin, die in der Ballistik gebräuchlichen mathematischen Ansätze zur Beschreibung der Luftwiderstandskraft zu begründen und die Abhängigkeit des Luftwiderstands von den Parametern des Geschosses und der Atmosphäre zu erörtern. Die Ausführungen dieses Kapitels bereiten die Formulierung des sogenannten *Klassischen Bahnmodells der Äußeren Ballistik* vor, das sowohl die Schwerkraft wie den Luftwiderstand einbezieht.<sup>1)</sup>

Die Berücksichtigung des Luftwiderstands ist bei den heute üblichen Kalibern und Anfangsgeschwindigkeiten nicht auf dem Wege über eine einfache Korrektur der Formeln für die Bahnelemente des parabolischen Bahnmodells möglich, da der Luftwiderstand die Schwerkraft im allgemeinen dem Betrag nach um ein vielfaches übersteigt und dem physikalischen Bild des Bewegungsablaufs völlig neue Züge verleiht.

<sup>1)</sup> Siehe Kapitel 4.

Als Beispiel sei angeführt, daß bei einem Gewehrsgeschoß mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 700$  m/s der Luftwiderstand etwa das 40fache der Schwerkraft ausmacht. Die Auftreffgeschwindigkeit  $v_e^*$  der Flugbahn maximaler Schußweite (optimaler Abgangswinkel  $\theta_0^* \approx 35^\circ$ ) beträgt hier nur noch etwa ein Sechstel der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , während nach der parabolischen Theorie  $v_e = v_0$  sein müßte.

Es ist kein Widerspruch hierzu, daß eine Reihe von Beziehungen der parabolischen Theorie in guter Näherung auf Flugbahnen im luft-erfüllten Raum angewandt werden können, wie etwa die Formeln zur Transformation der Entfernung des direkten Schusses (Abschnitt 2.9.2.5.).

Das Ziel der Ausführungen dieses Kapitels, die Formulierung des klassischen Bahnmodells vorzubereiten, bedingt Stoffauswahl und Darstellung. So werden die Ergebnisse der Strömungslehre nur in dem Umfang behandelt, wie dies zur Begründung der in der Ballistik verwendeten Standard-Luftwiderstandsgesetze notwendig ist.

Für die Behandlung der Rotationsbewegung des Geschosses um seinen Schwerpunkt und die Beurteilung der Stabilität des Geschosßflugs werden umfassendere Kenntnisse benötigt.

In den Ansätzen für den Luftwiderstand treten die Zustandsparameter des Mediums auf, in dem sich das Geschoß bewegt. Es ist deshalb zweckmäßig, zunächst den Aufbau und die physikalische Struktur der Erdatmosphäre zu besprechen.

## **3.2. Das Schichtmodell der Erdatmosphäre**

### **3.2.1. Experimentelle Befunde über die vertikale Struktur der Atmosphäre**

Die Erdatmosphäre stellt eine Gashülle dar, die die Erde in Form einer Kugelschale umgibt. Die vertikale Ausdehnung der Erdatmosphäre beträgt etwa (2000 ··· 3000) km; ihre obere Grenze ist nicht scharf ausgeprägt (Übergang der Atmosphäre in den interplanetaren Raum).

Ungezählte Sondierungen der Erdatmosphäre haben gezeigt, daß die Lufthülle der Erde aus einer Anzahl – bezüglich des Erdmittelpunkts konzentrischer – Schichten mit unterschiedlicher physikalischer Struktur besteht.

Als Klassifikationsprinzip für die Schichteinteilung der Atmosphäre dient in der Ballistik der Charakter des Temperaturverlaufs in den einzelnen Schichten. Da dieser von den dort ablaufenden Energie-

umwandlungen abhängt, ist die Klassifikation der Schichten nach dem Charakter des Temperaturverlaufs im Grunde genommen eine Klassifizierung nach der Struktur der Energieumwandlungsprozesse.

### 3.2.1.1. Die Troposphäre

Die Troposphäre ist die unterste, erdnächste Schicht der Atmosphäre; sie reicht von der Erdoberfläche bis in eine Höhe von (9 ··· 12) km in den mittleren Breiten und in eine Höhe von (16 ··· 18) km in den äquatornahen Gebieten. Sie umfaßt 80% der Gesamtmasse der Lufthülle. Die physikalischen Prozesse, die in der Troposphäre ablaufen, sind ausschlaggebend für die Bildung von Wolken und Niederschlägen. Diese Schicht wird deshalb auch als *Wettersphäre* bezeichnet.

Charakteristische Besonderheit der Troposphäre ist die relativ starke Strömung der Luftmassen, die sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung erfolgt. Der Betrag der vertikalen Komponente der Strömungsgeschwindigkeit der Luft ist im allgemeinen wesentlich kleiner als der Betrag der horizontalen Geschwindigkeitskomponente; man berücksichtigt in der Geschößballistik deshalb meist nur den Einfluß der horizontalen (tangential zur Erdoberfläche gerichteten) Windkomponente.

Die Lufttemperatur nimmt in der Troposphäre um etwa (6,0 ··· 6,5) grd je Kilometer Höhenzuwachs ab. Diese Temperaturabnahme läßt sich wie folgt verstehen: Durch die Absorption der Energie der Sonnenstrahlung an der Erdoberfläche erwärmt sich die erdnächste Schicht der Atmosphäre relativ stark. Da warme Luft eine geringere Dichte als kalte besitzt, steigen die erwärmten Luftmassen vertikal nach oben, wobei sie sich adiabatisch ausdehnen. Adiabatische Ausdehnung eines Gases bewirkt aber einen Abfall der Temperatur.

Die Luftdichte variiert in der Troposphäre innerhalb relativ weiter Grenzen: Das Verhältnis der Luftdichte an der oberen Grenze der Troposphäre zur Luftdichte an deren unteren Grenze beträgt in mittleren Breiten 0,3, in den äquatornahen Gebieten etwa 0,15.

Der vertikalen Strömung und Expansion der erwärmten Luft ist die Verdampfung eines Teiles des an der Erdoberfläche befindlichen Wassers und die Kondensation des Wasserdampfs in der Erdatmosphäre überlagert. Die quantitative Beschreibung des Energie- und Masse-transportes in der Troposphäre erweist sich deshalb als recht verwickelt.

### 3.2.1.2. Die Tropopause

Die obere Grenze der Troposphäre ist die Zone, in der die Abnahme des Betrags des Temperaturgradienten auf den Wert Null vonstatten geht. Dieser Übergangsbereich zwischen Troposphäre und Stratosphäre heißt Tropopause; er hat eine Mächtigkeit von einigen Kilometern.

Die Höhe der Tropopause über der Erdoberfläche ist stark von der geographischen Breite abhängig: Sie beträgt in den Tropen (16 ··· 18) km, in den mittleren Breiten (10 ··· 12) km und in den Polargebieten etwa (9 ··· 11) km.

In der Tropopause und der unteren Stratosphäre können Störungen auftreten, die sogenannten *Strahlströme* (*jet streams*). Die Strahlströme stellen Bänder mit hoher Windgeschwindigkeit dar, die eine Länge von einigen tausend Kilometern, eine Breite von mehreren hundert Kilometern und eine Mächtigkeit von einigen Kilometern besitzen.

In den Strahlströmen erreicht die Windgeschwindigkeit Werte von (100 ··· 110) m/s  $\cong$  (360 ··· 400) km/h, im Extremfall auch das Doppelte dieser Werte.

### 3.2.1.3. Die Stratosphäre

Die Stratosphäre schließt an die Tropopause an; sie erstreckt sich über einen Höhenbereich von (12 ··· 50) km.

Bis auf eine relativ starke Ozonanreicherung ist die Zusammensetzung der Luft in der Stratosphäre die gleiche wie in der Troposphäre; das Maximum der Ozonkonzentration wird hierbei in (20 ··· 25) km Höhe beobachtet.

Die Temperatur der Stratosphäre ist in ihrem unteren Abschnitt konstant, steigt jedoch mit zunehmender Höhe wieder an und erreicht an der oberen Grenze der Stratosphäre Werte, die in der Größenordnung der Temperatur am Erdboden liegen.

Der Temperaturanstieg in der Stratosphäre wird auf die Absorption der ultravioletten Strahlung der Sonne im Wellenlängenbereich (2000 ··· 3000) Å zurückgeführt. Als weitere Energiequelle kommt die kosmische Strahlung in Frage.

Die Luftdichte beträgt in 50 km Höhe etwa ein Tausendstel der Luftdichte am Erdboden.

Trotz intensiver Forschung mit allen zur Verfügung stehenden tech-

nischen Mitteln (Raketen- und Ballonaufstiegen, funktechnischen Methoden usw.) ist die energetische Wechselwirkung zwischen Troposphäre und Stratosphäre noch nicht in allen Einzelheiten geklärt.

#### *3.2.1.4. Die Stratopause*

Die Stratosphäre wird nach oben von der Stratopause begrenzt, die in etwa (50 ··· 55) km Höhe liegt.

In der Stratopause ist die Temperatur annähernd konstant; sie beträgt etwa 0°C.

#### *3.2.1.5. Die Mesosphäre*

Die nächsthöhere Schicht der Atmosphäre, die Mesosphäre, liegt etwa in (55 ··· 80) km Höhe. In ihr tritt erneut ein Temperaturabfall auf, der ähnliche Ursachen hat wie die Temperaturabnahme in der Troposphäre.

Die Mesosphäre ist relativ wenig erforscht, da sie weder mit Ballonsonden noch mit Satelliten erreicht werden kann.

#### *3.2.1.6. Die Mesopause*

Die Mesopause, die in etwa 80 km Höhe liegt, ist die kälteste Schicht der Erdatmosphäre. Ihre Temperatur beträgt nur etwa  $185^\circ\text{K} \cong -88^\circ\text{C}$ .

#### *3.2.1.7. Die Thermosphäre*

An die Mesopause schließt sich nach oben die Thermosphäre an.

Die Thermosphäre weist gegenüber den darunterliegenden Schichten eine Reihe von Besonderheiten auf, von denen die Dissoziation der Sauerstoff- und Stickstoffmoleküle in ihre atomaren Bestandteile, die Ionisation von Atomen und Molekülen sowie die Anreicherung mit leichten Atomen hervorzuheben sind.

Das Molekulargewicht der Luft  $\mathfrak{M}_L$  beträgt in einer Höhe von 300 km nur noch  $\mathfrak{M}_L = 23,73$  (gegenüber  $\mathfrak{M}_L = 28,97$  in den Schichten unter 95 km Höhe).

Die Absorption der kurzwelligeren Strahlung der Sonne in der Thermosphäre bewirkt eine Vergrößerung der kinetischen Energie der Luftpartikel, was gleichbedeutend mit einem Temperaturanstieg ist. So beträgt die Lufttemperatur an der oberen Grenze der Thermosphäre (in 500 km Höhe) etwa  $1500^{\circ}\text{K}$ .

Die hohen Temperaturen der Thermosphäre sind für den Aufenthalt von Flugkörpern in dieser Schicht kein Hindernis: Da die Dichte der Luftpartikel mit hoher kinetischer Energie klein ist, wird auf den Flugkörper nur eine relativ geringe Wärmemenge übertragen. Die mittlere freie Weglänge der Luftmoleküle  $\bar{\lambda}$  beträgt in 400 km Höhe (200  $\cdots$  600) m.

Der Hauptteil der Wärme, die Flugkörper beim Durchqueren der Thermosphäre aufnehmen, stammt nicht aus der Atmosphäre, sondern von der Sonne.

### 3.2.1.8. Die Exosphäre

Die Exosphäre, die Außenschicht der Erdatmosphäre, erstreckt sich von der Höhe (400  $\cdots$  500) km bis zur Grenze der Atmosphäre, die bei (2000  $\cdots$  3000) km angenommen werden kann.

Die Exosphäre stellt ein hochverdünntes Gas dar; die mittlere freie Weglänge der Luftmoleküle erreicht die Größenordnung von Kilometern.

Der Hauptanteil der Teilchen der Exosphäre bewegt sich unter dem Einfluß des Schwerfelds der Erde auf elliptischen Bahnen; ihre mechanische Energie (die Summe aus potentieller und kinetischer Energie) ist annähernd konstant.

Die Dichte der Exosphäre ist außerordentlich gering: In 700 km Höhe sind in einem Volumen von einem Kubikzentimeter noch  $10^6$  Teilchen enthalten, an der Grenze der Exosphäre nur noch 100 Teilchen/cm<sup>3</sup>. Die zuletzt genannte Teilchendichte entspricht der Dichte der interplanetaren Materie.

Die Grenzen zwischen den Atmosphärenschichten sind fließend; ihre Höhenlage und Ausdehnung hängen zudem merklich von der geographischen Breite, der Tages- und Jahreszeit, der Intensität der Sonneneinstrahlung sowie einer Reihe weiterer (teilweise noch nicht völlig erforschter) Faktoren ab.

Weitere Angaben über den Aufbau der Lufthülle der Erde und die physikalischen Prozesse in der Atmosphäre findet man z.B. in [7] bis [10].

### 3.2.2. Grundannahmen der modernen Modellatmosphären

Die Eigenschaften der Atmosphäre werden durch Angabe ihrer physikalischen Zustandsparameter beschrieben. Wie diese Parameter auch gewählt werden mögen, man wird feststellen, daß der Zustand der Atmosphäre in einem ausgewählten Bezugspunkt von Tag zu Tag und von Jahreszeit zu Jahreszeit innerhalb verhältnismäßig weiter Grenzen schwankt. Man weiß deshalb im voraus nicht mit Sicherheit, welche konkreten meteorologischen Bedingungen das Geschoß während seiner Bewegung durch die Erdatmosphäre vorfinden wird. Um dennoch Flugbahnvorhersagen treffen zu können, ist man gezwungen, für die Bahnrechnungen eine *hypothetische mittlere Struktur der Atmosphäre* vorzugeben. Diese angenommene mittlere Struktur der Atmosphäre wird als *Modellatmosphäre* bezeichnet.

In den Modellen der Atmosphäre sind in der Regel noch einige frei wählbare Parameter vorhanden. Legt man die Zahlenwerte dieser Parameter fest, so gelangt man von der Modellatmosphäre zu einer speziellen *Standardatmosphäre* (siehe Abschnitt 3.2.6.).

Man verlangt von einer Modellatmosphäre, daß sie die im Jahresmittel vorliegende meteorologische Situation „möglichst gut“ annähert.

Wann eine Annäherung „gut“ oder „schlecht“ heißen soll, ist eine Sache der Übereinkunft. In der Ballistik wird man eine Modellatmosphäre im allgemeinen dann als gut gewählt ansehen, wenn die Abweichungen der Tagesbedingungen beim Schießen von den meteorologischen Standardbedingungen so klein sind, daß ihre Einflüsse auf die Flugbahnelemente mit Hilfe der linearen Störungstheorie berechnet werden können.

Den Modellatmosphären der Ballistik sind folgende Grundannahmen gemeinsam:

- I. Die Luft ist ein Kontinuum, das physikalisch als ideales Gas behandelt werden kann.
- II. Die Temperatur der Luft ist eine bekannte (vorgegebene) Funktion der geometrischen Höhe  $h$  über der Erdoberfläche.
- III. Die Atmosphäre befindet sich relativ zur Erdoberfläche in stabilem statischem Gleichgewicht.

Die in der Praxis benutzten speziellen Modellatmosphären unterscheiden sich im wesentlichen

- hinsichtlich der Struktur der Temperaturverteilung (lineare bzw. quadratische Abhängigkeit der Temperatur von der Höhe);



- in der Art der Berücksichtigung der Luftfeuchte sowie
- bezüglich der Annahmen über die Höhenabhängigkeit der Fallbeschleunigung.

Aufgabe der folgenden Abschnitte ist es, die Voraussetzungen I bis III mathematisch durch Gleichungen bzw. Ungleichungen darzustellen und die funktionelle Abhängigkeit der meteorologischen Elemente von der Höhe über der Erdoberfläche zu berechnen.

### 3.2.3. Physikalische Beziehungen und Definitionen

#### 3.2.3.1. Parameter der Atmosphäre

Es ist üblich, den lokalen physikalischen Zustand der Atmosphäre durch Angabe der meteorologischen Elemente

- Luftdruck  $p$ ,
- Luftdichte  $\rho$ ,
- Lufttemperatur  $\tau^1$ ) und
- Windgeschwindigkeit  $w = (W_x, W_y, W_z)$

zu charakterisieren. Das Molekulargewicht  $\mathfrak{M}_L$  (die spezifische Gaskonstante  $\mathfrak{R}_L$ ) und der Adiabatenexponent  $\kappa_L$  der Luft werden als bekannte Funktionen der Höhe  $y$  vorausgesetzt.

Sollen Strömungsvorgänge untersucht werden, die in unmittelbarer Nähe der Geschoßoberfläche ablaufen, so benötigt man überdies die Zahlenwerte der dynamischen Zähigkeit sowie des Wärmeleitungskoeffizienten der Luft.

Für Flugkörper, die die oberen Schichten der Atmosphäre erreichen, ist die mittlere freie Weglänge der Luftmoleküle  $\bar{\lambda}$  ein weiterer wichtiger Parameter. Der Zahlenwert von  $\bar{\lambda}$  ist ein Maß dafür, inwieweit die Voraussetzung I (Abschnitt 3.2.2.) gültig ist (siehe hierzu Abschnitt 3.3.2.1.).

Wenn nicht nur die lokalen Eigenschaften der Atmosphäre, sondern auch deren vertikale Struktur untersucht werden sollen, sind weitere Parameter in die Betrachtung einzubeziehen, wie die Fallbeschleunigung  $g_0$  am Boden, der mittlere Erdradius  $R_E$  und andere.

<sup>1)</sup> Um Verwechslungen mit dem Störungskoeffizienten  $T$  für die Flugzeit  $t$  zu vermeiden, wird die kinetische (absolute) Lufttemperatur, abweichend von der in der Physik üblichen Symbolik, mit  $\tau$  bezeichnet.

Zwischen den genannten Parametern, die für die Struktur der Atmosphäre maßgebend sind, bestehen eine Reihe von Beziehungen. Sie können deshalb nicht unabhängig voneinander vorgegeben werden, wie sich in den folgenden Abschnitten zeigen wird.

### 3.2.3.2. Die Zustandsgleichung

In Voraussetzung I (Abschnitt 3.2.2.) war die Luft als ideales Gas postuliert worden. Diese Voraussetzung besagt: Luftdruck  $p$ , Luftdichte  $\rho$  und absolute (kinetische) Temperatur  $\tau$  der Luft genügen der thermodynamischen Zustandsgleichung

$$p = \mathfrak{R}_L \rho \tau. \quad (3.1)$$

Wenn  $\mathfrak{R}_L$  gegeben ist, brauchen von den drei meteorologischen Elementen (Zustandsparametern)  $p$ ,  $\rho$  und  $\tau$  jeweils nur zwei bekannt zu sein; das dritte Element folgt dann eindeutig aus (3.1).

Die Lufthülle der Erde besteht aus drei Gruppen von Bestandteilen:

- einer Gruppe von Gasen mit nahezu konstantem Mischungsverhältnis (Stickstoff, Sauerstoff, Argon);
- einer Gruppe von Gasen, deren relativer Anteil in der Luft stark variiert (Wasserdampf, Kohlendioxid, Ozon) und
- staubförmigen (festen) sowie flüssigen Beimengungen (u.a. Ruß, Wassertröpfchen, Schneekristallen).

Die modernen Modellatmosphären der Aerodynamik und Ballistik berücksichtigen nur die zuerst genannte Gruppe von Gasen, deren Zusammensetzung bis etwa 90 km Höhe als konstant angesehen wird.

Der Einfluß der zweiten und dritten Gruppe von Bestandteilen der Atmosphäre kann durch eine Störungsrechnung oder eine Korrektur der Lufttemperatur  $\tau_0$  am Boden erfaßt werden (siehe Abschnitt 3.2.6.3.).

In Höhen über 90 km steigt der Gehalt der Luft an leichten Gasen (Helium und Wasserstoff) stark an, außerdem macht sich die Dissoziation der molekularen Bestandteile der Luft in zunehmendem Maß bemerkbar ( $O_2 \rightarrow 2 O$ ,  $H_2 \rightarrow 2 H$ ). Bei Bahnen, die große Flughöhen erreichen, muß deshalb die Höhenabhängigkeit des Molekulargewichts  $\mathfrak{M}_L$  der Luft unbedingt berücksichtigt werden:  $\mathfrak{M}_L = \mathfrak{M}_L(h)$ . Mit  $\mathfrak{M}_L$  ist aber auch die spezifische Gaskonstante  $\mathfrak{R}_L$  der Luft eine Funktion der Höhe:  $\mathfrak{R}_L = \mathfrak{R}_L(h)$ .

Aus der Gültigkeit der Zustandsgleichung (3.1) folgt für die lokale Schallgeschwindigkeit  $a$  die bekannte Beziehung

$$a = \sqrt{\kappa_L \mathfrak{R}_L \tau}; \quad (3.2)$$

$\kappa_L$  bezeichnet den Adiabatenexponenten der (trockenen) Luft.

Da nach Voraussetzung II über die Struktur von Modellatmosphären (Abschnitt 3.2.2.) die Lufttemperatur eine vorgegebene (bekannte) Funktion der Höhe  $h$  ist, kann man (3.2) in dem Bereich, in dem  $\mathfrak{R}_L = \text{const}$  gilt, auch schreiben

$$a(h) = a_0 \sqrt{\frac{\tau(h)}{\tau_0}}, \quad a_0 := \sqrt{\kappa_L \mathfrak{R}_L \tau(0)}, \quad (3.3)$$

worin  $a_0$  die Schallgeschwindigkeit am Boden ( $h = 0$ ) bedeutet.

Die Schallgeschwindigkeit in der Modellatmosphäre ist eine eindeutige Funktion der Höhe  $h$ .

### 3.2.3.3. Die statische Gleichgewichtsbedingung

Gemäß Voraussetzung III (Abschnitt 3.2.2.) befindet sich die Luft der Modellatmosphäre relativ zur Erdoberfläche in Ruhe. In der Atmosphäre dürfen somit keine Luftströmungen auftreten; es herrscht Windstille ( $\mathbf{w} = 0$ ).

Damit in der Atmosphäre keine makroskopischen Strömungen auftreten, muß sich jeder aus der Atmosphäre willkürlich „herausgeschnittene“ (infinitesimale) Bereich  $\mathfrak{B}$  mit seiner Umgebung im Kräftegleichgewicht befinden.

Als Bedingungsgleichung für statischês Gleichgewicht der Atmosphäre folgt aus der *Eulerschen* Gleichung der Hydrodynamik:<sup>1)</sup>

$$\text{grad } p = \rho \mathbf{g}. \quad (3.4)$$

Um diese Vektorgleichung in Komponenten zu zerlegen, führt man ein lokales kartesisches Koordinatensystem  $x', h, z'$  ein, dessen  $h$ -Achse entgegengesetzt zur Richtung von  $\mathbf{g}$  weist und dessen  $x'$ - und  $z'$ -Achse

<sup>1)</sup> Hinsichtlich der Herleitung der Gleichgewichtsbedingung sei auf die Lehrbücher der Hydrodynamik verwiesen, siehe etwa *Kotschin, N.J.; Kibel, I.A.; Rose, N.W.: Theoretische Hydromechanik*, Berlin 1955.

in der (lokalen) Tangentialebene an die (kugelförmig vorausgesetzte) Erde liegen (Bild 3.1).

Während sich die Richtung der Fallbeschleunigung  $g$  im erdfesten  $x,y,z$ -System längs der Flugbahn ändert, weist  $g$  im lokalen  $x',h,z'$ -System stets in Richtung der negativen  $h$ -Achse. Die Einführung des

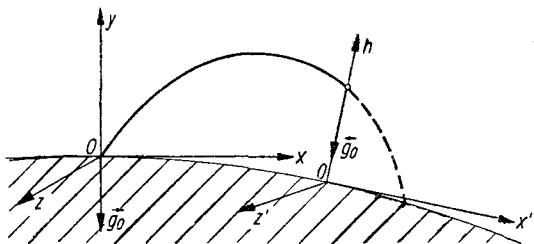


Bild 3.1  
Erdfestes  $x,y,z$ -System und  
lokales  $x',h,z'$ -System

lokalen  $x',h,z'$ -Systems trägt somit dem Umstand Rechnung, daß die Schwerkraft eine Zentralkraft ist, die zum Erdmittelpunkt gerichtet ist.

Im Abgangszeitpunkt  $t = t_0$  fällt das lokale  $x',h,z'$ -System mit dem erdfesten  $x,y,z$ -System zusammen.

Die Komponentenzerlegung von (3.4) liefert im  $x',h,z'$ -System

$$\frac{\partial p}{\partial x'} = \frac{\partial p}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial h} = -\rho g. \quad (3.5)$$

Der Luftdruck  $p$  hängt weder von  $x$  noch von  $z$  ab; er ist eine Funktion allein der Höhe  $h$ . Man kann anstelle von (3.5) somit schreiben

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g, \quad p = p(h). \quad (3.6)$$

Gemäß Voraussetzung II (Abschnitt 3.2.2.) ist die Lufttemperatur  $\tau$  eine vorgegebene Funktion der Höhe  $h$ . Nimmt man ferner an, daß auch die Zusammensetzung der Luft eine bekannte Funktion von  $h$  ist, so kann auf Grund der Zustandsgleichung auch  $\rho$  nur von  $h$  abhängen:

$$\rho = \frac{p(h)}{\mathfrak{R}_L(h) \tau(h)} =: f(h).$$

Man nennt eine Atmosphäre, in der Druck, Dichte und Temperatur eindeutige Funktionen der Höhe  $h$  sind, „horizontal geschichtet“.

Die Differentialgleichung (3.6) ist demnach die Bedingungsgleichung für statisches Gleichgewicht in einer horizontal geschichteten Atmosphäre.

Die Stabilitätsbedingung (3.6) kann auch elementar hergeleitet werden. Um dies zu zeigen, betrachtet man das Kräftegleichgewicht an einem infinitesimalen Quader  $B$ , der gemäß Bild 3.2 aus der Atmosphäre „herausgeschnitten“ wird.

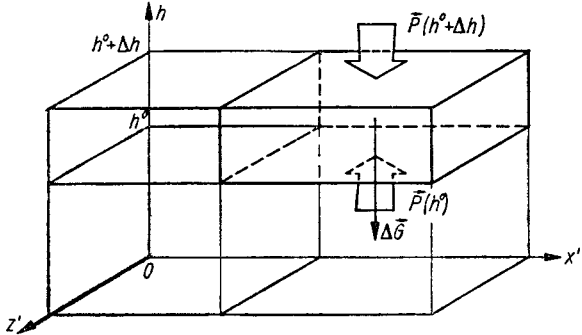


Bild 3.2  
Zur elementaren Herleitung der statischen Gleichgewichtsbedingung der Atmosphäre

Grund- und Deckfläche des Quaders der Masse  $\Delta m$  seien parallel zur Erdoberfläche und mögen sich in der Höhe  $h = h^0$  bzw.  $h = h^0 + \Delta h$  befinden; ihr Flächeninhalt sei gleich  $F$ .

Da tangential zur Erdoberfläche voraussetzungsgemäß keine atmosphärische Strömung herrscht und die Schwerkraft lediglich eine Komponente in  $h$ -Richtung hat, kann weder in  $x'$ - noch in  $z'$ -Richtung ein Druckgefälle vorhanden sein. Der Luftdruck  $p$  darf auf Grund dieser Überlegung somit von vornherein als Funktion von  $h$  allein angesetzt werden:

$$p = p(h) \quad (\partial p / \partial x = \partial p / \partial z = 0).$$

In  $h$ -Richtung liegt Kräftegleichgewicht dann vor, wenn sich das Gewicht des Quaders

$$\Delta G = -\rho(\bar{h}) \Delta h F g(\bar{h})$$

und die Differenz der Druckkräfte auf die Boden- und Deckfläche des Quaders

$$\Delta P = [p(h^0) - p(h^0 + \Delta h)] F$$

gerade kompensieren.

Das Symbol  $\bar{h}$  bezeichnet eine mittlere Höhe zwischen  $h = h^0$  und  $h = h^0 + \Delta h$ :

$$\bar{h} = h^0 + \Delta \bar{h}; \quad 0 \leq \Delta \bar{h} \leq \Delta h. \tag{3.7}$$

Die Fallbeschleunigung  $g$  wird, wie bei allen neueren Modellatmosphären üblich, als höhenabhängig angenommen.

Die Gleichgewichtsbedingung für die Kräfte an dem infinitesimalen Quader  $B$  lautet damit

$$K_{x'} = K_{y'} = 0,$$

$$K_h = \Delta P + \Delta G = [p(h^\circ) - p(h^\circ + \Delta h)] F - g(\bar{h}) \varrho(\bar{h}) F \Delta h = 0.$$

Aus der letzten Beziehung folgt

$$\frac{p(h^\circ + \Delta h) - p(h^\circ)}{\Delta h} = -g(h^\circ + \Delta \bar{h}) \varrho(h^\circ + \Delta \bar{h}).$$

Führt man den Grenzübergang  $\Delta h \rightarrow 0$  aus, so geht die linke Seite – gemäß der Definition der Ableitung – in  $(dp/dh)_{h=h^\circ}$  über; auf der rechten Seite strebt auf Grund von (3.7) mit  $\Delta h$  auch  $\Delta \bar{h}$  gegen Null:

$$\left(\frac{dp}{dh}\right)_{h=h^\circ} = -g(h^\circ) \varrho(h^\circ).$$

Da  $h^\circ$  eine beliebige Bezugshöhe darstellt, ist diese Gleichung mit (3.6) identisch.

#### \*3.2.3.4. Die thermodynamische Stabilitätsbedingung

Wenn sich die Atmosphäre – trotz höhenveränderlichen Drucks – in statischem Gleichgewicht befinden soll, so müssen die meteorologischen Parameter Gleichung (3.6) genügen.

Die Bedingung (3.6) ist eine *notwendige Bedingung für stabiles Gleichgewicht der Atmosphäre*; sie ist jedoch hierfür *nicht hinreichend*. Damit der durch (3.6) bestimmte Gleichgewichtszustand thermodynamisch stabil ist, muß eine weitere Bedingung erfüllt sein, die dafür sorgt, daß in der Atmosphäre keine Konvektionsströmung auftritt, die die vorhandenen Temperaturunterschiede auszugleichen trachtet.

Die vorgenannte Zusatzbedingung – die *thermodynamische Stabilitätsbedingung* – hat die Form einer einschränkenden Bedingung für den Temperaturgradienten  $A := d\tau/dh$ .

Die thermodynamische Stabilitätsbedingung für trockene Luft lautet

$$A \geq A_a = -g/c_{pL}; \quad (3.8)$$

$$|A| \leq |A_a| = g/c_{pL} = 9,762 \text{ grad/km},$$

wenn die spezifische Wärme der trockenen Luft bei konstantem Druck mit  $c_{pL}$  bezeichnet wird.

Zur *Ableitung der Stabilitätsbedingung* (3.8) betrachtet man ein Massenelement  $dm$  der Atmosphäre, das von der Höhe  $h = h'$  zur Höhe  $h = h' + dh$  aufsteigt. Das Masseilchen sei so klein, daß bei seiner Bewegung die umgebende Luft praktisch weiterhin in Ruhe bleibt und deren Temperatur nicht geändert wird.

Unter diesen Voraussetzungen kann angenommen werden, daß die Bewegung des Masseteilchens von der Höhe  $h = h'$  zur Höhe  $h = h' + dh$  adiabatisch erfolgt. Die Änderung der spezifischen Entropie  $s^*$  des Massenelements muß in diesem Fall Null sein:  $ds^* = 0$ .

Nach Voraussetzung I (Abschnitt 3.2.2.) kann die Luft als ideales Gas behandelt werden. Für die spezifische Entropie  $s^*$  der Luft gilt somit<sup>1)</sup>:

$$ds^* = c_{pL} \frac{d\tau}{\tau} - \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{\tau},$$

$$ds^* = \frac{ds^*}{dh} dh = \left( c_{pL} \frac{d\tau}{dh} - \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dh} \right) \frac{dh}{\tau}.$$

Mit  $d\tau/dh = : \Lambda$  und der statischen Stabilitätsbedingung (3.6) folgt hieraus

$$ds^* = (c_{pL} \Lambda + g) \frac{dh}{\tau}. \quad (3.9)$$

Da die Bewegung des Massenelements nach Voraussetzung adiabatisch erfolgen soll ( $ds^* = 0$ ), muß der Temperaturgradient  $\Lambda = \Lambda_a$  der Bedingung genügen

$$c_{pL} \Lambda_a + g = 0, \quad \Lambda_a = -g/c_{pL}.$$

Man nennt  $\Lambda_a$  *adiabatischen Temperaturgradienten*.

In der Höhe  $h = h' + dh$  hat das adiabatisch aufgestiegene Masseteilchen die Temperatur

$$\tau_a(h' + dh) = \tau(h') + \left( \frac{d\tau}{dh} \right)'_a dh = \tau' + \Lambda'_a dh.$$

Die Umgebung des Massenelements besitzt die für die Höhe  $h' + dh$  vorgegebene Temperatur der ungestörten Atmosphäre

$$\tau(h' + dh) = \tau(h') + \frac{d\tau(h')}{dh} dh = \tau' + \Lambda' dh.$$

Der Temperaturunterschied  $d\tau$  zwischen dem adiabatisch aufgestiegenen Massenelement und seiner Umgebung beträgt somit

$$d\tau = \tau_a(h' + dh) - \tau(h' + dh) = (\Lambda_a - \Lambda)' dh.$$

Da sich die Atmosphäre nach Voraussetzung im statischen Kräftegleichgewicht befindet, ist der Druck  $p$  in dem betrachteten Massenelement und seiner Umgebung gleich groß. Die Temperaturdifferenz  $d\tau$  hat dann auf Grund der Zustandsgleichung  $p = \mathfrak{R}_L \varrho \tau$  den relativen Dichteunterschied zur Folge<sup>2)</sup>:

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = -\frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{\tau} (\Lambda - \Lambda_a)' dh.$$

<sup>1)</sup> Siehe etwa Ebert, H.: *Physikalisches Taschenbuch*. 4., überarb. u. ergänzte Aufl., Braunschweig 1967, oder Яворский, Б. М.; Детлаф, А. А.: *Справочник по физике для инженеров и студентов вузов*. Москва 1963.

<sup>2)</sup> Die Höhenabhängigkeit der spezifischen Gaskonstante kann bei diesen Betrachtungen außer acht gelassen werden.

Durch diesen Dichteunterschied erfährt das Massenelement nach dem *Archimedesschen* Prinzip eine Kraft  $dP$  in  $h$ -Richtung:

$$dP = - dm g \frac{d\rho}{\rho}.$$

Für die Beschleunigung  $b$  des Massenelements gilt somit

$$b = \frac{dP}{dm} = -g \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{g}{\tau} (\Lambda - \Lambda_a) dh. \quad (3.10)$$

Die Beschleunigung  $b$  ist positiv (weist in positive  $h$ -Richtung) für  $d\rho < 0$ . Das ist dann der Fall, wenn die Dichte des Massenelements kleiner ist als die Dichte der ruhenden Luft der Umgebung oder, anders ausgedrückt, wenn der Temperaturgradient  $\Lambda$  der Atmosphäre kleiner ist als der adiabatische Temperaturgradient  $\Lambda_a$ . Für  $\Lambda < \Lambda_a$  hat ein Volumenelement, das aus irgendeinem Grunde um  $dh$  aus seiner Ruhelage ausgelenkt ist, das Bestreben, die begonnene (Auf- oder Abwärts-) Bewegung fortzusetzen. Für  $\Lambda < \Lambda_a$  befindet sich die Atmosphäre somit in einem *thermodynamisch instabilen Zustand*.

Wenn  $\Lambda > \Lambda_a$  ist, so entsteht bei Verschiebung des Volumenelements aus der Ausgangslage eine Kraft, die der Auslenkung entgegenwirkt. Das Volumenelement befindet sich somit in *stabilem thermodynamischem Gleichgewicht*. Nimmt man an, daß sich die Luft in dem betrachteten Volumenelement nicht mit der Luft der Umgebung vermischt, so führt das Volumenelement unter dem Einfluß der Rückstellkraft – ähnlich wie ein Pendel – Schwingungen um seine Ruhelage aus.

Besonders stabil sind diejenigen Schichten, in denen  $\Lambda > 0$  gilt, die Lufttemperatur also mit zunehmender Höhe wächst: Aufwärts oder abwärts gerichtete Luftströmungen werden sehr rasch gedämpft.

Die Bedingungen (3.6) und (3.8) sind notwendig und hinreichend dafür, daß sich die Atmosphäre relativ zur (ruhenden) Erdoberfläche in einem stabilen Gleichgewichtszustand befindet.

Eine detaillierte Diskussion der Bedingungen für die Stabilität der Atmosphäre findet man in der ausgezeichneten Monographie von *Chrgian* [7]. Dort ist auch die Stabilitätsbedingung für feuchte Luft abgeleitet.

### 3.2.3.5. Die Molekulartemperatur

Da die chemische Zusammensetzung der Luft mit der Höhe variiert, ist die Gaskonstante der Luft  $\mathfrak{R}_L$  eine Funktion der Höhe  $h$  über dem Erdboden:  $\mathfrak{R}_L = \mathfrak{R}_L(h)$ . Bei ballistischen Untersuchungen ist die Berücksichtigung der Höhenabhängigkeit von  $\mathfrak{R}_L$  unbequem, man eliminiert sie deshalb durch Einführung einer *Molekulartemperatur*  $\tau^*(h)$ , die an die Stelle der kinetischen Temperatur  $\tau(h)$  tritt.



Die Molekulartemperatur  $\tau^*(h)$  ist definiert:

$$\tau^*(h) := \frac{\mathfrak{R}_L(h)}{\mathfrak{R}_{L0}} \tau(h), \quad \mathfrak{R}_{L0} := \mathfrak{R}_L(0). \quad (3.11)$$

Wie in der Thermodynamik gezeigt wird, ist die spezifische Gaskonstante  $\mathfrak{R}_L$  umgekehrt proportional zum Molekulargewicht  $\mathfrak{M}_L$ . Man kann die Definitionsgleichung (3.11) deshalb auch in der Form schreiben

$$\tau^*(h) := \frac{\mathfrak{M}_{L0}}{\mathfrak{M}_L(h)} \tau(h), \quad \mathfrak{M}_{L0} := \mathfrak{M}_L(0). \quad (3.12)$$

Bis in etwa 90 km Höhe ist die Molekulartemperatur gleich der kinetischen Temperatur. Bei großen Höhen kann die Temperaturdifferenz  $\Delta\tau = \tau^* - \tau$  jedoch erheblich sein. So gibt die Tabelle der sowjetischen Standardatmosphäre SSA-64, die in Abschnitt 3.2.6.2. besprochen wird, für die Höhe  $h = 200$  km die Werte  $\tau^* = 1316,10^\circ\text{K}$ ,  $\tau = 1226,80^\circ\text{K}$  an; die Temperaturdifferenz beträgt  $\Delta\tau = 89,30$  grad!

### 3.2.3.6. Die geopotentielle Höhe

Da in der Gleichgewichtsbedingung (3.6) die Fallbeschleunigung  $g$  auftritt, ist bei der Aufstellung einer Modellatmosphäre stets auch eine Annahme über die Höhenabhängigkeit von  $g$  erforderlich. Die Festlegung  $g = \text{const}$  scheidet hierbei von vornherein aus, wenn das Atmosphärenmodell nicht nur zur Berechnung klassischer Geschosßflugbahnen, sondern auch zur Vorhersage von Bahnen weitreichender Raketen Verwendung finden soll.

Die Höhenabhängigkeit der Fallbeschleunigung kann aus den Bestimmungsgleichungen für die meteorologischen Elemente auf analoge Art eliminiert werden wie die Höhenabhängigkeit der spezifischen Gaskonstanten  $\mathfrak{R}_L$ : Man kompensiert die Höhenabhängigkeit von  $g$  durch Einführung einer *geopotentiellen Höhe*  $h^*$ , die in den Bestimmungsgleichungen der meteorologischen Elemente an die Stelle der geometrischen Höhe  $h$  tritt.

Die Definitionsgleichung der geopotentiellen Höhe  $h^*$  lautet

$$h^* := \frac{1}{g_0} \int_0^h g(h') dh' \quad (3.13)$$

bzw. in differentieller Form

$$dh^* = \frac{g(h)}{g_0} dh. \quad (3.14)$$

Hierin ist  $g_0$  die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche (im Ursprung des  $x', h, z'$ -Systems).

Zur Berechnung der Höhenabhängigkeit von  $g$  wird das Schwerfeld der Erde als kugelsymmetrisch vorausgesetzt.

Nach dem *Newtonschen* Gravitationsgesetz ist die Anziehungskraft  $G$  zwischen Geschöß (Masse:  $m$ ) und Erde (Masse:  $M_E$ ; mittlerer Radius:  $R_E$ ) in den Höhen  $h > 0$  und  $h_0 = 0$  gegeben durch<sup>1)</sup>:

$$G = \gamma_g \frac{M_E m}{(R_E + h)^2}, \quad G_0 = \gamma_g \frac{M_E m}{R_E^2}. \quad (3.15)$$

Das Symbol  $\gamma_g$  bezeichnet die universelle Gravitationskonstante. Mit den Ansätzen

$$G =: m g(h), \quad G_0 =: m g_0$$

folgt aus (3.15) für die Höhenabhängigkeit der Fallbeschleunigung die Beziehung

$$g(h) = g_0 \left( \frac{R_E}{R_E + h} \right)^2 = \frac{g_0}{[1 + (h/R_E)]^2}. \quad (3.16)$$

Setzt man  $g(h)$  aus (3.16) in (3.13) ein, so kann das Integral ausgewertet werden:

$$h^* = R_E^2 \int_0^h \frac{dh'}{(R_E + h')^2} = -R_E^2 \left( \frac{1}{R_E + h} - \frac{1}{R_E} \right).$$

Hieraus folgen für den Übergang von der geometrischen Höhe  $h$  zur geopotentiellen Höhe  $h^*$  (und umgekehrt) die Formeln

$$h^* = h \frac{R_E}{R_E + h}, \quad h = h^* \frac{R_E}{R_E - h^*}. \quad (3.17)$$

Das Produkt  $m h^*$  ist die potentielle Energie  $\Psi_{\text{pot}}$  eines Geschößes der Masse  $m$ , das sich im Abstand  $h$  von der Erdoberfläche befindet.<sup>2)</sup> Die Bezeichnung *geopotentielle Höhe* für  $h^*$  wird hierdurch verständlich.

<sup>1)</sup> Siehe etwa die in Fußnote 1, Seite 199, zitierte Literatur.

<sup>2)</sup> Das Gravitationsfeld der Erde wird als kugelsymmetrisch vorausgesetzt.

### 3.2.4. Die meteorologischen Elemente der Modellatmosphäre

#### 3.2.4.1. Die Bestimmungsgleichungen

Die Lufttemperatur  $\tau$ , die Fallbeschleunigung  $g$  sowie die Gaskonstante  $\mathfrak{R}_L$  der Luft seien als Funktionen der Höhe  $h$  vorgegeben. Die Zustandsgleichung

$$p = \mathfrak{R}_L \rho \tau \quad (3.18)$$

und die Stabilitätsbedingung

$$dp = -g \rho dh \quad (3.19)$$

reichen dann aus, um den Druck-, Dichte- und Schallgeschwindigkeitsverlauf in der Modellatmosphäre zu berechnen.

Durch Division von (3.19) durch (3.18) erhält man eine Differentialgleichung für die *Druckfunktion*  $p = p(h)$ :

$$\frac{dp}{p} = - \frac{g(h)}{\mathfrak{R}_L(h) \tau(h)} dh. \quad (3.20)$$

Durch Integration dieser Gleichung ergibt sich eine Beziehung für die Abhängigkeit des Luftdrucks  $p$  von der geometrischen Höhe  $h$ , die sogenannte *barometrische Höhenformel*.

Nachdem  $p(h)$  bekannt ist, erhält man die Höhenabhängigkeit der Dichte  $\rho$  aus der Zustandsgleichung (3.1):

$$\rho(h) = \frac{p(h)}{\mathfrak{R}_L(h) \tau(h)}. \quad (3.21)$$

Die einzelnen Schichten der Erdatmosphäre sind durch ein für sie typisches Temperaturprofil gekennzeichnet (siehe Abschnitt 3.2.1.). Dieser experimentelle Befund hat für die Konstruktion der modernen Modellatmosphären grundlegende Bedeutung: Man baut die Modellatmosphären aus Schichten auf, in denen die Ableitung der Molekulartemperatur  $\tau^*$  nach der geopotentiellen Höhe  $h^*$ , der sogenannte *geopotentielle Temperaturgradient*  $\Lambda_i^*$ , jeweils konstant ist:

$$\Lambda_i^* := \left( \frac{d\tau^*}{dh^*} \right)_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Der Temperaturgradient  $\Lambda_i^*$  kann größer, kleiner oder gleich Null sein.

Innerhalb der einzelnen Atmosphärenschichten ändert sich die Molekular­temperatur  $\tau^*$  somit linear mit der geopotentiellen Höhe  $h^*$ :

$$\begin{aligned}\tau^* &= \tau_{i-1}^* + \Lambda_i^* h^*, \\ h_{i-1}^* &\leq h^* \leq h_i^* \quad (i = 1, 2, \dots).\end{aligned}\tag{3.22}$$

Die geopotentiellen Höhen  $h_{i-1}^*$ ,  $h_i^*$  sind die untere bzw. obere Grenze der  $i$ -ten Schicht.

Für  $h_{i-1}^* \leq h^* \leq h_i^*$  und  $\Lambda_i^* < 0$  durchläuft  $\tau^*$  das Intervall  $\tau_{i-1}^* \geq \tau^* \geq \tau_i^*$ , während  $p$  und  $\varrho$  in den Grenzen variieren:

$$p_{i-1} \geq p \geq p_i; \quad \varrho_{i-1} \geq \varrho \geq \varrho_i.$$

Am Erdboden gilt speziell

$$h_0^* = h_0 = 0, \quad \tau_0^* = \tau_0.$$

Um die Temperaturverteilung  $\tau^* = \tau^*(h)$  eindeutig zu beschreiben, reicht es aus, die Intervallgrenzen  $h_j$  ( $j = 0, 1, \dots$ ), die Temperaturgradienten  $\Lambda_j^*$  der einzelnen Schichten sowie den Bodenwert der Temperatur  $\tau_0$  vorzugeben.

Bei der Integration der Differentialgleichung (3.20) hat man zwischen isothermen Schichten ( $\Lambda_i^* = 0$ ) und Schichten mit linearem Temperaturverlauf ( $\Lambda_i^* \geq 0, \text{const}$ ) zu unterscheiden.

### 3.2.4.2. Der Druck- und Dichteverlauf in isothermen Schichten

Isotherme Schichten treten bei den modernen Normalatmosphären nur im Bereich  $h < 95$  km auf. Da in diesem Höhenbereich die chemische Zusammensetzung der Luft konstant ist, kann man  $\mathfrak{R}_L(h) = \mathfrak{R}_{L0} = \text{const}$ ,  $\tau^* = \tau$  setzen. Unter diesen Voraussetzungen spezialisiert sich (3.20) in der  $i$ -ten Schicht zu

$$\frac{dp}{p} = - \frac{g_0}{\mathfrak{R}_{L0} \tau_i} \cdot \frac{g(h)}{g_0} dh = - \frac{g_0}{\mathfrak{R}_{L0} \tau_i} \cdot dh^*, \quad \tau_i = \tau_{i-1}.$$

Integration dieser Gleichung über die  $i$ -te Schicht liefert

$$\begin{aligned}\ln p - \ln p_{i-1} &= - \frac{g_0}{\mathfrak{R}_{L0} \tau_i} (h^* - h_{i-1}^*), \\ p &= p_{i-1} \exp \left[ - \frac{g_0}{\mathfrak{R}_{L0} \tau_i} (h^* - h_{i-1}^*) \right].\end{aligned}\tag{3.23}$$

Für die Luftdichte in der  $i$ -ten Schicht erhält man auf Grund von (3.21) die gleiche Höhenabhängigkeit wie beim Druck:

$$\varrho = \varrho_{i-1} \exp \left[ - \frac{g_0}{\mathfrak{R}_{\text{LO}} \tau_i} (h^* - h_{i-1}^*) \right]. \quad (3.24)$$

Die geopotentielle Höhe  $h^*$  kann in (3.23) und (3.24) gemäß (3.17) durch die geometrische Höhe  $h$  ersetzt werden:

$$p = p_{i-1} \exp \left[ - \frac{g_0}{\mathfrak{R}_{\text{LO}} \tau_i} \left( \frac{h R_E}{R_E + h} - \frac{h_{i-1} R_E}{R_E + h_{i-1}} \right) \right]; \quad (3.23 \text{ a})$$

$$\varrho = \varrho_{i-1} \exp \left[ - \frac{g_0}{\mathfrak{R}_{\text{LO}} \tau_i} \left( \frac{h R_E}{R_E + h} - \frac{h_{i-1} R_E}{R_E + h_{i-1}} \right) \right]. \quad (3.24 \text{ a})$$

Wenn die geometrische Höhe  $h$  des Flugkörpers klein gegenüber dem Erdradius  $R_E$  ist ( $h \ll R_E$ ), dürfen die Nenner der Quotienten nach Potenzen von  $h/R_E$  entwickelt und die Entwicklungen nach dem linearen Glied abgebrochen werden:

$$\begin{aligned} h^* - h_{i-1}^* &= \frac{h R_E}{R_E + h} - \frac{h_{i-1} R_E}{R_E + h_{i-1}} = \frac{h}{1 + (h/R_E)} - \frac{h_{i-1}}{1 + (h_{i-1}/R_E)} \\ &\approx h [1 - (h/R_E)] - h_{i-1} [1 - (h_{i-1}/R_E)] \\ &= (h - h_{i-1}) [1 - (h + h_{i-1})/R_E]. \end{aligned}$$

Der Term  $-(h + h_{i-1})/R_E$  gibt den relativen Unterschied zwischen den Höhendifferenzen ( $h^* - h_{i-1}^*$ ) und  $(h - h_{i-1})$  an. Man sieht, daß die Differenz der geopotentiellen Höhen zweier vertikal übereinanderliegender Punkte geringer ist als deren geometrischer Höhenunterschied.<sup>1)</sup>

*Zahlenbeispiel:* Für  $h = h_{i-1} = 15$  km,  $R_E = 6371$  km erhält man

$$-\frac{h + h_{i-1}}{R_E} = -\frac{30}{6,371} \cdot 10^{-3} \hat{=} -4,7 \text{‰}.$$

### 3.2.4.3. Die Druck- und Dichtefunktionen bei linearem Temperaturverlauf

Ist der geopotentielle Temperaturgradient in der  $i$ -ten Schicht konstant, aber ungleich Null,

$$d\tau^*/dh^* = A_i^* \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

<sup>1)</sup> Für infinitesimale Höhendifferenzen folgt dies wegen  $g(h) \leq g_0$  bereits aus der Definitionsgleichung (3.14) der geopotentiellen Höhe.

dann gilt  $d\tau = A_i^* dh^*$ . Die Differentialgleichung (3.20) kann unter Beachtung von (3.11) und (3.14) umgeformt werden zu:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{g_0}{\mathfrak{R}_{L0}} \cdot \frac{\mathfrak{R}_{L0}}{\mathfrak{R}_L(h) \tau(h)} \cdot \frac{g(h)}{g_0} dh = - \frac{g_0}{\mathfrak{R}_{L0}} \cdot \frac{1}{\tau^*} \cdot dh^*,$$

$$\frac{dp}{p} = - \frac{g_0}{\mathfrak{R}_{L0} A_i^*} \frac{d\tau^*}{\tau^*}.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung über die  $i$ -te Schicht liefert

$$\frac{p(h)}{p_{i-1}} = \left[ \frac{\tau^*(h)}{\tau_{i-1}^*} \right]^{\sigma_i} = \left[ 1 + \frac{A_i^*}{\tau_{i-1}^*} \left( \frac{h R_E}{R_E + h} - \frac{h_{i-1} R_E}{R_E + h_{i-1}} \right) \right]^{\sigma_i}; \quad (3.25)$$

$$\sigma_i := - \frac{g_0}{\mathfrak{R}_{L0} A_i^*}.$$

Die relative Dichte  $\varrho(h)/\varrho_{i-1}$  in der  $i$ -ten Schicht erhält man aus (3.21) und (3.25) unter Beachtung der Definitionsgleichung (3.11) für die Molekular Temperatur

$$\frac{\varrho(h)}{\varrho_{i-1}} = \frac{p(h)}{\mathfrak{R}_L(h) \tau(h)} \cdot \frac{\mathfrak{R}_L(h_{i-1}) \tau_{i-1}}{p_{i-1}} = \frac{p(h)}{p_{i-1}} \cdot \frac{\tau_{i-1}^*}{\tau^*(h)},$$

$$\frac{\varrho(h)}{\varrho_{i-1}} = \left[ \frac{\tau^*(h)}{\tau_{i-1}^*} \right]^{\sigma_i - 1} = \left[ 1 + \frac{A_i^*}{\tau_{i-1}^*} \left( \frac{h R_E}{R_E + h} - \frac{h_{i-1} R_E}{R_E + h_{i-1}} \right) \right]^{\sigma_i - 1}. \quad (3.26)$$

Bei einigen älteren Standardatmosphären wird die Fallbeschleunigung als konstant angenommen. Das ist als Näherung zulässig, wenn  $h$  klein gegenüber  $R_E$  ist. Man erhält die diesem Grenzfall entsprechenden Druck- und Dichtefunktionen formal aus (3.25) bzw. (3.26) durch den Grenzübergang  $h/R_E \rightarrow 0$ :

$$\frac{p(h)}{p_{i-1}} = \left[ 1 + \frac{A_i^*}{\tau_{i-1}^*} (h - h_{i-1}) \right]^{\sigma_i}; \quad \frac{\varrho(h)}{\varrho_{i-1}} = \left[ 1 + \frac{A_i^*}{\tau_{i-1}^*} (h - h_{i-1}) \right]^{\sigma_i - 1}. \quad (3.27)$$

#### 3.2.4.4. Der Verlauf der Schallgeschwindigkeit

Für die Höhenabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit  $a$  gilt in der  $i$ -ten Schicht der Atmosphäre unter der Voraussetzung  $\mathfrak{M}_L = \mathfrak{M}_{L0}$ ,  $\mathfrak{R}_L = \mathfrak{R}_{L0}$ :

$$\frac{a(h)}{a_{i-1}} = \sqrt{1 + \frac{A_i^*}{\tau_{i-1}^*} \left( \frac{h R_E}{R_E + h} - \frac{h_{i-1} R_E}{R_E + h_{i-1}} \right)}. \quad (3.28)$$

Bei Zulässigkeit des Grenzübergangs  $h/R_E \rightarrow 0$  vereinfacht sich diese Beziehung zu

$$\frac{a(h)}{a_{i-1}} = \sqrt{1 + \frac{A_i^*}{\tau_{i-1}} (h - h_{i-1})}. \quad (3.29)$$

In der Hochatmosphäre ( $h > 90$  km) ist infolge der starken Verdünnung der Luft eine Schallgeschwindigkeit (als Fortpflanzungsgeschwindigkeit schwacher Störungen) nicht mehr definiert (siehe hierzu Abschnitt 3.3.2.3.).

### \*3.2.5. Der Einfluß der Luftfeuchte auf die meteorologischen Elemente der Modellatmosphäre

#### 3.2.5.1. Die Zustandsgleichung der feuchten Luft

Die Ableitungen in Abschnitt 3.2.4. gelten zunächst nur für trockene Luft. Es soll nunmehr die Frage beantwortet werden, wie sich die Druck-, Dichte- und Schallgeschwindigkeitsfunktionen ändern, wenn die Atmosphäre merklich Wasserdampf enthält.

Der Wassergehalt der Luft erreicht nur in den bodennahen Schichten der Atmosphäre eine nennenswerte Größe. Bei der Abschätzung des Einflusses der Luftfeuchtigkeit kann deshalb die spezifische Gaskonstante der trockenen Luft  $\mathfrak{R}_{tL}$  (in unserer früheren Bezeichnung:  $\mathfrak{R}_L$ ) als konstant angenommen werden.

Behandelt man den Wasserdampf in dem hier in Frage kommenden Temperaturbereich näherungsweise als ideales Gas, dann ist der Luftdruck  $p_{tL}$  der feuchten Luft, der vom Barometer angezeigt wird, nach dem *Dalton*schen Gesetz gleich der Summe des Partialdrucks der trockenen Luft  $p_{tL}$  und des Partialdrucks des Wasserdampfs  $e$ :

$$p_{tL} = p_{tL} + e. \quad (3.30)$$

Hierbei ist zu beachten, daß der Partialdruck des Wasserdampfs  $e$  den Sättigungsdampfdruck des Wassers  $\mathcal{G}(\tau)$  nicht überschreiten kann:

$$e \leq \mathcal{G}(\tau).$$

Der Sättigungsdampfdruck  $\mathcal{G}(\tau)$  ist eine eindeutige Funktion der Temperatur  $\tau$ ; er wird mit wachsender Temperatur rasch größer.

Einige Zahlenwerte für  $\mathcal{G}(\tau)$  sind in Tabelle 3.1 zusammengestellt; eine ausführlichere Tabelle findet man z. B. in [7], S. 624f.

Im Bereich von  $-20^\circ\text{C}$  bis  $+30^\circ\text{C}$  kann man den Verlauf von  $\mathcal{G}(\tau)$  durch die empirische Formel

$$\mathcal{G}(\tau) = a \cdot 10^{b\tau/(c+\tau)}, \quad (3.31)$$

$$a = 6,107 \text{ mbar}; \quad b = 7,6326; \quad c = 241,9 \text{ grd}$$

annähern; die Temperatur  $\tau$  ist in Grad Celsius einzusetzen.

Tabelle 3.1 *Sättigungsdampfdruck  $\mathcal{E}(\tau)$  des Wassers als Funktion der Temperatur  $\tau$  (nach [7])*

$\tau$ °C	$\mathcal{E}$ mbar	$\tau$ °C	$\mathcal{E}$ mbar	$\tau$ °C	$\mathcal{E}$ mbar
-50	0,06354	-15	1,9114	+20	23,371
-45	0,1111	-10	2,8622	+25	31,668
-40	0,1891	-5	4,2142	+30	42,427
-35	0,3138	0	6,1070	+35	56,233
-30	0,5087	+5	8,7181	+40	73,773
-25	0,8068	+10	12,271	+45	95,850
-20	1,2538	+15	17,042	+50	123,39

Die Dichte der feuchten Luft  $\varrho_{fL}$  setzt sich additiv aus der Dichte der trockenen Luft  $\varrho_{trL}$  (Druck:  $p_{trL}$ , Temperatur:  $\tau$ ) und der Dichte des Wasserdampfs  $\varrho_{wD}$  (Druck:  $e$ , Temperatur:  $\tau$ ) zusammen:

$$\varrho_{fL} = \varrho_{trL} + \varrho_{wD}. \quad (3.32)$$

Eliminiert man in (3.32)  $\varrho_{trL}$  mit Hilfe der Zustandsgleichung der trockenen Luft,

$$p_{trL} = \mathfrak{R}_{trL} \varrho_{trL} \tau,$$

und  $\varrho_{wD}$  mit Hilfe der Zustandsgleichung des Wasserdampfs,

$$e = \mathfrak{R}_{wD} \varrho_{wD} \tau, \quad (3.33)$$

so ergibt sich

$$\varrho_{fL} = \frac{p_{trL}}{\mathfrak{R}_{trL} \tau} + \frac{e}{\mathfrak{R}_{wD} \tau}.$$

Hieraus folgt nach dem *Daltonschen Gesetz* (3.30):

$$\varrho_{fL} = \frac{p_{fL} - e}{\mathfrak{R}_{trL} \tau} + \frac{e}{\mathfrak{R}_{wD} \tau} = \frac{p_{fL}}{\mathfrak{R}_{trL} \tau} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\mathfrak{R}_{trL}}{\mathfrak{R}_{wD}} \right) \frac{e}{p_{fL}} \right]$$

bzw. umgeformt

$$p_{fL} = \varrho_{fL} \mathfrak{R}_{trL} \frac{\tau}{1 - \beta_L (e/p_{fL})}, \quad \beta_L := 1 - \frac{\mathfrak{R}_{trL}}{\mathfrak{R}_{wD}} = 1 - \frac{\mathfrak{M}_{wD}}{\mathfrak{M}_{trL}}. \quad (3.34)$$

Die vorstehende Gleichung ist die *Zustandsgleichung der feuchten Luft*.

Das mittlere Molekulargewicht der trockenen Luft in den bodennahen Schichten kann mit  $\mathfrak{M}_{trL} = 28,966$  angenommen werden; das Molekulargewicht des Wasserdampfs beträgt  $\mathfrak{M}_{wD} = 18,016$ . Der Zahlenfaktor  $\beta_L$  nimmt damit den Wert an

$$\beta_L = 1 - \frac{\mathfrak{M}_{wD}}{\mathfrak{M}_{trL}} = 1 - \frac{18,016}{28,966} = 0,3780.$$

Führt man eine *virtuelle Temperatur*  $\tau_v$  gemäß

$$\tau_v := \frac{\tau}{1 - \beta_L (e/p_{fL})} \quad (3.35)$$



ein, so kann man die Zustandsgleichung der feuchten Luft (3.34) in der Form der Zustandsgleichung (3.1) des idealen Gases schreiben:

$$p_{rL} = \rho_{rL} \mathfrak{R}_{rL} \tau_v. \quad (3.36)$$

Die virtuelle Temperatur  $\tau_v$  ist eine Funktion der kinetischen Temperatur  $\tau$  und der Feuchtezahl  $s := e/p_{rL}$ .

### 3.2.5.2. Feuchtemaße

Als Maße für den Grad der Luftfeuchte werden in der Ballistik die *relative Feuchte*  $r$ , die *Feuchtezahl*  $s$  und die *spezifische Feuchte*  $q$  verwendet, die durch die Gleichungen definiert sind<sup>1)</sup>:

$$r := \frac{e}{e_s}, \quad s := \frac{e}{p_{rL}}, \quad (3.37)$$

$$q := \frac{m_{wD}}{m_{rL}} \quad (q = \text{const}). \quad (3.38)$$

Die relative Feuchte  $r$  wird meist in Prozent angegeben, die spezifische Feuchte  $q$  in g/kg. Wie man sich leicht überlegt, gilt

$$q = \frac{\rho_{wD}}{\rho_{rL}} = \frac{\rho_{wD}}{\rho_{rL} + \rho_{wD}}. \quad (3.39)$$

Die Feuchtemaße  $s$  und  $q$  sind ineinander überführbar. Ersetzt man in (3.39)  $\rho_{wD}$  und  $\rho_{rL}$  mit Hilfe der Zustandsgleichungen (3.33) und (3.34), so erhält man

$$q = \frac{\rho_{wD}}{\rho_{rL}} = \frac{e}{\mathfrak{R}_{wD} \tau} \cdot \frac{\mathfrak{R}_{rL} \tau}{p_{rL} [1 - \beta_L (e/p_{rL})]} = \frac{\mathfrak{M}_{wD}}{\mathfrak{M}_{rL}} \cdot \frac{e/p_{rL}}{1 - \beta_L (e/p_{rL})}.$$

Zwischen  $q$  und  $s$  besteht damit die Beziehung

$$q = \frac{(1 - \beta_L) s}{1 - \beta_L s}, \quad s = \frac{q}{1 - (1 - q) \beta_L}. \quad (3.40)$$

Man kann somit jederzeit von einem der Parameter  $s$ ,  $q$  auf den anderen übergehen; mit  $q = \text{const}$  ist auch  $s = \text{const}$ . Der Zusammenhang zwischen den Feuchtemaßen  $q$  und  $s$  ist in Bild 3.3 dargestellt.

Die Erdatmosphäre enthält stets gewisse Mengen an Wasserdampf, wobei der Wasserdampfgehalt der einzelnen Atmosphärenschichten relativ stark mit der Höhe variiert. Die in der Atmosphäre vorkommenden Feuchtezahlen  $s$  liegen in der Regel zwischen 0,001 und 0,01.

Bild 3.4 veranschaulicht die spezifische Feuchte der atmosphärischen Luft  $q$  als Funktion der Höhe  $h$ .

<sup>1)</sup> In der deutschsprachigen meteorologischen Literatur wird für  $s$  in der Regel kein besonderer Name eingeführt; in der sowjetischen Literatur hingegen wird  $s$  meist *spezifische Feuchte* genannt, während  $q$  unbenannt bleibt.

Die modernen Modellatmosphären, wie die sowjetische Standardatmosphäre SSA-64 (Abschnitt 3.2.6.2.), gehen von trockener Luft aus. Berücksichtigt man den Wasserdampfgehalt der Luft, so ergeben sich Druck-, Dichte- und Schallgeschwindigkeitsfunktionen, die von den in Abschnitt 3.2.4. abgeleiteten Beziehungen abweichen.

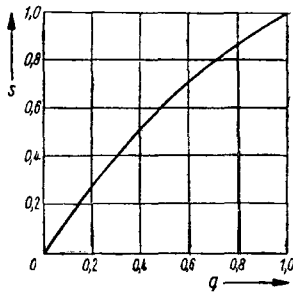


Bild 3.3  
Feuchtezahl  $s$  als Funktion der spezifischen Feuchte  $q$  der Luft

Der Einfluß der Luftfeuchte auf den Druckverlauf in der Atmosphäre soll im folgenden für zwei einfache Spezialfälle berechnet werden:

- a) Die relative Luftfeuchte  $r$  ist konstant:  $r = r_0 = const.$
- b) Die Feuchtezahl  $s$  ist eine vorgegebene Funktion der Höhe:  $s = s(h).$

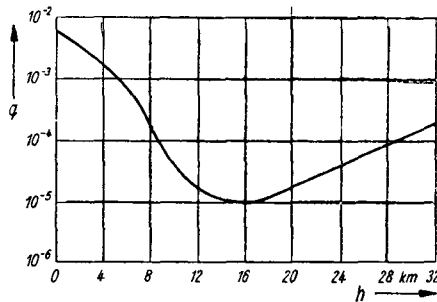


Bild 3.4  
Spezifische Feuchte  $q$  in der Troposphäre und Stratosphäre für mittlere Breiten als Funktion der geometrischen Höhe  $h$  (nach [7])

Weiterhin wird vorausgesetzt:

- Der Luftdruck  $p_0$  und die Lufttemperatur  $\tau_0$  am Boden sind vorgegeben.
- In der Atmosphäre herrscht – unabhängig von ihrem Feuchtegehalt – eine konstante (vorgegebene) Temperaturverteilung; der Temperaturverlauf ist eine lineare Funktion der geopotentiellen Höhe  $h^*$ :

$$\tau(h) \equiv \tau_0 + A_1^* h^*, \quad A_1^* \neq 0.$$

Die durch die Verdampfung, Kondensation und Sublimation des Wassers in der Atmosphäre bedingten physikalischen Prozesse bleiben unberücksichtigt.

### 3.2.5.3. Der Druckverlauf in der feuchten Atmosphäre bei konstanter relativer Luftfeuchte

Durch Kombination der Zustandsgleichung der feuchten Luft (3.34) mit der statischen Gleichgewichtsbedingung der Atmosphäre (3.6) erhält man die Differentialgleichung für den Druckverlauf in der feuchten Atmosphäre:

$$\frac{d p_{rL}}{d h} = -\varrho_{rL} g = -\frac{g}{\Re_{trL} \tau} (p_{rL} - \beta_L e). \quad (3.41)$$

Unter Beachtung von

$$d h^* = \frac{g}{g_0} d h = \frac{d \tau}{A_1^*}, \quad e = r_0 \mathfrak{E}(\tau), \quad \sigma_1 = -\frac{g_0}{\Re_{L,0} A_1^*}$$

kann (3.41) in der Form geschrieben werden

$$\frac{d p_{rL}}{d \tau} - \sigma_1 \frac{p_{rL}}{\tau} = -\beta_L \sigma_1 r_0 \frac{\mathfrak{E}(\tau)}{\tau}. \quad (3.42)$$

Die homogene Gleichung hat die Lösung  $p_{rL} = C \tau^{\sigma_1}$ . Das Integral der vollständigen Gleichung erhält man nach der Methode der Variation des Konstanten. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} p_{rL}(h) &= p_{trL}(h) [1 - r_0 \eta(h)] \quad (r_0 = \text{const}), \\ \eta(h) &:= \frac{\beta_L \sigma_1}{p_0 \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau(h)} \left(\frac{\tau_0}{\tau'}\right)^{\sigma_1+1} \mathfrak{E}(\tau') d\tau'. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Die Funktion  $\eta(h)$  kann für jede spezielle Standardatmosphäre numerisch berechnet werden.

Die Dichte der feuchten Luft  $\varrho_{rL}(h)$  ergibt sich aus der Zustandsgleichung (3.34), wenn man dort  $e = r_0 \mathfrak{E}(\tau)$  und  $p_{rL}(h)$  aus (3.43) einsetzt.

### 3.2.5.4. Der Druckverlauf in der feuchten Atmosphäre bei höhenunabhängiger Feuchtezahl

Die Differentialgleichung für die Druckfunktion  $p_{rL}(h)$  (3.41) nimmt im vorliegenden Fall die Gestalt an

$$\frac{d p_{rL}}{d h} = -\frac{g}{\Re_{trL} \tau} [1 - \beta_L s(h)] p_{rL},$$

$$\frac{d p_{rL}}{p_{rL}} = \sigma_1 [1 - \beta_L s(h)] \frac{d \tau}{\tau}.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt

$$\ln \frac{p_{rL}}{p_0} = \sigma_1 \ln \frac{\tau}{\tau_0} - \beta_L \sigma_1 \int_{\tau_0}^{\tau(h)} \frac{s[h(\tau')]}{\tau'} d\tau'.$$

Zwischen der geometrischen Höhe  $h$  und der Temperatur  $\tau$  besteht die eindeutige Beziehung

$$\tau = \tau_0 - \Lambda_I^* h^* = \tau_0 - \Lambda_I^* \frac{h R_E}{R_E + h},$$

die leicht nach  $h$  aufgelöst werden kann. Mit der Substitution

$$\ln \pi(h) := -\beta_L \sigma_1 \int_{\tau_0}^{\tau(h)} \frac{s}{\tau} d\tau \quad (3.44)$$

geht die Gleichung für den Druck  $p_{fL}(h)$  über in

$$p_{fL}(h) = p_{trL}(h) \pi(h). \quad (3.45)$$

Ist die Feuchtezahl  $s$  konstant ( $s = s_0 = const$ ), so kann das Integral in (3.44) ausgewertet werden:

$$\ln \pi(h) = -\beta_L \sigma_1 s_0 \int_{\tau_0}^{\tau(h)} \frac{d\tau'}{\tau'} = -\beta_L \sigma_1 s_0 \ln \frac{\tau(h)}{\tau_0},$$

$$\pi(h) = \left[ \frac{\tau(h)}{\tau_0} \right]^{-\beta_L \sigma_1 s_0} = \left[ \frac{p_{trL}(h)}{p_0} \right]^{-\beta_L s_0}.$$

Für den Druckverlauf ergibt sich im Falle  $s = s_0 = const$  somit

$$\frac{p_{fL}(h)}{p_0} = \left[ \frac{p_{trL}(h)}{p_0} \right]^{1-\beta_L s_0} = \left[ \frac{\tau(h)}{\tau_0} \right]^{\sigma_1 (1-\beta_L s_0)}. \quad (3.46)$$

Die Druckabnahme mit der Höhe ist wegen  $(1 - \beta_L s_0) < 1$  geringer als bei trockener Luft.

### 3.2.5.5. Die Schallgeschwindigkeit in feuchter Luft

Für die Schallgeschwindigkeit  $a(h)$  war die Formel angegeben worden (3.2):

$$a(h) = \sqrt{\kappa_L \mathfrak{R}_L \tau(h)}.$$

Bei der Übertragung dieser Beziehung auf feuchte Luft muß beachtet werden, daß sich in Abhängigkeit von dem Gehalt der Luft an Wasserdampf sowohl die spezifische Gaskonstante  $\mathfrak{R}_L$  wie auch der Adiabatenexponent  $\kappa_L$  ändern.

Die spezifische Luftfeuchte sei  $q$ ; die spezifischen Wärmen der trockenen Luft bei konstantem Druck und konstantem Volumen seien  $c_{pL}$  bzw.  $c_{vL}$ , die spezifischen Wärmen des Wasserdampfs  $c_{pW}$  und  $c_{vW}$ . Dann gilt für den Adiabatenexponent  $\kappa_{fL}$  der feuchten Luft

$$\kappa_{fL} = \frac{(c_p)_{fL}}{(c_v)_{fL}} = \frac{(1-q)c_{pL} + q c_{pW}}{(1-q)c_{vL} + q c_{vW}}.$$

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\alpha_p := (c_{pW}/c_{pL}) - 1; \quad \alpha_v := (c_{vW}/c_{vL}) - 1$$

kann man hierfür schreiben

$$\kappa_{rL} = \kappa_{trL} \frac{1 + \alpha_p q}{1 + \alpha_v q}. \quad (3.47)$$

Mit den Zahlenwerten

$$c_{pL} = 0,2400 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{grd}}, \quad c_{vL} = 0,1714 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{grd}},$$

$$c_{pW} = 0,4409 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{grd}}, \quad c_{vW} = 0,3307 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{grd}}$$

erhält man  $\alpha_p = 0,8371$ ;  $\alpha_v = 0,9294$ ; und da  $q \ll 1$  ist,

$$\kappa_{rL} = \kappa_{trL} \frac{1 + 0,8371 \cdot q}{1 + 0,9294 \cdot q} \approx \kappa_{trL} (1 - 0,092 \cdot q). \quad (3.48)$$

Man erkennt, daß der Feuchtigkeitseinfluß auf den Adiabatenexponenten  $\kappa_L$  relativ gering ist.

Entsprechend kann man die spezifische Gaskonstante der feuchten Luft  $\mathfrak{R}_{rL}$  als Funktion von  $q$  darstellen:

$$\mathfrak{R}_{rL} = (1 - q) \mathfrak{R}_{trL} + q \mathfrak{R}_{wD} = \mathfrak{R}_{trL} \left[ 1 + \left( \frac{\mathfrak{R}_{wD}}{\mathfrak{R}_{trL}} - 1 \right) q \right]$$

$$= \mathfrak{R}_{trL} \left[ 1 + \left( \frac{1}{1 - \beta_L} - 1 \right) q \right] = \mathfrak{R}_{trL} \left( 1 + \frac{\beta_L}{1 - \beta_L} q \right)$$

bzw. mit  $\beta_L = 0,3780$ :

$$\mathfrak{R}_{rL} = \mathfrak{R}_{trL} (1 + 0,6078 \cdot q). \quad (3.49)$$

Einsetzen von (3.48) und (3.49) in die Formel für  $a(h)$  liefert in guter Näherung

$$a_{rL} \approx a_{trL} \left[ 1 + \frac{1}{2} (0,608 - 0,092) q \right],$$

$$a_{rL} \approx a_{trL} (1 + 0,258 \cdot q). \quad (3.50)$$

### 3.2.5.6. Fiktive Temperaturen und fiktive Höhen

Der Feuchtigkeitseinfluß auf den Druckverlauf und die Schallgeschwindigkeit läßt sich formal durch Einführung sogenannter *fiktiver Temperaturen* (oder *fiktiver Höhen*) beschreiben.

*Unter der fiktiven Temperatur  $\bar{\tau}$  (der fiktiven Höhe  $\bar{h}$ ) versteht man diejenige Temperatur (bzw. Höhe), in der die trockene Luft den gleichen Druck hat wie die feuchte Luft bei der Temperatur  $\tau$  (in der Höhe  $h$ ).*

Entsprechend führt man zur Berücksichtigung des Feuchtigkeitseinflusses auf die Schallgeschwindigkeit eine fiktive Temperatur  $\hat{\tau}$  (bzw. die fiktive Höhe  $\hat{h}$ ) ein.

Bei konstanter Feuchtezahl ( $s = s_0 = \text{const}$ ) lautet die Definitionsgleichung der fiktiven Temperatur  $\hat{\tau}$  somit

$$\frac{p_{rL}}{p_0} = \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{\sigma_1 (1 - \beta_L s_0)} =: \left( \frac{\hat{\tau}}{\tau_0} \right)^{\sigma_1}$$

bzw. nach  $\bar{\tau}$  aufgelöst

$$\bar{\tau} = \tau \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-\beta_L \sigma_1 s_0} \quad (3.51)$$

Da der Exponent  $-\beta_L \sigma_1 s_0$  in den praktisch interessierenden Fällen klein gegenüber Eins ist, kann man (3.51) noch in eine für Zahlenrechnungen bequemere Form bringen:

$$\bar{\tau} = \tau \left( 1 + \frac{\Delta_1^*}{\tau_0} h^* \right)^{-\beta_L \sigma_1 s_0} \approx \tau \left( 1 - \frac{\beta_L \Delta_1^* \sigma_1 s_0}{\tau_0} h \right).$$

Der Faktor von  $h$  läßt sich unter Verwendung von (3.40) und der Definitionsgleichung für  $\sigma_i$  (3.25) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= - \frac{\beta_L \Delta_1^* \sigma_1 s_0}{\tau_0} = \frac{\beta_L \Delta_1^*}{\tau_0} \cdot \frac{g_0}{\Re_{\text{trL}} \Delta_1^*} \cdot \frac{q_0}{1 - (1 - q_0) \beta_L}, \\ \gamma_1 &\approx \frac{\beta_L}{1 - \beta_L} \cdot \frac{g_0}{\Re_{\text{trL}} \tau_0} q_0 \quad (q_0 \ll 1). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\bar{\tau} \approx \tau (1 + \bar{\gamma}_1 h q_0), \quad \bar{\gamma}_1 = 0,07205/\text{km}. \quad (3.52)$$

Der für  $\bar{\gamma}_1$  angegebene Zahlenwert bezieht sich auf die sowjetische Standardatmosphäre SSA-64 (Abschnitt 3.2.6.2.).

Die Definitionsgleichung für die fiktive Temperatur  $\hat{\tau}$  der Schallgeschwindigkeit lautet

$$a_{\text{fL}}^2 = \kappa_{\text{fL}} \Re_{\text{fL}} \tau =: \kappa_{\text{trL}} \Re_{\text{trL}} \hat{\tau}.$$

Hieraus folgt mit (3.48) und (3.49) für  $\hat{\tau}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \tau \frac{\kappa_{\text{fL}} \Re_{\text{fL}}}{\kappa_{\text{trL}} \Re_{\text{trL}}} = \tau (1 - 0,092 \cdot q) (1 + 0,608 \cdot q), \\ \hat{\tau} &\approx \tau (1 + 0,516 \cdot q). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Die fiktive Temperatur  $\bar{\tau}$  für den Druck und die fiktive Temperatur  $\hat{\tau}$  für die Schallgeschwindigkeit stimmen – bei gleicher Luftfeuchte – im allgemeinen nicht überein. Sie haben (im Rahmen dieser Näherungsrechnung) den gleichen Wert lediglich für die Höhe

$$h' = \frac{0,516}{0,07205} \text{ km} = 7,2 \text{ km},$$

wie durch Gleichsetzen von (3.52) und (3.53) folgt.

Beide fiktiven Temperaturen  $\bar{\tau}$ ,  $\hat{\tau}$  sind größer als die tatsächliche (kinetische) Temperatur der feuchten Luft:  $\bar{\tau} > \tau$ ,  $\hat{\tau} > \tau$ .

*Zahlenbeispiel:* Die Wasserdampfkonzentration in der Luft betrage – unabhängig von der Höhe –  $q = 5 \text{ g/kg} = 0,005$ . Für die Höhe  $h = 5 \text{ km}$  liest man in der Tabelle der Standardatmosphäre SSA-64 ab:  $\tau(5 \text{ km}) = 255,63 \text{ °K}$ . Die entsprechenden fiktiven Temperaturen (3.52) und (3.53) lauten ( $q = 0,005$ ;  $\tau = 255,63 \text{ °K}$ ):

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= (255,63 + 0,46) \text{ °K} = 256,09 \text{ °K}; \\ \hat{\tau} &= (255,63 + 0,66) \text{ °K} = 256,29 \text{ °K}. \end{aligned}$$

(Nach Voraussetzung ist  $\bar{\tau}_0 = \hat{\tau}_0 = \tau_{0N}$ .)

Die Temperaturdifferenzen  $(\bar{\tau} - \tau)$  und  $(\hat{\tau} - \tau)$  können leicht in äquivalente Höhendifferenzen umgerechnet werden. Der Temperaturdifferenz  $\Delta\tau$  entspricht die Höhenänderung

$$\Delta h \approx \frac{g_0}{g(h)} \Delta h^* \approx \frac{g_0}{g(h)} \frac{\Delta\tau}{\Lambda_1^*}. \quad (3.54)$$

### 3.2.6. Standardatmosphären

#### 3.2.6.1. Allgemeines

Das in den vorangegangenen Abschnitten entwickelte Schichtmodell der Atmosphäre liefert Formeln für den Luftdruck, die Luftdichte und die Schallgeschwindigkeit als Funktion der geometrischen Höhe  $h$ . Die abgeleiteten Beziehungen enthalten eine Reihe von Parametern  $(p_0, \rho_0, \tau_0, \Lambda_i^*, \kappa_L, \mathfrak{R}_L, g_0)$ , über deren Zahlenwerte noch in geeigneter Weise verfügt werden kann.

Die Einschränkung „in geeigneter Weise“ soll darauf hinweisen, daß die Zahlenwerte nicht aller dieser Parameter frei vorgebar sind, da ein Teil von ihnen durch physikalische Gleichungen verknüpft ist. So müssen z. B.  $p_0, \rho_0, \tau_0$  und  $\mathfrak{R}_L$  der Zustandsgleichung (3.1) genügen.

Wählt man für die Parameter der Modellatmosphäre konkrete Zahlenwerte, so entsteht aus der Modellatmosphäre eine spezielle *Normal- oder Standardatmosphäre*.

Um ein einheitliches Bezugsniveau für Bahnvorhersagen und Leistungsvergleiche von Flugkörpern zu schaffen, werden die Normalatmosphären in den meisten Ländern als staatliche Standards eingeführt. Hierbei ist das Bestreben zu erkennen, die Normalatmosphäre so zu wählen, daß sie der klimatischen Lage des Landes bzw. den Bedürfnissen der betreffenden Waffengattung (Land-, Luft-, Seestreitkräfte) im Mittel möglichst gut entspricht.

Neben den territorial gebundenen bzw. auf einzelne Waffengattungen zugeschnittenen Normalatmosphären gibt es eine Reihe von Atmosphären, die auf Grund internationaler Abkommen über die Ländergrenzen hinaus gültig sind. Eine derartige Normalatmosphäre ist die Atmosphäre CIRA-61<sup>1)</sup> mit ihrer Erweiterung CIRA-65; siehe etwa *Glagolev* [11].

<sup>1)</sup> CIRA  $\hat{=}$  COSPAR International Reference Atmosphere;  
COSPAR  $\hat{=}$  Committee on Space Research.

Die meteorologischen Elemente (Luftdruck, Luftdichte usw.) sind verhältnismäßig starken tages- und jahreszeitlichen Schwankungen unterworfen. Trotzdem kommt man in der artilleristischen Praxis in der Regel mit einer einzigen Normalatmosphäre aus. Lediglich bei Geschossen und Flugkörpern, die sowohl unter tropischen wie auch unter arktischen Wetterbedingungen eingesetzt werden sollen, kann es sich als notwendig erweisen, neben der Schußtafel für den *Standardtag* zusätzliche Schußtafeln für einen *mittleren heißen Tag* und einen *mittleren kalten Tag* vorzubereiten.<sup>1)</sup>

Im folgenden sollen zwei Atmosphären besprochen werden, die für die ballistische Praxis von besonderer Bedeutung sind.

Um die speziellen Parameterwerte der Normalatmosphären von den allgemeinen Parametern der Modellatmosphäre abzuheben, erhalten die Parameterwerte der Normalatmosphären zusätzlich den Index „N“. So bedeutet  $p_0$  den Bodenluftdruck in der Modellatmosphäre,  $p_{0N}$  hingegen einen speziellen für  $p_0$  vorgegebenen Zahlenwert.

### 3.2.6.2. Die Standardatmosphäre 64

Eine der modernsten Normalatmosphären ist die sowjetische Standardatmosphäre GOST 4401-64, im folgenden mit *Atmosphäre SSA-64* bezeichnet. Die Atmosphäre SSA-64 hat die sowjetische Normalatmosphäre WSA-60<sup>2)</sup> abgelöst, die im wesentlichen mit der weitverbreiteten ICAO-Atmosphäre übereinstimmt.

Die Atmosphäre SSA-64 geht aus der in Abschnitt 3.2.4. behandelten Modellatmosphäre durch folgende Parameterwahl hervor:

– Lufttemperatur am Boden:	$\tau_{0N} = 15^\circ\text{C} \cong 288,15^\circ\text{K};$
– Luftdruck am Boden:	$p_{0N} = 760 \text{ Torr};$
– Luftdichte am Boden:	$\rho_{0N} = 1,2250 \text{ kg/m}^3;$
– Schallgeschwindigkeit am Boden:	$a_{0N} = 340,28 \text{ m/s};$
– Fallbeschleunigung am Boden:	$g_{0N} = 9,80665 \text{ m/s}^2;$
– Adiabatenexponent der Luft am Boden:	$\kappa_{LN} = 1,4000;$

<sup>1)</sup> Man findet hierüber Näheres z.B. in [12].

<sup>2)</sup> WSA-60: *Временная стандартная атмосфера 1960*. Nähere Angaben über diese Atmosphäre findet man z.B. in [13].



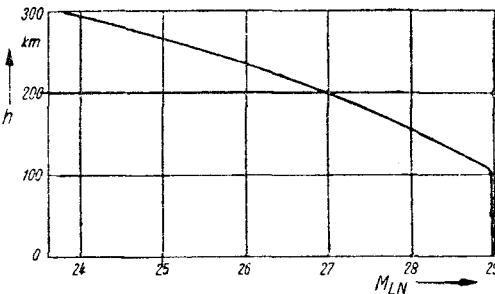
- Molekulargewicht der Luft am Boden:  $\mathfrak{M}_{LON} = 28,966$ ;
- dynamische Zähigkeit der Luft am Boden:  $\mu_{ON} = 1,7894 \cdot 10^{-4}$  Poise;
- mittlere freie Weglänge der Luftmoleküle am Boden:  $\bar{\lambda}_{ON} = 6,3741 \cdot 10^{-8}$  m;
- mittlerer Erdradius:  $R_{EN} = 6371210$  m.

Bis 95 km Höhe wird das *Molekulargewicht der Luft*  $\mathfrak{M}_{LN}$  als konstant angenommen; von 95 ... 110 km Höhe verringert sich  $\mathfrak{M}_{LN}$  gemäß

$$\mathfrak{M}_{LN} = 23 + 5,966 \sqrt{1 - \left(\frac{h - 35}{145}\right)^2};$$

$h$  ist in Kilometern zu messen. Bei  $h = 110$  km erreicht das Molekulargewicht den Wert  $\mathfrak{M}_{LN} = 28,934$ .

Von  $h = 110$  km bis  $h = 160$  km nimmt  $\mathfrak{M}_{LN}$  linear ab; für  $h = 160$  km hat  $\mathfrak{M}_{LN}$  den Wert 27,900. Bei noch größeren Höhen erfolgt die Abnahme von  $\mathfrak{M}_{LN}$  nichtlinear (siehe Bild 3.5).



*Bild 3.5*  
Molekulargewicht  $\mathfrak{M}_{LN}$  der Luft als Funktion der geometrischen Höhe  $h$  (Normalatmosphäre SSA-64)

Die Originaltabelle der Standardatmosphäre SSA-64 umfaßt den Bereich von  $h = -2$  km bis  $h = 300$  km, wobei die Angaben für den Bereich  $200 \text{ km} \leq h \leq 300$  km nur den Charakter einer Empfehlung haben, also nicht verbindlich sind.

Der Hauptbereich von  $h = 0$  bis  $h = 200$  km ist in 11 Schichten mit jeweils konstantem geopotentiellen Temperaturgradienten unterteilt; die Schichtgrenzen und Temperaturgradienten können Tabelle 3.2 entnommen werden.

Tabelle 3.2 *Schichtgrenzen und Temperaturgradienten der Atmosphäre SSA-64*

Nummer der Schicht $i$	Schichtgrenzen in km		Grenztemperaturen in °K		Temperaturgradient in $\text{grad}^*/\text{km}^*$ $\Delta_{iN}^*$
	$h_{i-1}$	$h_i$	$\tau_{i-1}$	$\tau_i$	
1	0	11	288,15	216,66	-6,51122
2	11	25	216,66	216,66	0
3	25	46	216,66	274,00	2,76098
4	46	54	274,00	274,00	0
5	54	80	274,00	185,00	-3,49544
6	80	95	185,00	185,00	0
7	95	110	185,00	257,36	5,00000
8	110	120	257,36	332,24	8,01741
9	120	150	332,24	980,05	23,46357
10	150	160	980,05	1155,3	19,87408
11	160	200	1155,3	1226,8	3,08461

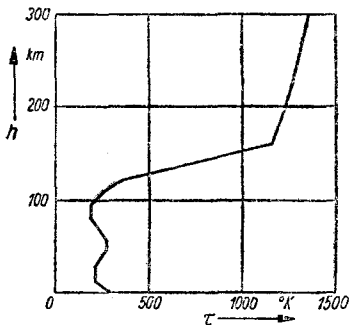


Bild 3.6  
*Kinetische Temperatur  $\tau$  der Luft als Funktion der geometrischen Höhe  $h$  (Normalatmosphäre SSA-64)*

Die Originaltabelle der Atmosphäre SSA-64 enthält als Funktion der geometrischen Höhe  $h$ :

- die kinetische Temperatur  $\tau(h)$  (nach der *Celsius*- und *Kelvin*-Skala),
- den Luftdruck  $p(h)$  (in mbar, Torr und  $\text{kp}/\text{cm}^2$ ),
- den relativen Luftdruck  $p(h)/p_{0N}$ ,
- die Luftdichte  $\rho(h)$  (in  $\text{kg}/\text{m}^3$  und  $\text{kp} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4$ ),
- die relative Luftdichte  $\Delta = \rho(h)/\rho_{0N}$ ,
- die Quadratwurzel aus  $\Delta$ ,
- die Schallgeschwindigkeit  $a(h)$  (in m/s und km/h),
- die dynamische Zähigkeit der Luft  $\mu(h)$  (in Poise und  $\text{kp} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ ),

- die kinematische Zähigkeit der Luft  $\nu(h)$  (in  $\text{m}^2/\text{s}$ ),
- die Fallbeschleunigung  $g(h)$  (in  $\text{m}/\text{s}^2$ ) und
- die mittlere freie Weglänge  $\bar{\lambda}$  der Luftmoleküle (in  $\text{m}$ ).

Ein Auszug aus der Tafel der Atmosphäre SSA-64 ist im Anhang zu diesem Buch enthalten.

Der Verlauf der Temperatur  $\tau(h)$ , des Luftdrucks  $p(h)$ , der Luftdichte  $\rho(h)$  sowie der Schallgeschwindigkeit  $a(h)$  ist in Bild 3.6 bis 3.8 veranschaulicht.

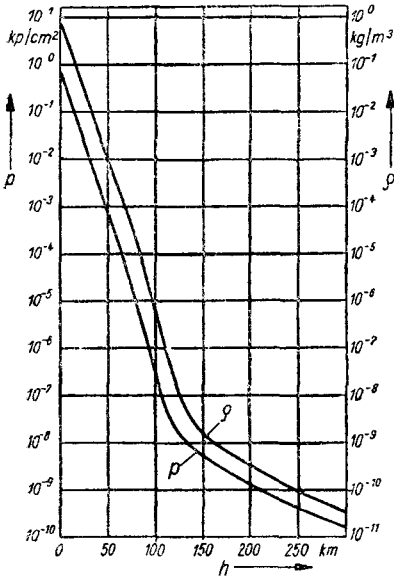


Bild 3.7  
Luftdruck  $p$  und Luftdichte  $\rho$  als  
Funktion der geometrischen Höhe  $h$   
(Normalatmosphäre SSA-64)

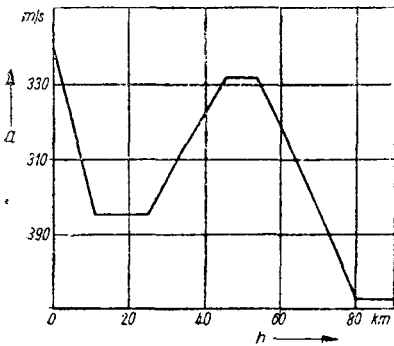


Bild 3.8  
Schallgeschwindigkeit  $a$  in der Luft  
als Funktion der geometrischen  
Höhe  $h$   
(Normalatmosphäre SSA-64)

### 3.2.6.3. Die Artillerie-Normalatmosphäre

Die Standardatmosphäre der Armeen der sozialistischen Staaten ist die sogenannte *Artillerie-Normalatmosphäre*, im weiteren als *Atmosphäre ANA* bezeichnet. Diese Normalatmosphäre wurde 1927 in der Sowjetunion aufgestellt; sie ist später auf einen größeren Höhenbereich erweitert worden.

Die Struktur der Atmosphäre ANA unterscheidet sich in mehreren Punkten erheblich von der Struktur der modernen Standardatmosphären. Wie bei der Atmosphäre SSA-64 sind isotherme Schichten und Schichten mit konstantem Temperaturgradienten vorhanden; es gibt jedoch auch zwei Bereiche, in denen die Temperatur eine quadratische Funktion der geometrischen Höhe  $h$  ist. Weiterhin wird angenommen:

- Die Fallbeschleunigung ist konstant:  $g = g_0 = const.$
- Die relative Luftfeuchte am Boden beträgt  $r_0 = 50\%$ .

Die wichtigsten Parameter der Atmosphäre ANA lauten:

- Lufttemperatur am Boden:  $\tau_{0N} = 15^\circ\text{C};$
- Luftdruck am Boden:  $p_{0N} = 750 \text{ Torr};$
- Luftdichte am Boden:  $\rho_{0N} = 1,206 \text{ kg/m}^3;$
- spezifische Gaskonstante der Luft:  $R_{LN} = 29,27 \text{ kpm}/(\text{kg} \cdot \text{grad});$
- Schallgeschwindigkeit am Boden:  $a_{0N} = 340,79 \text{ m/s};$
- Fallbeschleunigung:  $g_{0N} = 9,81 \text{ m/s}^2;$
- relative Luftfeuchte:  $r_{0N} = 50\%.$

Der Feuchtigkeitseinfluß wird durch Einführung einer virtuellen Lufttemperatur am Boden gemäß (3.35) berücksichtigt.

Man entnimmt für  $\tau_{0N} = 15^\circ\text{C}$  Tabelle 3.1, Seite 108:  $\mathcal{E}(15^\circ\text{C}) = 17,042 \text{ mbar}.$  Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} (\tau_v)_{0N} &= \frac{\tau_{0N}}{1 - \beta_L r_{0N} \frac{\mathcal{E}(\tau_{0N})}{p_{0N}}} = \frac{288,16^\circ\text{K}}{1 - 0,3780 \cdot 0,5 \cdot \frac{12,783}{750}} \\ &= \frac{288,16^\circ\text{K}}{1 - 0,00322} = 289,09^\circ\text{K}. \end{aligned}$$

Bei der Aufstellung der Atmosphäre ANA wurde – mit der Genauigkeit der damals zur Verfügung stehenden Werte –  $(\tau_v)_{0N} = 288,9^\circ\text{K}$  gesetzt.

Die Berücksichtigung des Einflusses der Luftfeuchte auf den Druckverlauf  $p(h)$  durch Einführung einer fiktiven Bodentemperatur  $(\tau_v)_0$  ist näherungsweise immer dann möglich, wenn die Feuchtezahl  $s$  nicht von der Höhe abhängt.

Für diesen Fall war in Abschnitt 3.2.5.4. abgeleitet worden

$$\frac{p_{fL}(h)}{p_0} = \left(1 + \frac{\Lambda_1^*}{\tau_0} h^*\right)^{\sigma_1 (1 - \beta_L s_0)} = \left[ \left(1 + \frac{\Lambda_1^*}{\tau_0} h^*\right)^{1 - \beta_L s_0} \right]^{\sigma_1},$$

$$\frac{p_{fL}(h)}{p_0} \approx \left[1 + \frac{\Lambda_1^*}{\tau_0} (1 - \beta_L s_0) h^*\right]^{\sigma_1}. \quad (3.55)$$

Definiert man eine fiktive Bodentemperatur  $(\tau_v)_{0N}$  gemäß

$$(\tau_v)_{0N} := \tau_0 / (1 - \beta_L s_0),$$

so erhält man aus (3.55) die Druckformel für trockene Luft und die Bodentemperatur  $(\tau_v)_{0N}$ :

$$\frac{p_{fL}(h)}{p_0} \approx \left[1 + \frac{\Lambda_1^*}{(\tau_v)_{0N}} h^*\right]^{\sigma_1},$$

was zu zeigen war.

Ausgehend von dem Bodenwert  $(\tau_v)_{0N} = 288,9^\circ\text{K}$ , nimmt die Temperatur in der Atmosphäre ANA bis zur Höhe  $h = 9,3$  km linear ab:

$$\tau(h) = (\tau_v)_{0N} + \Lambda_1 h, \quad \Lambda_1 = -6,328 \text{ grad/km}.$$

Von  $h = 9,3$  km bis  $h = 12$  km ist die Temperatur  $\tau(h)$  eine quadratische Funktion der Höhe  $h$ :

$$\tau(h) = A_0 + A_1 (h - 9,3 \text{ km}) + A_2 (h - 9,3 \text{ km})^2;$$

$$A_0 := \tau(9,3 \text{ km}) = 230,0^\circ\text{K},$$

$$A_1 := \Lambda_1 = -6,328 \text{ grad/km}, \quad A_2 := 2,344 \text{ grad/km}^2.$$

Für Höhen über 12 km wird die Temperatur  $\tau$  als konstant angenommen:

$$\tau(h) = 221,5^\circ\text{K} \quad (h \geq 12 \text{ km}).$$

Hieran schließt sich wieder eine Übergangsschicht an, in der die Temperatur  $\tau$  eine quadratische Funktion der Höhe  $h$  ist.

Die Schichtgrenzen und Temperaturgradienten der Atmosphäre ANA sind in Tabelle 3.3 zusammengestellt.

Tabelle 3.3 *Schichtgrenzen und Temperaturgradienten der Atmosphäre ANA*

Nummer der Schicht <i>i</i>	Schichtgrenzen in km		Grenztemperaturen in °K		Temperaturgradient in grad/km
	$h_{i-1}$	$h_i$	$\tau_{i-1}$	$\tau_i$	$\Delta_{iN}$
1	0	9,3	288,9	230,0	-6,328
2	9,3	12,0	230,0	221,5	$\Delta_{2N}$
3	12,0	31,0	221,5	221,5	0
4	31,0	35,0	221,5	233,5	$\Delta_{4N}$
5	35,0	50,0	233,5	323,5	+6
6	50,0	60,0	323,5	323,5	0
7	60,0	80,0	323,5	203,5	-6

$$\Delta_{2N} = -6,328 + 2,344 \cdot (h - 9,3 \text{ km}) \text{ km}^{-1}$$

$$\Delta_{4N} = \frac{3}{4} (h - 31 \text{ km}) \text{ km}^{-1}$$

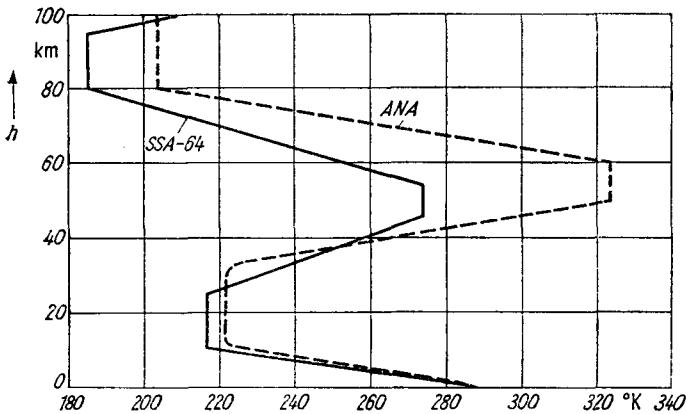


Bild 3.9 Kinetische Temperatur  $\tau$  der Luft als Funktion der geometrischen Höhe  $h$  für die Normalatmosphären SSA-64 und ANA

Der Temperaturverlauf der Atmosphäre ANA ist in Bild 3.9 wiedergegeben; zum Vergleich ist auch der Temperaturverlauf der Atmosphäre SSA-64 eingezeichnet.

Der quadratische Temperaturverlauf bewirkt eine stetige Änderung des Temperaturgradienten mit der Höhe. Bei den modernen Standard-

atmosphären, wie z. B. der Atmosphäre SSA-64, weist der Verlauf des Temperaturgradienten bereits in den unteren Atmosphärenschichten Sprünge auf; die mathematische Behandlung von einigen Aufgaben der Störungsrechnung wird hierdurch erheblich erschwert.

### 3.3. Die aerodynamischen Kräfte bei der stationären Umströmung eines Geschosses

#### 3.3.1. Der allgemeine Ansatz für die aerodynamischen Kräfte

Bei der Bewegung eines Geschosses durch die Atmosphäre ist das Geschoß aerodynamischen Kräften unterworfen, die die Gestalt der Flugbahn und den Verlauf der Bahnelemente (mehr oder weniger stark) beeinflussen. Die Resultierende dieser Kräfte setzt sich aus den senkrecht zur Geschoßoberfläche wirkenden Druckkräften und den tangential zur Geschoßoberfläche gerichteten Reibungskräften zusammen; sie greift an dem Geschoß im *Druckpunkt*  $P$  an.

Während die Lage des *Schwerpunkts*  $S$  ausschließlich von der Massenverteilung im Innern des Geschosses abhängt, wird die Lage des Druckpunkts nur von den Kräften an der Geschoßoberfläche bestimmt.

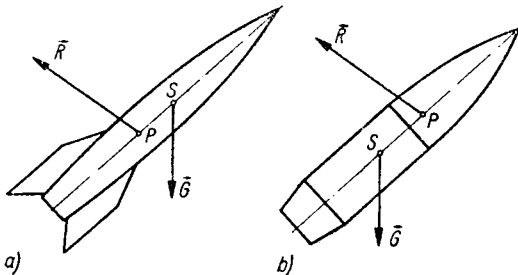


Bild 3.10  
Relative Lage von Druckpunkt  $P$  und Schwerpunkt  $S$   
a – bei flügelstabilisierten Geschossen; b – bei drallstabilisierten Geschossen

Druckpunkt  $P$  und Schwerpunkt  $S$  fallen im allgemeinen nicht zusammen. Bei Geschossen mit großflächigem Leitwerk liegt der Druckpunkt näher zum Geschoßboden zu als der Schwerpunkt, bei konventionellen Geschossen ohne Leitwerk befindet sich der Druckpunkt zwischen Schwerpunkt und Geschoßspitze (siehe Bild 3.10).

Die Größe des Abstands Druckpunkt/Schwerpunkt hat wesentlichen Einfluß auf die Stabilität des Geschoßfluges.

Im folgenden werden klassische, nichtrotierende Geschosse betrachtet, die eine (relativ zur Erdoberfläche) ruhende Atmosphäre mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  durchqueren.

Flugbahnberechnungen zeigen, daß die hierbei gewonnenen Ergebnisse zur Vorhersage der Schwerpunktsbahnen bei der instationären Bewegung eines rotierenden Geschosses benutzt werden können (siehe die Formulierung des klassischen Bahnmodells in Kapitel 4).

Die Translationsbewegung eines Geschosses mit der Geschwindigkeit  $v$  durch die ruhende Luft ist aerodynamisch der Anströmung eines ruhenden Geschosses mit der Geschwindigkeit  $-v$  gleichwertig.<sup>1)</sup> In beiden Fällen ergeben sich die gleichen Kräfte (*Relativitätsprinzip der Aerodynamik*). Man macht hiervon in der experimentellen Aerodynamik regen Gebrauch.

Bei der Anströmung eines ruhenden Geschosses mit konstanter Geschwindigkeit  $v_a$  stellt sich ein stationärer Zustand des Strömungsfelds ein. Die physikalischen Parameter des Strömungsfelds in der Umgebung des Geschosses hängen dann nicht mehr explizit von der Zeit  $t$  ab, insbesondere ist die Resultierende  $R$  der aerodynamischen Kräfte konstant nach Betrag und Richtung.

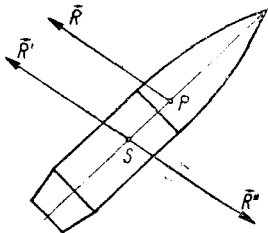


Bild 3.11

Ersatz der im Druckpunkt  $P$  angreifenden Resultierenden  $R$  der aerodynamischen Kräfte durch eine Kraft  $R'$ , die im Schwerpunkt  $S$  angreift, und ein Moment  $M = \{R, R''\}$  um den Schwerpunkt

Hinsichtlich ihrer Wirkung auf das Geschöß kann die im Druckpunkt  $P$  angreifende Resultierende  $R$  durch eine im Schwerpunkt  $S$  angreifende Kraft  $R' = R$  und ein Moment  $M$  um die zur Richtung von  $R$  senkrechte Achse durch  $S$  ersetzt werden; das Moment  $M$  wird durch die antiparallelen Kräfte  $R$  und  $R'' = -R'$  gebildet (Bild 3.11). Für die Beträge dieser Kräfte gilt

$$|R| = |R'| = |R''| = R.$$

<sup>1)</sup> Anströmgeschwindigkeiten werden immer auf die ungestörte Strömung bezogen (*Anströmgeschwindigkeit im Unendlichen*).



In der Ballistik ist es üblich, die Kraft  $\vec{R}'$  in den (Stirn-) *Widerstand*  $\vec{W}$ , den *Auftrieb*  $\vec{A}$  und die *Querkraft*  $\vec{Q}$  zu zerlegen.

Der Widerstand  $\vec{W}$  ist die Komponente von  $\vec{R}'$  in Richtung der Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}$  des Geschosßschwerpunkts  $S$ . Der Auftrieb  $\vec{A}$  ist senkrecht zu  $\vec{W}$  gerichtet und liegt in der Ebene, die von der Längsachse des Geschosßes und dem Vektor  $\vec{v}$  aufgespannt wird, der sogenannten *Widerstandsebene*. Die Querkraft  $\vec{Q}$  steht senkrecht auf der Widerstandsebene.

Die Bezeichnung *Auftrieb* darf nicht zu der Annahme verführen,  $\vec{A}$  weise stets vertikal nach oben (entgegengesetzt zur Richtung der Fallbeschleunigung). Der Leser veranschauliche sich die möglichen Richtungen von  $\vec{A}$  an einer Skizze!

Liegt die Kraft  $\vec{R}'$  in der Widerstandsebene, dann tritt keine Querkraft auf ( $\vec{Q} = 0$ ). In diesem Spezialfall ergibt sich die in Bild 3.12 skizzierte Zerlegung.

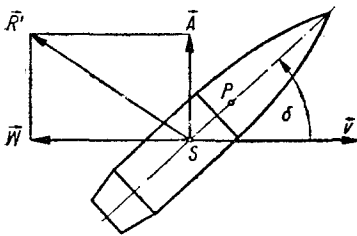


Bild 3.12  
Zerlegung der Kraft  $\vec{R}'$  in den (Stirn-)Widerstand  $\vec{W}$  und den Auftrieb  $\vec{A}$

Für die Beträge  $W$ ,  $A$ ,  $Q$ ,  $M$  der Kräfte  $\vec{W}$ ,  $\vec{A}$  und  $\vec{Q}$  und des Moments  $\vec{M}$  findet man aus Ähnlichkeits- und Dimensionsbetrachtungen die Darstellungen<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \rho v^2 F c_w, & A &= \frac{1}{2} \rho v^2 F c_a, \\ Q &= \frac{1}{2} \rho v^2 F c_q, & M &= \frac{1}{2} \rho v^2 F l c_m. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Hierin bezeichnet  $\rho$  die Luftdichte,  $v$  die Bahngeschwindigkeit (Schwerpunktsgeschwindigkeit) des Geschosßes,  $F$  den (maximalen) Geschosßquerschnitt und  $l$  eine charakteristische Länge des Geschosßes. Die dimensionslosen Koeffizienten  $c_w$ ,  $c_a$ ,  $c_q$  und  $c_m$  heißen *Widerstandsbeiwert*, *Auftriebsbeiwert*, *Querkraftbeiwert* bzw. (*Haupt-*)*Momentenbeiwert*.

<sup>1)</sup> Hinsichtlich der Begründung der Ansätze sei etwa auf [2], S. 35f., oder [14] verwiesen.

Die aerodynamischen Beiwerte  $c_w$ ,  $c_a$ ,  $c_q$ ,  $c_m$  sind keine Konstanten, sondern Funktionen der dimensionslosen Variablen *Mach*-Zahl  $M$ , *Reynolds*-Zahl  $Re$ , *Knudsen*-Zahl  $Kn$  sowie des Anstellwinkels  $\delta$  der Symmetrieachse des Geschosses gegenüber der Bahntangente.<sup>1)</sup> Der Ansatz für den Betrag des Luftwiderstands  $W$  lautet damit ausführlich

$$W = \frac{1}{2} \rho v^2 F c_w(M, Re, Kn; \delta), \quad (3.57)$$

die Ansätze für  $A$ ,  $Q$  und  $M$  haben eine entsprechende Gestalt. Die dimensionslosen Variablen  $M$ ,  $Re$  und  $Kn$  können durch die physikalischen Parameter des Strömungsfelds in der Umgebung des Geschosses dargestellt werden.

Bezeichnet man die dynamische Zähigkeit der Luft mit  $\mu$ , die mittlere freie Weglänge der Luftmoleküle mit  $\bar{\lambda}$  und die lokale Schallgeschwindigkeit in der Luft mit  $a$ , so gilt

$$M = \frac{v}{a}, \quad Re = \frac{\rho l_0 v}{\mu}, \quad Kn = \frac{\bar{\lambda}}{l_0}; \quad (3.58)$$

$l_0$  ist eine (hier nicht näher erklärte) charakteristische Längenabmessung des Strömungsfelds.

Zwischen der *Knudsen*-Zahl, der *Mach*-Zahl und der *Reynolds*-Zahl besteht eine einfache Beziehung.

Für die mittlere freie Weglänge  $\bar{\lambda}$  der Luftmoleküle liefert die kinetische Gastheorie die Formel<sup>2)</sup>:

$$\bar{\lambda} = \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{\pi}{2 \Re_L \tau}}.$$

Hieraus folgt durch eine einfache Umformung

$$\bar{\lambda} = l_0 \cdot \frac{\mu}{\rho l_0 v} \cdot \frac{v}{a} \sqrt{\frac{\pi \Re_L}{2}},$$

1) Von der thermodynamischen „Aufheizung“ der Geschoßoberfläche durch die Luftreibung sowie dem Wärmeübergang zwischen Geschoßkörper und umgebender Luft wird im folgenden abgesehen.

2) In der englischsprachigen Literatur wird diese Beziehung meist als *Formel von Chapman* bezeichnet.

oder mit  $M$ ,  $Re$  und  $Kn$  aus (3.58):

$$Kn = \sqrt{\frac{\pi \kappa_L}{2}} \frac{M}{Re} = 1,4829 \frac{M}{Re}. \quad (3.59)$$

Der Quotient  $M/Re$  hat die gleiche Größenordnung wie die *Knudsen-Zahl*.

### 3.3.2. Strömungstypen

Die *Mach-Zahl*  $M$  ist ein Maß für die Kompressibilität der Luft, die *Reynolds-Zahl*  $Re$  charakterisiert den Einfluß der Zähigkeit, die *Knudsen-Zahl*  $Kn$  gibt den Grad der Verdünnung der Luft an. Die Zahlenwerte dieser Parameter können somit dazu dienen, die Strömungsfelder in der Umgebung von Geschossen zu klassifizieren.

Für die klassische Ballistik ist die Abhängigkeit der aerodynamischen Beiwerte von der *Mach*- und der *Knudsen-Zahl* von besonderer Bedeutung. Im folgenden sollen deshalb nur die Klassifikationen nach der Größe dieser Parameter wiedergegeben werden. Hinsichtlich der Klassifizierung von Gasströmungen nach der Stärke des Zähigkeitseinflusses sei der Leser auf die Lehrbücher der Strömungslehre verwiesen.

#### 3.3.2.1. Klassifizierung von Strömungen nach der Größe der Knudsen-Zahl

Nach dem Grad der Verdünnung der Luft lassen sich folgende charakteristische Strömungstypen unterscheiden [15]<sup>1)</sup>:

- a) die kontinuierliche Strömung:  $Kn \ll 1$ ;
- b) die Übergangsströmung:  $10^{-3} \leq Kn \leq 0,25$ ;
- c) die Molekularströmung:  $Kn \gg 1$ .

Bei der Berechnung von Flugbahnen kurzer und mittlerer Reichweite, die in den unteren Schichten der Atmosphäre verlaufen, ist längs der gesamten Bahn  $Kn = \bar{\lambda}/l_0 \ll 1$ . Man kann deshalb bei der Aufstellung von Bahnmodellen für derartige Bahnen die diskrete Struktur der Atmosphäre vernachlässigen und die Luft als physikalisches Kontinuum behandeln.

<sup>1)</sup> Neben dieser Klassifizierung sind auch andere Einteilungen gebräuchlich; siehe etwa [16], Kapitel 6.

In Flughöhen über 150 km ist die mittlere freie Weglänge der Luftmoleküle  $\bar{\lambda}$  von der Größenordnung der Abmessungen des Flugkörpers. An der Oberfläche des Flugkörpers reflektierte Luftmoleküle stoßen erst in großer Entfernung vom Flugkörper mit Luftmolekülen der ungestörten Strömung zusammen; die Struktur des Strömungsfelds wird durch das Vorhandensein des Flugkörpers praktisch nicht verändert. Die in einer derartigen Molekularströmung auf den Flugkörper ausgeübten aerodynamischen Kräfte resultieren somit nur zu einem geringen Teil aus Druckdifferenzen im Strömungsfeld, hängen aber entscheidend von dem Charakter der Wechselwirkung zwischen stoßenden Molekülen und Geschoßoberfläche ab.

Obwohl bei der Bewegung von Flugkörpern in großen Höhen die aerodynamischen Kräfte im Vergleich zu den Gravitationskräften klein sind, können sie bei längerem Einwirken wesentlichen Einfluß auf den Bewegungsablauf gewinnen, wie die Analyse der Parameter von Satellitenbahnen zeigt.

Die Berechnung der in Molekularströmungen auf Flugkörper ausgeübten Kräfte ist Gegenstand der sogenannten *Superaerodynamik*. Eine gute Einführung in diesen Problembereich bietet das Buch von Šidlovskij [17]. Man findet dort auch weitere Literaturangaben.

### 3.3.2.2. Klassifizierung von Strömungen nach der Größe der Mach-Zahl

Beschränkt man sich auf kontinuierliche Strömungen ( $Kn \ll 1$ ), so kann man den Raum, der das Geschoß umgibt, in zwei getrennte Gebiete unterteilen: in eine sehr dünne Schicht, die sich eng an die Oberfläche des Flugkörpers anschmiegt, die sogenannte *Grenzschicht*, und den übrigen Außenraum. Die Grenzschicht ist dadurch gekennzeichnet, daß in ihr die Zähigkeit der Luft einen wesentlichen Einfluß auf den Strömungsvorgang ausübt; in dem übrigen Außenraum ist die Zähigkeit so klein, daß die Strömung als praktisch reibungsfrei angesehen werden darf.

In Abhängigkeit von dem Grad der Kompressibilität werden die Grenzschicht und der äußere Strömungsbereich in eine *inkompressible Unterschallströmung*, eine *kompressible Unterschallströmung*, eine *Transschallströmung*, eine *Überschallströmung* und eine *Hyperschallströmung* unterteilt.

Die Klassifizierung des Strömungsfelds in der Umgebung eines Ge-

schosses in eine der vorgenannten Strömungstypen erfolgt in der Regel durch Angabe der globalen *Mach*-Zahl  $M = v/a$ , die man erhält, wenn man  $v$  als Relativgeschwindigkeit zwischen Geschoß und ungestörter Strömung und  $a$  als Schallgeschwindigkeit in der ungestörten Strömung interpretiert.

Obwohl die Struktur des Strömungsfelds nicht nur von der globalen *Mach*-Zahl, sondern auch von der Geometrie und dem Anstellwinkel des Geschosses abhängt, lassen sich die in Tabelle 3.4 angegebenen Zuordnungen treffen.

Tabelle 3.4 *Klassifizierung von Gasströmungen an Hand der Mach-Zahl* (nach [15])

Strömungstyp	<i>Mach</i> -Zahl $M$	
	von	bis
inkompressible Unterschallströmung	0	0,5
kompressible Unterschallströmung	0,5	0,8
Transschallströmung	0,8	1,2
Überschallströmung	1,2	5
Hyperschallströmung	5	$\infty$

Auch dann, wenn die globale *Mach*-Zahl kleiner als Eins ist, können in der Nähe der Geschoßoberfläche Strömungsbereiche mit *lokalen Mach*-Zahlen  $M > 1$  vorhanden sein.

Das *Transschallgebiet* beginnt bei der *globalen Mach*-Zahl, bei der erstmalig eine *lokale Mach*-Zahl den Wert  $M = 1$  erreicht; an der oberen Grenze des Transschallgebiets sind sämtliche *lokalen Mach*-Zahlen  $M \geq 1$ . Die Ausdehnung des Transschallgebiets hängt von den individuellen Eigenschaften des betreffenden Flugkörpers ab; das in Tabelle 3.4 angegebene Intervall  $0,8 < M < 1,2$  dient nur zur Orientierung.

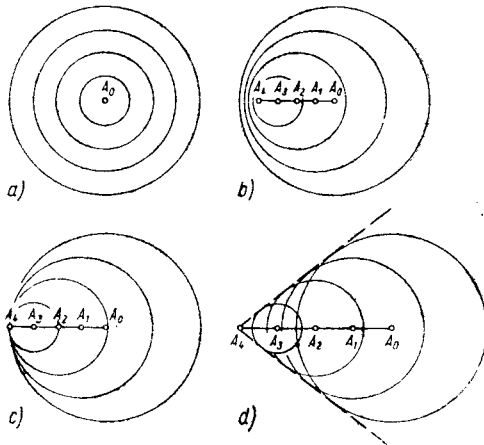
### 3.3.2.3. *Unstetigkeitsflächen in Strömungen*

In dem Strömungsfeld in der Umgebung des Geschosses können – in Abhängigkeit von den *lokalen Strömungsverhältnissen* – Flächen vorhanden sein, auf denen die Strömungsparameter oder deren Ableitungen Sprünge aufweisen.

Sind die Strömungsparameter stetig, jedoch nicht alle ihrer Ableitungen, so bezeichnet man die Sprungfronten als *Unstetigkeitsflächen 1. Art* oder *Flächen schwacher Störungen*.

Erfahren die Strömungsparameter Sprünge, so spricht man von *Unstetigkeitsflächen 2. Art* oder *Flächen starker Störungen*.<sup>1)</sup>

Eine Unstetigkeitsfläche 1. Art ist der sogenannte *Machsche Kegel*, der sich bei der Bewegung eines Geschosses mit Überschallgeschwindigkeit in einiger Entfernung von dem Flugkörper ausbildet; Unstetigkeitsflächen 2. Art sind die Stoßfronten (Wellenfronten von Verdichtungsstößen) unmittelbar vor der Geschößspitze.



**Bild 3.13**

Zur Entstehung des Machschen Kegels

- a – Fluggeschwindigkeit  $v = 0$ ;
- b – Fluggeschwindigkeit  $v < a$ ;
- c – Fluggeschwindigkeit  $v = a$ ;
- d – Fluggeschwindigkeit  $v > a$

Das Zustandekommen des Machschen Kegels läßt sich anschaulich folgendermaßen verstehen:

Im Punkt  $A_0$  (Bild 3.13 a) befindet sich eine punktförmige Störungsquelle, die in konstanten Zeitabständen  $\Delta t$  einen (schwachen) Störimpuls erzeugt. Diese Störungen breiten sich mit der Schallgeschwindigkeit  $a$  kugelförmig aus.

Ruht die Störungsquelle relativ zur umgebenden Luft, so sind diese Kugelwellen konzentrisch; ihr Abstand ist – unabhängig von der Ausbreitungsrichtung – gleich  $a \Delta t$ .

<sup>1)</sup> Auf die physikalischen Besonderheiten der Unstetigkeitsflächen 1. und 2. Art kann an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Der an einer detaillierten Darstellung interessierte Leser sei verwiesen auf *Serrin, J.: Mathematical principles of classical fluid mechanics*, in: Handbuch der Physik, Bd. VIII/1. Berlin; Göttingen; Heidelberg 1959. (Russ. Übers.: *Серрин, Дж.: Математические основы классической механики жидкости. Москва 1963.*)

Bewegt sich die Störungsquelle mit der Geschwindigkeit  $v < a$  relativ zur umgebenden Luft, dann ergibt sich eine Schar exzentrischer Kugelwellen: In der Zeit  $\Delta t$  zwischen zwei Impulsen hat sich das Störungszentrum um die Strecken  $\overline{A_0A_1} = \overline{A_1A_2} = \dots = v \Delta t$  fortbewegt (Bild 3.13 b).

Für  $v = a$  berühren sich sämtliche Kugelwellen in einem Punkt (Bild 3.13 c).

Übersteigt die Geschwindigkeit  $v$  der Störungsquelle die Schallgeschwindigkeit  $a$  ( $v > a$ ), dann überlagern sich die Kugelwellen (Bild 3.13 d).

Bei kontinuierlicher Erzeugung schwacher Störungen ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) entsteht durch Interferenz der Kugelwellen (*Huygensches Prinzip*) eine kegelförmige Unstetigkeitsfront, der sogenannte *Machsche Kegel*.

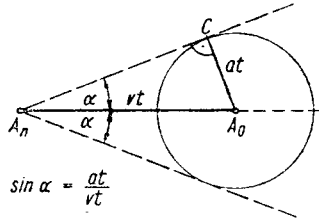


Bild 3.14  
Zur Definition des Machschen Winkels  $\alpha$

Für den halben Öffnungswinkel  $\alpha$  des *Machschen Kegels*, den sogenannten *Machschen Winkel*, gilt (siehe Bild 3.14):

$$\sin \alpha = \frac{\overline{A_0C}}{A_0A_n} = \frac{at}{vt} = \frac{a}{v} = \frac{1}{M}. \quad (3.60)$$

Bei Unterschallgeschwindigkeit der Störungsquelle breiten sich die Störungen in den gesamten Raum aus, bei Überschallgeschwindigkeit wird nur das Innere des *Machschen Kegels* erfaßt, wie man aus Bild 3.13 erkennt.

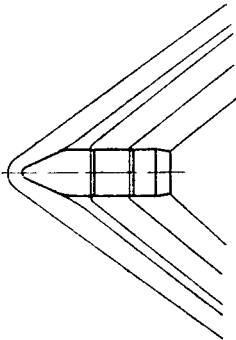


Bild 3.15  
Abrundung der Spitze des *Machschen Kegels* bei Auftreten eines Verdichtungsstoßes

Bewegt sich eine Störungsquelle endlicher Ausdehnung (ein reales Geschoß) mit Überschallgeschwindigkeit durch die Luft, so weicht in Geschoßnähe die Gestalt der Unstetigkeitsfläche in der Regel von der Kegelform ab: Durch Aufstauung der Luft bildet sich vor der Geschoßspitze ein gekrümmter Verdichtungsstoß aus, der von einem starken Druck- und Temperaturanstieg begleitet ist (Bild 3.15). Weitere Verdichtungsstöße können an hervorspringenden Teilen des Geschosses (wie Führungsringen, Leitwerk) entstehen.

In den Verdichtungsstößen wird ein Teil der kinetischen Energie des Geschosses in Wärme umgewandelt. Dieser Verlust an kinetischer Energie hat eine Verringerung der Reichweite und der Durchschlagswirkung des Geschosses zur Folge. Der Geschoßkonstrukteur ist deshalb bemüht, durch eine geeignete Gestaltung der Geschoßoberfläche das Auftreten von Verdichtungsstößen nach Möglichkeit zu vermeiden.

### 3.3.3. Der Widerstandsbeiwert und seine Komponenten

In der Ballistik wird der Luftwiderstand pauschal durch (3.57) beschrieben; man abstrahiert von den strömungsmechanischen Prozessen, die zur Entstehung dieser Kraft führen. Im Rahmen dieser phänomenologischen Beschreibung ist der Widerstandsbeiwert  $c_w$  das wesentliche ballistische Charakteristikum eines speziellen (gegebenen oder zu entwickelnden) Geschoßtyps.

Der Widerstandsbeiwert  $c_w$  gibt das Verhältnis des Luftwiderstands  $W$  des Geschosses zu der Kraft an, die der Staudruck  $p_s = \frac{1}{2} \rho v^2$  auf die Querschnittsfläche  $F$  des Geschosses ausübt:

$$c_w(M, Re, Kn; \delta) = \frac{W}{p_s F}.$$

Trägt man den  $c_w$ -Wert eines Geschosses als Funktion der *Mach*-Zahl auf, so ergibt sich ein charakteristischer Verlauf gemäß Bild 3.16.

Für *Mach*-Zahlen  $0 \leq M \leq 0,5$  ist  $c_w \approx const$ , der Widerstand  $W$  folglich proportional zu  $M^2$ :  $W \sim M^2$ .

Im Bereich  $M \approx 1$  steigt der Widerstandsbeiwert auf Grund der Ausbildung von Verdichtungsstößen stark an:  $W \sim M^n$  ( $n > 2$ ).

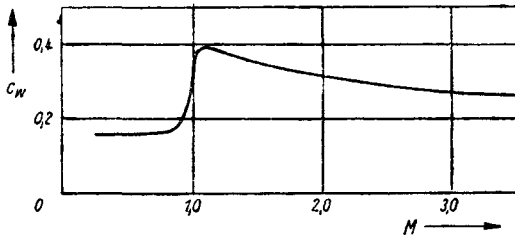
Für  $M > 5$  gilt in guter Näherung wieder  $W \sim M^2$ , allerdings mit einem anderen Proportionalitätsfaktor als im Unterschallbereich.

Die Zuverlässigkeit von Bahnvorhersagen wird entscheidend durch die



Genauigkeit beeinflusst, mit der die  $c_w$ -Funktion des betreffenden Geschosses bekannt ist.

In den zurückliegenden Jahren ist intensiv daran gearbeitet worden, den Verlauf der  $c_w$ -Funktion und die anderen aerodynamischen Beiwerte aus den geometrischen Parametern des Geschosses und den (bekannten) Charakteristiken des ungestörten Strömungsfelds rein rechnerisch zu ermitteln. Die in diesem Zusammenhang entwickelten



*Bild 3.16*  
Verlauf des Widerstandsbeiwertes  $c_w$  eines (speziellen) Geschosses als Funktion der Mach-Zahl  $M$

numerischen und analytischen Methoden<sup>1)</sup> haben für die Projektierung von Flugkörpern große Bedeutung erlangt, sie sind jedoch als Grundlage für die Schußtafelberechnung *nicht* geeignet. Man kommt deshalb nicht umhin, im Zuge der Entwicklung eines neuen Flugkörpers ausgedehnte aerodynamisch-ballistische Experimente anzustellen (Windkanalversuche, Vermessung von Freiflugbahnen). Diese Versuche verfolgen das Ziel, entweder

- den Verlauf der geschößtypischen (individuellen)  $c_w$ -Funktion zu ermitteln oder
- die (unbekannte)  $c_w$ -Funktion an ein vorgegebenes Standard-Luftwiderstandsgesetz anzupassen.

Der erstere Weg wird vorzugsweise bei Raketengeschossen mit Stabilisierungsflächen beschritten; für Artilleriegeschosse ist die Anpassung an ein vertafeltes Standardgesetz in der Regel ausreichend (siehe hierzu Abschnitt 3.6.).

Der Widerstandsbeiwert von flügellosen Überschallgeschossen läßt sich relativ genau mit einem Formelsatz abschätzen, der auf *Krasnov* [18] zurückgeht und im folgenden ohne Beweis wiedergegeben werden soll.

<sup>1)</sup> Siehe etwa die Arbeiten von *Krasnov* und Mitarbeitern [18], [19]. Man findet dort zahlreiche weitere Literaturhinweise.

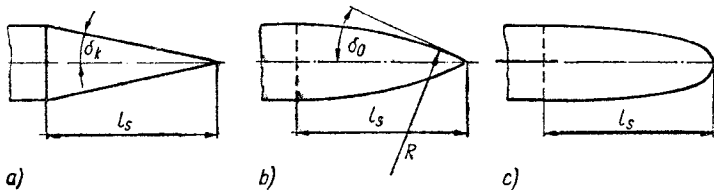
Zur Berechnung des  $c_w$ -Verlaufs zerlegt man den Widerstandsbeiwert in vier additive Komponenten:

- den Widerstandsbeiwert für den Wellenwiderstand der Geschößspitze  $c_{ww}$ ;
- den Widerstandsbeiwert für den Wellenwiderstand des Heckkonus des Geschosses  $c_{wh}$ ;
- den Widerstandsbeiwert für den Reibungswiderstand an der Geschößoberfläche  $c_{wr}$  und
- den Widerstandsbeiwert für den Sogwiderstand des Geschosses  $c_{ws}$ .

Damit gilt

$$c_w = c_{ww} + c_{wh} + c_{wr} + c_{ws}. \quad (3.61)$$

Der Anteil des Wellenwiderstands am Gesamtwiderstand beträgt meist mehr als 50 %.



**Bild 3.17** Idealisierte Spitzenformen von Geschossen  
a – Kegelspitze; b – ogivale Spitze; c – parabolische Spitze

Nach [18] können folgende Beiwerte unterschieden werden (siehe hierzu Bild 3.17 und Bild 3.18):

a) Beiwert  $c_{ww}^k$  des Wellenwiderstands einer kegelförmigen Geschößspitze

$$c_{ww}^k = 0,002 \cdot (0,8 + M^{-2}) (\delta_k)^{1,7}, \quad (3.62)$$

$\delta_k$ : halber Öffnungswinkel der Kegelspitze in Grad;

b) Beiwert  $c_{ww}^o$  des Wellenwiderstands einer ogivalen Geschößspitze<sup>1)</sup>

$$c_{ww}^o = \frac{0,08 \cdot (15,5 + M)}{3 + M} c_{ww}^k(M, \delta_o), \quad (3.63)$$

$\delta_o$ : halber Öffnungswinkel der ogivalen Spitze;

<sup>1)</sup> Unter einer *ogivalen Geschößspitze* versteht man eine Geschößspitze, deren Meridianschnitt durch Kreisbögen begrenzt wird.

c) *Beiwert  $c_{ww}^p$  des Wellenwiderstands einer parabolischen Geschößspitze*

$$c_{ww}^p = \frac{0,3}{l_s^2} \cdot \frac{1 + 2M}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad (3.64)$$

$l_s$ : Spitzenhöhe (Höhe des Geschöß-Kopfteils) in Kalibern;

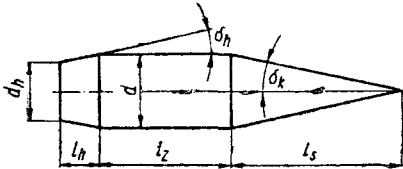


Bild 3.18  
Geschöß mit kegelförmiger Spitze  
und Heckkonus (schematisch)

d) *Beiwert  $c_{wh}$  des Wellenwiderstands des Heckkonus*

$$c_{wh} = 0,002 \cdot (0,8 + M^{-2}) (\delta_h)^{1,7} \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad (3.65)$$

$\delta_h$ : halber Öffnungswinkel des Heckkonus in Grad,

$\zeta$ : Durchmesser des Geschößbodens in Kalibern;

e) *Beiwert  $c_{ws}$  des Sogwiderstands*

$$c_{ws} = 1,14 \cdot \frac{\zeta^4}{\lambda} \left( \frac{2}{M} - \frac{\zeta^2}{\lambda} \right), \quad (3.66)$$

$\lambda$ : Gesamtlänge des Geschößes in Kalibern.

Bei sehr hohen Fluggeschwindigkeiten kann angenommen werden, daß sich hinter dem Geschößheck ein Vakuum bildet. In diesem Fall gilt

$$c_{ws} = \frac{2 \zeta^2}{KM^2}, \quad K: \text{Konstante.} \quad (3.67)$$

f) *Beiwert  $c_{wr}$  des Reibungswiderstands an der Geschößoberfläche*

Der Beiwert des Reibungswiderstands an der Geschößoberfläche wird multiplikativ zusammengesetzt aus dem Reibungsbeiwert  $c_f$  für die Umströmung einer Platte und dem Verhältnis  $\xi$  der Mantelfläche des Geschößes (ohne Geschößboden) zur Querschnittsfläche des Geschößes:

$$c_{wr} = c_f \xi. \quad (3.68)$$

Der Widerstandsbeiwert  $c_f$  einer Platte errechnet sich aus

$$c_f = \frac{0,032}{\text{Re}^{0,145}} (1 + 0,12 \cdot \text{M}^2)^{-1/2} \quad (3.69)$$

für  $2 \cdot 10^6 \leq \text{Re} \leq 10^{10}$  bzw. aus

$$c_f = \frac{1,32}{\sqrt{\text{Re}}} (1 + 0,03 \cdot \text{M}^2)^{-1/3} \quad (3.70)$$

für  $\text{Re} < 10^6$ . Die *Reynolds*-Zahl  $\text{Re}$  ist gegeben durch

$$\text{Re} = \frac{\rho v l_0}{\mu} = \frac{v l_0}{\nu}, \quad (3.71)$$

worin  $\mu$  die dynamische und  $\nu$  die kinematische Zähigkeit der Luft bedeuten, während  $l_0$  mit der Gesamtlänge des Geschosses identifiziert wird.

Die Zustandsparameter der Atmosphäre entnimmt man der Tafel der entsprechenden Normalatmosphäre.

### 3.3.4. Ein Zahlenbeispiel für die Berechnung des Widerstandsbeiwerts

Die Abschätzung des Widerstandsbeiwerts eines Geschosses mit Hilfe der in Abschnitt 3.3.3. abgeleiteten Formeln soll im folgenden an einem Beispiel gezeigt werden. Zu berechnen sei der Widerstandsbeiwert eines Geschosses mit kegelförmiger Spitze und Heckkonus gemäß Bild 3.18 für eine Flughöhe  $h = 5000$  m und eine Bahngeschwindigkeit  $v = 800$  m/s.

Als Parameter dieses Geschosses seien vorgegeben:

- Kaliber (Durchmesser)  $d = 15$  cm,
- relative Spitzenhöhe  $l_s = 2 d$ ,
- Länge des zylindrischen Teiles  $l_z = 3 d$ ,
- Länge des Heckkonus  $l_h = 1 d$ ,
- Heckdurchmesser  $d_h = 0,75 d$ .

Als Normalatmosphäre werde die Atmosphäre SSA-64 zugrunde gelegt.

Für  $h = 5000$  m entnimmt man der Tafel dieser Atmosphäre (Tafel I des Anhangs):

$$\begin{aligned} \tau &= 255,63^\circ\text{K}; & \text{p} &= 540,45 \text{ mbar}; \\ \rho &= 0,73654 \text{ kg/m}^3; & a &= 320,51 \text{ m/s}; \\ \nu &= \mu/\rho = 2,2103 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}. \end{aligned}$$

Die lokale *Mach*-Zahl beträgt damit

$$M = \frac{800}{320,51} = 2,496.$$

Der halbe Öffnungswinkel  $\delta_k$  der Kegelspitze ergibt sich aus

$$\tan \delta_k = \frac{d/2}{l_s} = 0,2500; \quad \delta_k = 14,038^\circ;$$

für den halben Öffnungswinkel  $\delta_h$  des Heckkegels gilt entsprechend

$$\tan \delta_h = \frac{(d - d_h)/2}{l_h} = 0,1250; \quad \delta_h = 7,126^\circ.$$

Der Beiwert  $c_{ww}^k$  des Wellenwiderstands der kegelförmigen Geschößspitze errechnet sich aus (3.62):

$$\begin{aligned} c_{ww}^k &= 0,002 \cdot \left[ 0,8 + \frac{1}{(2,496)^2} \right] \cdot (14,038)^{1,7} = 0,002 \cdot 0,9605 \cdot 89,16 \\ &= 0,1713; \end{aligned}$$

der Beiwert  $c_{wh}$  des Wellenwiderstands des Heckkonus aus (3.65):

$$\begin{aligned} c_{wh} &= 0,002 \cdot \left[ 0,8 + \frac{1}{(2,496)^2} \right] \cdot (7,126)^{1,7} \sqrt{1 - (0,75)^2} \\ &= 0,002 \cdot 0,9605 \cdot 28,18 \cdot 0,6615 = 0,0358. \end{aligned}$$

Der Beiwert  $c_{ws}$  des Sogwiderstands hat nach (3.66) den Wert

$$c_{ws} = 1,14 \cdot \frac{(0,75)^4}{6} \left[ \frac{2}{2,496} - \frac{(0,75)^2}{6} \right] = 1,14 \cdot 0,0527 \cdot 0,7075 = 0,0425.$$

Um den Beiwert  $c_{wr}$  für den Reibungswiderstand berechnen zu können, muß zunächst die *Reynolds*-Zahl ermittelt werden. Mit  $l_0 = l_s + l_z + l_k = 6d = 90$  cm erhält man

$$Re = \frac{l_0 v}{\nu} = \frac{0,90 \cdot 800}{2,2103} \cdot 10^5 = 3,257 \cdot 10^7.$$

Es ist somit die Formel (3.69) anwendbar:

$$c_f = \frac{0,032}{(3,257 \cdot 10^7)^{0,145} \sqrt{1 + 0,12 \cdot (2,496)^2}} = \frac{0,032}{12,29 \cdot 1,322} = 0,00197.$$

Die Oberfläche  $O$  des Geschosses (ohne Bodenfläche) setzt sich zusammen aus der Mantelfläche der Kegelspitze und der Mantelfläche des zylindrischen Teiles:

$$O = \pi \frac{d}{2} \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + l_s^2} + \pi \frac{d}{2} l_z = \frac{1}{4} \pi d^2 \left[ \sqrt{1 + (2l_s/d)^2} + (2l_z/d) \right].$$

Für das Verhältnis  $\xi$  der Oberfläche zur Querschnittsfläche ergibt sich damit:

$$\xi = \frac{O}{F} = \sqrt{1 + (2l_s/d)^2} + (2l_z/d) = \sqrt{17} + 6 = 10,123.$$

Der Beiwert des Reibungswiderstands hat demnach die Größe

$$c_{wr} = c_r \xi = 0,00197 \cdot 10,123 = 0,0199.$$

Einsetzen der für  $c_{ww}^k$ ,  $c_{wh}$ ,  $c_{ws}$  und  $c_{wr}$  berechneten Zahlenwerte in (3.61) liefert für den Widerstandsbeiwert  $c_w$  des Geschosses

$$c_w = c_{ww}^k + c_{wh} + c_{ws} + c_{wr} = 0,1713 + 0,0358 + 0,0425 + 0,0199;$$

$$c_w = 0,2695.$$

Man erkennt, daß der Anteil des Wellenwiderstands den Hauptteil des Widerstandsbeiwerts ausmacht:

$$\frac{c_{ww}^k + c_{wh}}{c_w} = \frac{0,2071}{0,2695} = 0,768 \cong 76,8\%.$$

Der Luftwiderstand  $W$ , den das Geschöß erfährt, ergibt sich nach (3.57) zu

$$W = \frac{1}{2} \rho v^2 F c_w = \frac{1}{2} \cdot 0,7365 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(800 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot \pi \cdot (0,075 \text{ m})^2 \cdot 0,2695$$

$$= \frac{0,7365 \cdot 320 \cdot 3,1415 \cdot 5,625 \cdot 0,2695}{9,8067} \text{ kp} = 114,45 \text{ kp}.$$

### 3.4. Die Darstellung des Luftwiderstands in der Ballistik

In der Ballistik ist es aus rechenpraktischen Gründen üblich, den Ansatz für den Luftwiderstand und die hierdurch bedingte Verzögerung des Geschosses in einer von (3.57) abweichenden Form darzustellen. Zwei derartige ballistische Ansätze für die Verzögerung durch den Luftwiderstand sollen im folgenden näher betrachtet werden.

#### 3.4.1. Der moderne Ansatz für die Verzögerung durch den Luftwiderstand

Das klassische Bahnmodell der Äußeren Ballistik, dem die Kapitel 4 bis 6 gewidmet sind, nähert die reale Geschößbewegung durch die Bewegung einer Punktmasse an, die unter dem Einfluß der Widerstandskraft  $W$  und der Schwerkraft  $G$  steht; der Einfluß des Auftriebs  $A$  bleibt unberücksichtigt. Bei konventionellen Geschossen ohne Stabilisierungsflächen ist diese Idealisierung in erster Näherung erlaubt, da hier im allgemeinen  $|A| \ll |W|$  gilt. Des weiteren darf man bei Geschossen dieses Typs annehmen, daß der Betrag  $W$  des Luftwiderstands nicht vom Anstellwinkel  $\delta$  des Geschosses gegenüber der Bahntangente ab-

hängt. Vernachlässigt man ferner, wie in der klassischen Ballistik üblich, sowohl die Abhängigkeit des Widerstandsbeiwerts von der *Reynolds-Zahl*  $Re$  als auch die Abhängigkeit von der *Knudsen-Zahl*  $Kn$ , dann ist der Widerstandsbeiwert  $c_w$  eine Funktion allein der *Mach-Zahl*  $M$ :  $c_w = c_w(M)$ .

Ist die Annahme einer stationären Umströmung des Geschosses bereits recht einschneidend, so bedeuten die vorgenannten Voraussetzungen eine weitere Idealisierung der tatsächlichen Verhältnisse in der Umgebung des Geschosses. Man wird deshalb von dem auf diesem Wege ermittelten speziellen Ansatz für den Luftwiderstand keine universelle Anwendbarkeit verlangen können. Bei Untersuchungen zur Stabilität des Geschößflugs beispielsweise muß beachtet werden, daß durch die Rotationsbewegung des Geschosses um seinen Schwerpunkt aerodynamische Kräfte und Momente auftreten, deren Beträge von der Winkelgeschwindigkeit der Geschößrotation abhängen: Die (relative) Größe dieser winkelgeschwindigkeitsabhängigen Kräfte und Momente ist für das Stabilitätsverhalten des Geschosses ausschlaggebend.

Mit  $c_w = c_w(M)$  vereinfacht sich (3.57) zu

$$W = \frac{1}{2} \rho v^2 F c_w(M). \quad (3.72)$$

Für die Verzögerung durch den Luftwiderstand  $b'$  gilt damit

$$b' = \frac{W}{m} = \frac{1}{2} \frac{F}{m} \rho v^2 c_w(M). \quad (3.73)$$

Mit Hilfe der Zustandsgleichung (3.1) und der Gleichung für die Schallgeschwindigkeit (3.2) läßt sich  $v^2$  in der Form darstellen

$$v^2 = a^2 M^2 = \kappa_{LN} \Re_{LN} \tau \cdot M^2 = \kappa_{LN} \frac{p}{\rho} M^2. \quad (3.74)$$

Zusammenfassen von (3.73) und (3.74) liefert für die Verzögerung  $b'$ :

$$b' = \frac{\kappa_{LN} p_{0N} F}{2 m} \frac{p}{p_{0N}} M^2 c_w(M). \quad (3.75)$$

Es ist zweckmäßig und üblich, den Ansatz für  $b'$  in drei Faktoren aufzuspalten:

– den *Ballistischen Koeffizienten*  $C_0$ ,

$$C_0 := \frac{1}{2} \kappa_L p_{0N} \frac{F}{m}; \quad (3.76)$$

– die *Druckfunktion*  $H(h)$ ,

$$H(h) := \frac{p(h)}{p_{0N}}; \quad (3.77)$$

– die *Widerstandsfunktion*  $\Phi(M)$ ,

$$\Phi(M) := M^2 c_w(M). \quad (3.78)$$

Für die Verzögerung durch den Luftwiderstand  $b'$  ergibt sich damit die Darstellung

$$b' = C_0 H(h) \Phi(M). \quad (3.79)$$

Während die Druck- und die Widerstandsfunktion dimensionslos sind, besitzt der Ballistische Koeffizient  $c_0$  die Dimension einer Beschleunigung.

Der Name *Ballistischer Koeffizient* wird in der Ballistik für mehrere Größen benutzt, die sich nicht nur in ihrem Betrag, sondern auch in ihrer physikalischen Dimension unterscheiden.<sup>1)</sup> Hierauf ist beim Studium ballistischer Fachliteratur zu achten.

In der Definitionsgleichung (3.76) für  $C_0$  tritt der Faktor  $F/m$  auf. Der Kehrwert dieses Quotienten – das Verhältnis der Geschossmasse  $m$  zur (maximalen) Querschnittsfläche des Geschosses  $F$  – wird *Querschnittsbelastung* genannt und mit dem Symbol  $Q$  bezeichnet:

$$Q := m/F. \quad (3.80)$$

Der Ansatz für den Ballistischen Koeffizienten  $C_0$  kann damit auch in der Form geschrieben werden

$$C_0 = \frac{\kappa_L p_{0N}}{2 Q}. \quad (3.81)$$

*Die Verzögerung, die ein Geschos durch den Luftwiderstand erfährt, ist umgekehrt proportional zu dessen Querschnittsbelastung.* Bei Geschossen, die für weite Schußentfernungen vorgesehen sind, wird deshalb eine große Querschnittsbelastung angestrebt.

<sup>1)</sup> Siehe die in (3.83) und (3.89) definierten Ballistischen Koeffizienten.



### 3.4.2. Der klassische Ansatz für die Verzögerung durch den Luftwiderstand

Der in der klassischen Geschößballistik verwendete Ansatz für die Verzögerung  $b'$  unterscheidet sich von dem modernen Ansatz (3.79) in folgender Hinsicht:

- Die Verzögerung wird in vier Faktoren aufgespaltet (gegenüber drei beim modernen Ansatz).
- Der Ballistische Koeffizient enthält nur Geschößparameter; die Bodenwerte der Normalatmosphäre gehen in die Widerstandsfunktion ein.
- An Stelle der *Mach*-Zahl wird eine fiktive Geschwindigkeit  $v_\tau$  benutzt.

Für die fiktive Geschwindigkeit  $v_\tau$  gilt folgende *Definition*: Die fiktive Geschwindigkeit  $v_\tau$  ist diejenige Geschwindigkeit, die ein Flugkörper am Boden (für  $h = 0$ ) besitzen müßte, um die gleiche *Mach*-Zahl  $M = M^*$  zu erreichen wie bei der tatsächlichen Geschwindigkeit  $v$  in der Höhe  $h$ .

In der Modellatmosphäre ist die Schallgeschwindigkeit  $a(h)$  eine bekannte Funktion der Höhe  $h$ , so daß die Definitionsgleichung für  $v_\tau$  lautet

$$M^* = \frac{v}{a(h)} =: \frac{v_\tau}{a_{0N}}, \quad v_\tau = v \frac{a_{0N}}{a(h)}. \quad (3.82)$$

Ähnlich dem modernen Ansatz definiert man einen *Ballistischen Koeffizienten*  $c$ , eine *Höhenfunktion*  $H_\tau(h)$  und eine *Widerstandsfunktion*  $G(v_\tau)$ :

$$c := \frac{d^2}{m} \cdot 1000, \quad (3.83)$$

$$H_\tau(h) := \frac{\varrho(h)}{\varrho_{0N}} \frac{a(h)}{a_{0N}}, \quad (3.84)$$

$$G(v_\tau) := \frac{\pi}{8000} \varrho_{0N} v_\tau c_w \left( \frac{v_\tau}{a_{0N}} \right). \quad (3.85)$$

Der Ansatz für die Verzögerung  $b'$  lautet damit

$$b' = c H_\tau(h) G(v_\tau) v. \quad (3.86)$$

Die Faktoren, aus denen sich  $b'$  zusammensetzt, haben die physikalischen Dimensionen<sup>1)</sup>:

$$[c] = L^2 \cdot M^{-1}; \quad [H_\tau(h)] = 1;$$

$$[G(v_\tau)] = M \cdot L^{-2} \cdot T^{-1}; \quad [v] = L \cdot T^{-1}.$$

Durch Gleichsetzen der Darstellungen (3.79) und (3.86) für  $b'$  prüft man leicht nach, daß beide Ansätze völlig gleichwertig sind.

Ist die Zusammensetzung der Luft konstant ( $\kappa_L \Re_L = \kappa_{L0} \Re_{L0}$ ), so gehen (3.82) und (3.85) über in

$$v_\tau = v \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau(h)}}, \quad H_\tau(h) = \frac{\rho(h)}{\rho_{0N}} \sqrt{\frac{\tau(h)}{\tau_{0N}}}. \quad (3.87)$$

In einer Modellatmosphäre gemäß Abschnitt 3.2.4. sind die kinetische Temperatur  $\tau$  und die Luftdichte  $\rho$  eindeutige Funktionen der geometrischen Höhe  $h$ .

Ist die Lufttemperatur  $\tau$  gleich der Lufttemperatur am Boden  $\tau_{0N}$ , so wird speziell

$$v_\tau = v, \quad H_\tau(h) = 1;$$

$$G(v_\tau) = G(v) = 1,25 \cdot 10^{-4} \cdot \pi \rho_{0N} v c_w(v/a_{0N}). \quad (3.88)$$

Bild 3.19 zeigt die relative Abweichung  $\Delta v/v$  der fiktiven Geschwindigkeit  $v_\tau$  von der Bahngeschwindigkeit  $v$ ,

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v_\tau - v}{v} = \frac{a_{0N}}{a(h)} - 1,$$

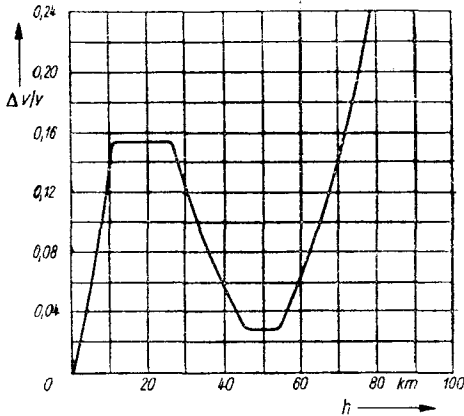
bezogen auf die Atmosphäre SSA-64. Man entnimmt Bild 3.19 für  $h = 8$  km eine relative Geschwindigkeitsabweichung von etwa 10,5%, die bei Bahnrechnungen in jedem Fall berücksichtigt werden muß.

In der sowjetischen Ballistik definiert man den Ballistischen Koeffizienten in der Form

$$\bar{c} := \frac{d^2}{m g_{0N}} \cdot 1000. \quad (3.89)$$

<sup>1)</sup> Die physikalische Dimension einer Größe  $A$  wird, wie in der Physik üblich, mit dem Symbol  $[A]$  bezeichnet. Es bedeuten:  $L$  – Länge,  $T$  – Zeit,  $M$  – Masse.

Bei Verwendung dieser Definition des Ballistischen Koeffizienten ist in den Ansatz für die Widerstandsfunktion  $G(v_\tau)$  noch der Faktor  $g_{0N}$  einzufügen. Die Zahlenwerte des in  $\text{m}^2/\text{kg}$  gemessenen Ballistischen Koeffizienten  $c$  (3.83) und des in  $\text{m}^2/\text{kp}$  gemessenen Ballistischen Koeffizienten  $\bar{c}$  (3.89) sind jedoch gleich.



**Bild 3.19**  
Relative Abweichung der fiktiven Geschwindigkeit  $v_\tau$  von der Bahngeschwindigkeit  $v$  als Funktion der geometrischen Höhe  $h$  (bezogen auf die Normalatmosphäre SSA-64)

Der klassische ballistische Ansatz für die Verzögerung  $b'$  (3.86) hat den Vorzug, der Struktur der Bewegungsgleichungen des klassischen Bahnmodells gut angepaßt zu sein.

Die Nachteile des klassischen Ansatzes (3.86) gegenüber dem modernen Ansatz (3.79) zeigen sich jedoch dann, wenn zu einer anderen Normalatmosphäre übergegangen werden soll: Vertafelt man die Widerstandsfunktion  $G(v_\tau)$  als Funktion von  $v_\tau$ , so ist diese Tafel abhängig von den Bodenwerten  $\rho_{0N}$ ,  $\tau_{0N}$  (und  $g_{0N}$ ) der zugrunde gelegten Standardatmosphäre. Bei Übergang zu einer anderen Standardatmosphäre muß die Tafel der Widerstandsfunktion  $G(v_\tau)$  neu berechnet werden, wohingegen die Tabellen des Widerstandsbeiwerts  $c_w(M)$  und der Widerstandsfunktion  $\Phi(M)$  unverändert erhalten bleiben.<sup>1)</sup>

Der klassische ballistische Ansatz (3.86) ist demnach nur dann empfehlenswert, wenn die Bahnrechnungen über einen langen Zeitraum auf ein und dieselbe Standardatmosphäre bezogen werden. Benutzt man parallel

<sup>1)</sup> Wie vorzugehen ist, wenn  $G(v_\tau)$ -Tabelle und Standardatmosphäre nicht aneinander angepaßt sind, wird in Abschnitt 3.5.3. erläutert.

zueinander unterschiedliche Standardatmosphären, etwa Normalatmosphären für einen *mittleren heißen Tag* und einen *mittleren kalten Tag*, so empfiehlt es sich, auf den modernen Ansatz zurückzugreifen.

### \*3.4.3. Der Ballistische Widerstandsgrad

Der moderne Ansatz für die Verzögerungsfunktion (3.79) stellt  $b'$  als Funktion der drei Variablen *Querschnittsbelastung*  $Q$ , *geometrische Höhe*  $h$  und *Mach-Zahl*  $M$  dar:  $b' = b'(Q, h, M)$ .

Ändern sich die Argumente dieser Funktion von  $Q = Q^\circ$ ,  $h = h^\circ$ ,  $M = M^\circ$  um  $\delta Q$ ,  $\delta h$ ,  $\delta M$  in  $Q = Q^\circ + \delta Q$ ,  $h = h^\circ + \delta h$ ,  $M = M^\circ + \delta M$ , so hat dies eine Änderung der Verzögerung  $b'$  um  $\delta b'$  zur Folge, die in erster Näherung durch das lineare Glied der *Taylor-Entwicklung* von  $b'$  an der Stelle  $(Q^\circ, h^\circ, M^\circ)$  gegeben ist:

$$\delta b' = \left(\frac{\partial b'}{\partial Q}\right)^\circ \delta Q + \left(\frac{\partial b'}{\partial h}\right)^\circ \delta h + \left(\frac{\partial b'}{\partial M}\right)^\circ \delta M. \quad (3.90)$$

Zur expliziten Berechnung der Ableitungen der Funktion  $b'$  nach deren Argumenten schreibt man die Differentialquotienten  $\partial b'/\partial Q$ ,  $\partial b'/\partial h$  und  $\partial b'/\partial M$  zweckmäßig in der Form

$$\frac{\partial b'}{\partial Q} = b' \frac{\partial \ln b'}{\partial Q}, \quad \frac{\partial b'}{\partial h} = b' \frac{\partial \ln b'}{\partial h}, \quad \frac{\partial b'}{\partial M} = b' \frac{\partial \ln b'}{\partial M}. \quad (3.91)$$

Mit

$$\ln b' = \ln C_0 + \ln H(h) + \ln \Phi(M)$$

$$= \ln \left(\frac{1}{2} \alpha_L \nu_{0N}\right) - \ln Q + \ln H(h) + 2 \ln M + \ln c_w(M)$$

folgt sofort:

$$\frac{\partial b'}{\partial Q} = -\frac{b'}{Q}, \quad \frac{\partial b'}{\partial M} = b' \left[ \frac{2}{M} + \frac{\partial \ln c_w(M)}{\partial M} \right]. \quad (3.92)$$

Die Ableitung  $\partial b'/\partial M$  läßt sich auch schreiben

$$\frac{\partial b'}{\partial M} = \frac{b'}{M} \left[ 2 + \frac{\partial \ln c_w(M)}{\partial \ln M} \right]. \quad (3.93)$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern wird *Ballistischer Widerstandsgrad* genannt und mit  $n(\mathbf{M})$  bezeichnet:

$$n(\mathbf{M}) := \frac{\partial \ln b'}{\partial \ln \mathbf{M}} = 2 + \frac{\partial \ln c_w(\mathbf{M})}{\partial \ln \mathbf{M}}, \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial b'}{\partial \mathbf{M}} = \frac{b'}{\mathbf{M}} n(\mathbf{M}). \quad (3.95)$$

Zur Berechnung von  $\partial b'/\partial h$  wird eine Modellatmosphäre zugrunde gelegt, in der die Zusammensetzung der Luft als konstant und die kinetische Temperatur der Luft  $\tau$  als (stückweise) lineare Funktion der geopotentiellen Höhe  $h^*$  vorgegeben sind. Unter Beachtung von (3.91) gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial b'}{\partial h} &= b' \frac{\partial \ln b'}{\partial h} = b' \frac{\partial \ln b'}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial h} = b' \left[ \frac{\partial \ln H}{\partial \tau} + \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \tau} \right] \frac{\partial \tau}{\partial h} \\ &= b' \left[ \frac{\partial \ln H}{\partial \tau} + \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \ln \mathbf{M}} \frac{\partial \ln \mathbf{M}}{\partial \ln a} \frac{\partial \ln a}{\partial \tau} \right] \frac{\partial \tau}{\partial h^*} \frac{\partial h^*}{\partial h}. \end{aligned}$$

Mit (3.25) für  $H(h) = p(h)/p_{0N}$ , (3.94) sowie den Definitionsgleichungen für die Schallgeschwindigkeit, die *Mach-Zahl* und die geopotentielle Höhe folgt hieraus

$$\frac{\partial b'}{\partial h} = b' \left[ \frac{\sigma_{iN}}{\tau} - n(\mathbf{M}) \frac{1}{2\tau} \right] A_{iN}^* \frac{g}{g_{0N}}$$

oder unter Verwendung einer Hilfsfunktion  $\chi = \chi(h, \mathbf{M})$ :

$$\frac{\partial b'}{\partial h} = b' \chi, \quad \chi := - \frac{A_{iN}^*}{\tau} \frac{g}{g_{0N}} \left[ \frac{n(\mathbf{M})}{2} - \sigma_{iN} \right]. \quad (3.96)$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern ist fast immer negativ, lediglich in der Nähe des Schalldurchgangs ( $\mathbf{M} \approx 1$ ) kann  $n(\mathbf{M}) > 2 \sigma_{iN}$  werden. In der bodennahen Atmosphärenschicht ( $A_{iN}^* < 0$ ) ist deshalb im allgemeinen  $\chi < 0$ .

In isothermen Schichten vereinfacht sich die Beziehung für  $\chi$  zu

$$\chi = - \frac{g(h)}{R_{LOn} \tau_{iN}}, \quad (3.97)$$

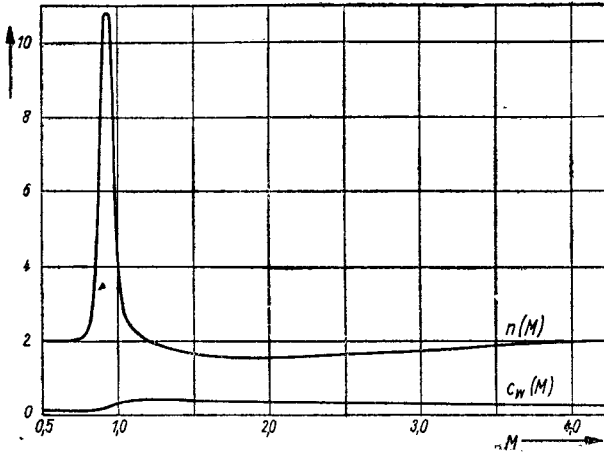


Bild 3.20 Widerstandsbeiwert  $c_w(M)$  und ballistischer Widerstandsgrad  $n(M)$  für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943

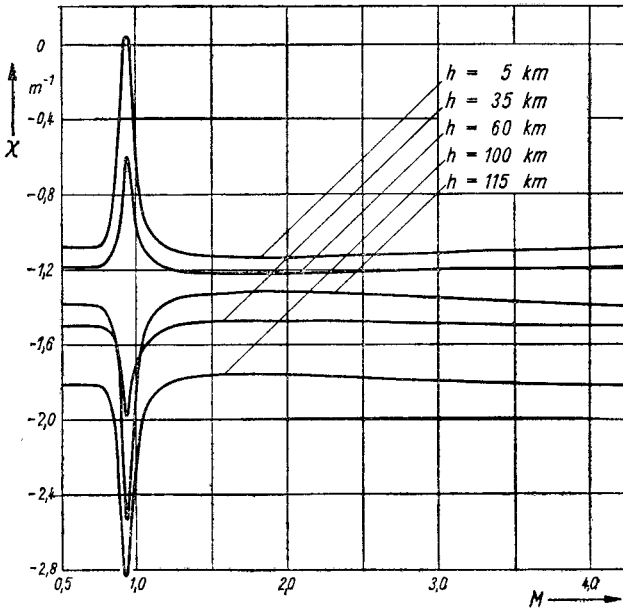


Bild 3.21 Koeffizient  $\gamma$  als Funktion der Mach-Zahl  $M$  und der geometrischen Höhe  $h$  für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 und die Normalatmosphäre SSA-64

wie man leicht bestätigt, wenn man unter Beachtung der Definition von  $\sigma_{iN}$  (3.25) den Grenzübergang  $A_{iN}^* \rightarrow 0$  ausführt.

Für die relative Änderung der Verzögerung durch den Luftwiderstand  $\delta b'/b'$  erhält man durch Zusammenfassen von (3.90) bis (3.96) somit

$$\frac{\delta b'}{b'} = -\frac{\delta Q}{Q} + n(M) \frac{\delta M}{M} + h\chi \frac{\delta h}{h}. \quad (3.98)$$

Der Ballistische Widerstandsgrad  $n(M)$  gibt an, um wievielfach die relative Änderung der Verzögerungsfunktion  $b'$  größer ist als eine „Eingangsstörung“  $\delta M/M$  der *Mach*-Zahl ( $Q = \text{const}$ ,  $h = \text{const}$ ).

Liegt ein Potenzansatz vor,  $\Phi(M) \sim M^\nu$ , so folgt  $n(M) = \nu$ . Der Name *Ballistischer Widerstandsgrad* für die Funktion  $n(M)$  wird hierdurch verständlich.

Die Funktionen  $n(M)$  der in der Ballistik benutzten Standard-Luftwiderstandsgesetze haben in der Nähe von  $M = 1$  ausgeprägte Maxima. Als Beispiel sei der Ballistische Widerstandsgrad des sowjetischen Standard-Luftwiderstandsgesetzes 1943 (Abschnitt 3.5.2.) angeführt, dessen Zahlenwerte das Intervall  $1 \leq n(M) \leq 11$  durchlaufen (siehe Bild 3.20). Der Verlauf der Kurven  $\chi = \chi(h, M)$  für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 und die Atmosphäre SSA-64 ist in Bild 3.21 wiedergegeben.

Die Funktionen  $n(M)$  und  $\chi(h, M)$  spielen in der linearen ballistischen Störungstheorie (Kapitel 6) eine zentrale Rolle.

#### 3.4.4. Der Massenkoeffizient eines Geschosses

Jedem Geschöß kann eine mittlere Dichte  $\bar{\rho}_G$  zugeordnet werden:

$$\bar{\rho}_G = \frac{\text{Gesamtmasse des Geschosses}}{\text{Gesamtvolumen des Geschosses}} = \frac{m}{V_G}.$$

Man erwartet, daß die mittlere Dichte von Geschossen gleicher Konstruktion (gleicher Struktur) nicht vom Kaliber des Geschosses abhängt. Diese Erwartung bestätigt sich weitgehend.

Als Maß für die mittlere Dichte eines Geschosses wird in der Ballistik der *Massenkoeffizient*  $C_m$  verwendet; er ist definiert durch

$$C_m := \frac{m}{d^3}. \quad (3.99)$$

Mittlere Dichte und Massenkoeffizient sind zueinander proportional:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{k} C_m; \quad (3.100)$$

$k$  ist ein Zahlenfaktor, dessen Größe von der geometrischen Gestalt des Geschosses abhängt, nicht jedoch vom Kaliber. Es gilt

$$V_G = kd^3. \quad (3.101)$$

Je gedrungenere ein Geschöß gebaut ist, um so kleinere  $k$ -Werte ergeben sich.

Um die Größenordnung des Faktors  $k$  abzuschätzen, wird ein Geschöß mit kegelförmiger Spitze, zylindrischem Führungsteil und Heckkonus betrachtet (Bild 3.18, Seite 135). Das Volumen  $V$  dieses Geschößkörpers setzt sich aus dem Volumen eines Kegels, eines Zylinders und eines Kegelstumpfes zusammen:

$$V_G = \frac{\pi}{12} d^2 l_s + \frac{\pi}{4} d^2 l_z + \frac{1}{12} \pi l_h (d^2 + d_h^2 + dd_h). \quad (3.102)$$

In der Ballistik ist es üblich, die Geschößabmessungen in Kaliberlängen anzugeben:

$$l_s =: k_1 d, \quad l_z =: k_2 d, \quad l_h =: k_3 d, \quad d_h =: k_4 d. \quad (3.103)$$

Die Größen  $k_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) sind Zahlenfaktoren. Setzt man (3.103) in (3.102) ein, so ergibt sich für  $k = V_G/d^3$ :

$$k = \frac{\pi}{12} [k_1 + 3k_2 + k_3 (1 + k_4 + k_4^2)].$$

In dem *Zahlenbeispiel* des Abschnitts 3.3.4. (Seite 136) war vorgegeben:

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = 0,75.$$

Mit diesen Werten erhält man für  $k$ :

$$k = \frac{\pi}{12} (2 + 9 + 1 + 0,75 + 0,75^2) = \pi \frac{13,3125}{12},$$

$$k = 3,485; \quad k^{-1} = 0,2869.$$

Die mittlere Dichte beträgt in diesem Beispiel das 0,29fache des Massenkoeffizienten.

Ein Geschöß mit dem Kaliber  $d = 15$  cm und dem Massenkoeffizienten  $C_m = 15$  g/cm<sup>3</sup> hat die Masse

$$m = C_m d^3 = 15^4 \text{ g} = 50,625 \text{ kg}.$$



Da die Fallbeschleunigung in der Höhe  $h = 5$  km bei der Atmosphäre SSA-64 den Wert  $g = 9,78128 \text{ m/s}^2$  hat, wird auf das Geschöß die Schwerkraft  $G = 50,494 \text{ kp}$  ausgeübt.

In Abschnitt 3.3.4. war für den Luftwiderstand dieses Geschosses gefunden worden ( $v = 800 \text{ m/s}$ ):  $W = 114,45 \text{ kp}$ .

Das Verhältnis von Luftwiderstand zu Schwerkraft beträgt somit

$$\alpha = W/G = 2,27.$$

In Tabelle 3.5 sind einige Orientierungswerte für die Größe des Massenkoeffizienten angeführt. Die  $C_m$ -Werte der in der Praxis verwendeten Geschosse können – in Abhängigkeit von ihrer Konstruktion und dem verwendeten Material – sowohl nach oben als auch nach unten von den angegebenen Zahlenwerten abweichen.

Tabelle 3.5 *Mittlere Massenkoeffizienten von Geschossen*

Geschoßart	$C_m$ g/cm <sup>3</sup> ·
Vollgeschöß ( $d = 6,5 \text{ mm}$ )	36 ... 38
Vollgeschöß ( $d = 7,5 \dots 8 \text{ mm}$ )	18 ... 24
Vollgeschöß ( $d = 11 \dots 14 \text{ mm}$ )	16 ... 22
Geschosse ( $d = 20 \dots 25 \text{ mm}$ )	16 ... 18
Sprenggranaten für Kanonen	14 ... 15
Sprenggranaten für Haubitzen	12 ... 13
Granaten für Panzerdurchschlag	15 ... 23
Unterkalibergeschosse	6 ... 10
Hohlladungsgranaten	10 ... 12
Sprengbomben	4 ... 8

Wie in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt wurde, ist die Verzögerung eines Geschosses (bei der gleichen Geschwindigkeit) um so kleiner, je größer seine Querschnittsbelastung wird ( $b' \sim 1/Q$ ).

Zwischen der Querschnittsbelastung  $Q$ , dem Massenkoeffizienten  $C_m$  und dem Kaliber  $d$  besteht die Beziehung

$$Q = \frac{4}{\pi} C_m d = 1,272 \cdot C_m d. \quad (3.104)$$

Da die Massenkoeffizienten (als mittlere Dichten) für Geschosse gleichen Typs (annähernd) konstant sind, folgert man aus (3.104): *Bei Geschossen gleicher Konstruktion ist die Querschnittsbelastung  $Q$  (annähernd) proportional zum Kaliber.* Wegen  $b' \sim 1/Q$  gilt damit auch:

Geschosse gleichen Typs werden um so geringer verzögert, je größer ihr Kaliber ist:  $b' \sim 1/d$  ( $v = \text{const}$ ).

Die Abhängigkeit der Querschnittsbelastung  $Q$  vom Kaliber  $d$  ist für einige ausgewählte  $C_m$ -Werte in Bild 3.22 veranschaulicht.

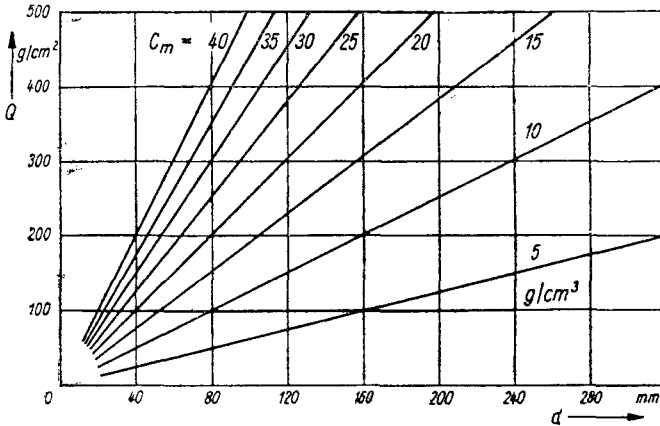


Bild 3.22 Querschnittsbelastung  $Q$  als Funktion des Kalibers  $d$  für die Massenkoeffizienten  $C_m = 5(5)40 \text{ g/cm}^3$

Bei vorgegebenem Kaliber ( $d = \text{const}$ ) können die Geschosstypen sowohl durch ihre Querschnittsbelastung  $Q$  wie auch durch ihren Massenkoeffizienten  $C_m$  charakterisiert werden.

### 3.5. Standard-Luftwiderstandsgesetze

#### 3.5.1. Der Formkoeffizient

Jeder Flugkörper besitzt einen für ihn charakteristischen Verlauf des Widerstandsbeiwerts  $c_w$ . Das war bei der Behandlung des Formelsatzes für  $c_w$  in den Abschnitten 3.3.3. und 3.3.4. deutlich geworden.

Um Flugbahnberechnungen durchführen und Schuß tafeln aufstellen zu können, müßte im Grunde genommen für jeden Geschosstyp die entsprechende individuelle  $c_w$ -Funktion vorgegeben sein.

Für jeden neuen Geschosstyp eine gesonderte Beiwertfunktion  $c_w(M)$  zu ermitteln, wäre aber mit sehr hohem Arbeitsaufwand verbunden. Man ist deshalb bestrebt, die individuellen  $c_w(M)$ -Verläufe durch einen *mittleren* Verlauf  $\hat{c}_w(M)$  zu approximieren. Bei klassischen Geschossen und flügellosen Raketen, die für kurze und mittlere Einsatzentfernungen bestimmt sind, ist dies – unter Einhaltung der geforderten Genauigkeit der Bahnvorhersage – meist möglich.

Die für ein mittleres Bezugs-Luftwiderstandsgesetz berechneten Beiwert- und Widerstandsfunktionen werden durch den Zusatz „Standard“-gekennzeichnet, die entsprechenden Funktionssymbole erhalten das Symbol „^“, z. B.  $\hat{c}_w(M)$ ,  $\hat{\Phi}(M)$ ,  $\hat{G}(v_\tau)$ .

Ersetzt man in (3.79) bzw. (3.86) die individuelle Beiwertfunktion  $c_w(M)$  durch den Standard-Widerstandsbeiwert  $\hat{c}_w(M)$ , so entsteht hierdurch ein Fehler. Um diesen Fehler (wenigstens teilweise) zu kompensieren, wird in die Ansätze für die Ballistischen Koeffizienten  $C_0$  (3.76) und  $c$  (3.83) ein dimensionsloser Korrekturfaktor  $i$ , der sogenannte *Formkoeffizient*, eingefügt. Die erweiterten Ansätze für  $b'$  lauten damit:

$$b' = C_0 H(h) \hat{\Phi}(M), \quad (3.105)$$

$$C_0 = \frac{\varkappa_{LN} \rho_{0N}}{2} \frac{i}{Q}, \quad (3.106)$$

$$H(h) = \frac{\rho(h)}{\rho_{0N}}, \quad (3.107)$$

$$\hat{\Phi}(M) = M^2 \hat{c}_w(M) \quad (3.108)$$

beziehungsweise

$$b' = c H_\tau(h) \hat{G}(v_\tau) v, \quad (3.109)$$

$$c = \frac{d^2 i}{m} \cdot 1000, \quad (3.110)$$

$$H_\tau(h) = \frac{\rho(h)}{\rho_{0N}} \frac{a(h)}{a_{0N}}, \quad (3.111)$$

$$\hat{G}(v_\tau) = \frac{\pi}{8000} \rho_{0N} v_\tau \hat{c}_w(v_\tau/a_{0N}). \quad (3.112)$$

Die Standard-Luftwiderstandsfunktionen  $\hat{G}(v_\tau)$  werden meist als Funktion von  $v_\tau$  vertafelt. In den angelsächsischen Ländern ist auch der Tafelengang ( $v_\tau^2/100$ ) üblich, der gewisse rechentechnische Vorteile hat. Die Verfahren zur Bestimmung des Formkoeffizienten  $i$  werden in Abschnitt 3.6. erörtert.

### 3.5.2. Das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943

Das in den sozialistischen Staaten gegenwärtig für Geschosse am häufigsten benutzte Standard-Luftwiderstandsgesetz ist das sowjetische *Luftwiderstandsgesetz 1943*, das während des zweiten Weltkriegs im Auftrag der Artillerie-Hauptverwaltung der Sowjetarmee vom Lehrstuhl für Äußere Ballistik an der Moskauer Artillerie-Ingenieur-Akademie ausgearbeitet worden ist [2].

Funktionen und Formkoeffizienten, die sich auf das Luftwiderstandsgesetz 1943 beziehen, werden im folgenden mit dem Index „43“ versehen.

Das Luftwiderstandsgesetz 1943 gründet sich auf eine große Anzahl spezieller Schießversuche mit weitreichenden Geschützen und Handfeuerwaffen. Darüber hinaus wurden die Schußtafeln aller zu dieser Zeit im Einsatz befindlichen Waffen ausgewertet. Auf diese Weise konnte erreicht werden, daß die globalen Formkoeffizienten<sup>1)</sup> der modernen (im zweiten Weltkrieg verwendeten) Artilleriegeschosse die Größenordnung Eins haben:  $i_{43} \approx 1$ .

Die Originaltabellen des Luftwiderstandsgesetzes 1943 beziehen sich auf den klassischen Ansatz für die Verzögerungsfunktion  $b'$ , und zwar sind  $G_{43}(v_\tau)$  und  $F_{43}(v_\tau) := v_\tau G_{43}(v_\tau)$  als Funktion von  $v_\tau$  aufgeführt.

Im Vergleich zu den älteren, in Abschnitt 3.5.4. genannten Luftwiderstandsgesetzen ist bemerkenswert, daß das Luftwiderstandsgesetz 1943 in seinem Hauptbereich ( $265 \text{ m/s} \leq v_\tau \leq 1400 \text{ m/s}$ ) tabellarisch gegeben ist; lediglich für  $v_\tau < 265 \text{ m/s}$  und  $v_\tau > 1400 \text{ m/s}$  sind die Widerstandsfunktionen  $G(v_\tau)$  und  $F(v_\tau)$  durch analytische Beziehungen definiert.

Der Vertafelung des Luftwiderstandsgesetzes 1943 ist die sowjetische Standardatmosphäre ANA zugrunde gelegt worden. Die Bodenwerte

<sup>1)</sup> Hinsichtlich der Definition des globalen Formkoeffizienten sei auf Abschnitt 3.6.3. verwiesen.

dieser Atmosphäre betragen (siehe Abschnitt 3.2.6.3.):

$$\begin{aligned} \tau_{0N} = \tau_{0N}^* &= 288,9^\circ\text{K}; & \varrho_{0N} = \varrho_{0N}^* &= 1,206 \text{ kg/m}^3; \\ a_{0N} = a_{0N}^* &= 340,79 \text{ m/s}; & g_{0N} = g_{0N}^* &= 9,81 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Verwendet man ferner, wie in der UdSSR üblich, für den Ballistischen Koeffizienten den Ansatz

$$\bar{c} = \frac{d^2 i}{m g_{0N}} \cdot 1000,$$

so nimmt  $G_{43}(v_\tau)$  die spezielle Gestalt an

$$\begin{aligned} G_{43}^*(v_\tau) &= k_N^* v_\tau c_w^{(43)}(v_\tau/a_{0N}^*), \\ k_N^* &= 4,7376 \cdot 10^{-4} \text{ kp/m}^3. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Dieser  $k_N^*$ -Wert ist bei der Berechnung der  $G_{43}(v_\tau)$ -Tabelle auf  $k_N^* = 4,74 \cdot 10^{-4} \text{ kp/m}^3$  aufgerundet worden.

Außerhalb des Geschwindigkeitsbereichs  $265 \text{ m/s} \leq v_\tau \leq 1400 \text{ m/s}$ , für den  $G_{43}^*(v_\tau)$  tabellarisch gegeben ist, gilt die analytische Beziehung

$$G_{43}^*(v_\tau) = B_{43} v_\tau, \quad (3.114)$$

$$B_{43} = \begin{cases} 0,7454 \cdot 10^{-4} \text{ kp/m}^3 & \text{für } v_\tau \leq 265 \text{ m/s}, \\ 1,2315 \cdot 10^{-4} \text{ kp/m}^3 & \text{für } v_\tau \geq 1400 \text{ m/s}. \end{cases}$$

Wie *Kotova* [20] gezeigt hat, kann  $F_{43}(v_\tau)$  im Bereich  $v_\tau \leq 400 \text{ m/s}$  in guter Näherung durch ein Polynom 3. Grades approximiert werden:

$$F_{43}(v_\tau) \approx \tilde{F}(v_\tau) \equiv \bar{a}_3 v_\tau^3 - \bar{a}_2 v_\tau^2 + \bar{a}_1 v_\tau - \bar{a}_0; \quad (3.115)$$

$$\bar{a}_0 = 26,63 \text{ kp m}^{-1} \text{ s}^{-2}; \quad \bar{a}_1 = 0,1548 \text{ kp m}^{-2} \text{ s}^{-1};$$

$$\bar{a}_2 = 6,325 \cdot 10^5 \text{ kp m}^{-3}; \quad \bar{a}_3 = 6,396 \cdot 10^{-8} \text{ kp s m}^{-4}.$$

Zur Genauigkeit dieser Näherungsformel wird in [20] angegeben, im Bereich von  $v_\tau = (400 \dots 1400) \text{ m/s}$  sei der Approximationsfehler kleiner als 0,6 %:

$$\left| \frac{\tilde{F}(v_\tau) - F_{43}(v_\tau)}{F_{43}(v_\tau)} \right| \leq 0,006 \quad (400 \text{ m/s} \leq v_\tau \leq 1400 \text{ m/s}).$$

Diese Genauigkeit ist für viele Zwecke ausreichend. Das gilt insbesondere für die Behandlung von Aufgaben der linearen Störungstheorie.

Die Tafel II des Anhangs enthält Auszüge aus der  $G_{43}(v_\tau)$ -Tabelle, der  $F_{43}(v_\tau)$ -Tabelle sowie der Tabelle des zugehörigen Ballistischen Widerstandsgrades  $n_{43}(v_\tau)$ . Der Verlauf des Widerstandsbeiwertes  $c_w^{(43)}(M)$  kann Tafel III entnommen werden.

Die Verläufe der Widerstandsfunktionen  $G(v_\tau)$  und  $F(v_\tau)$  für das Luftwiderstandsgesetz 1943 und das Luftwiderstandsgesetz von *Siacci* sind in Bild 3.23 bzw. Bild 3.24 veranschaulicht; die entsprechenden Ballistischen Widerstandsgrade  $n(v_\tau)$  in Bild 3.25.

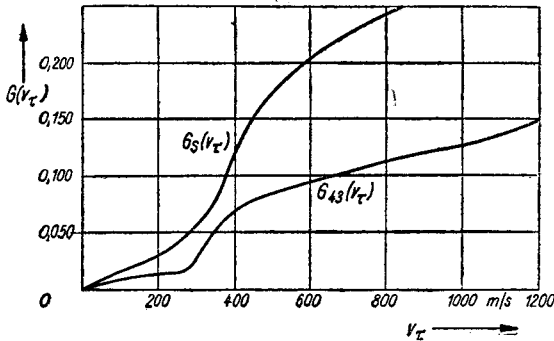


Bild 3.23  
Widerstandsfunktion  $G(v_\tau)$  für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 und das Luftwiderstandsgesetz von *Siacci* (Maßeinheiten siehe Text)

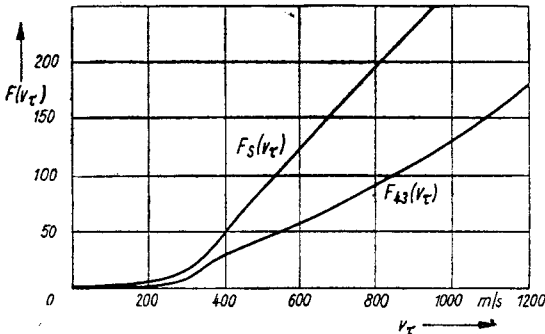


Bild 3.24  
Widerstandsfunktion  $F(v_\tau)$  für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 und das Luftwiderstandsgesetz von *Siacci* (Maßeinheiten siehe Text)

Beim Vergleich der Kurven für  $G_{43}(v_\tau)$  und  $G_S(v_\tau)$  bzw.  $F_{43}(v_\tau)$  und  $F_S(v_\tau)$  ist zu beachten, daß das Luftwiderstandsgesetz 1943 andere Bodenwerte der Normalatmosphäre enthält als das Luftwiderstandsgesetz von *Siacci*.

Verwendet man für  $c$  den Ansatz (3.110) und mißt  $c$  in  $\text{m}^2/\text{kg}$ , so ist  $G(v_\tau)$  in  $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$  und  $F(v_\tau)$  in  $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$  zu messen; beim Ansatz  $c = \bar{c}$  lauten die entsprechenden Maßeinheiten  $[\bar{c}] = \text{m}^2/\text{kp}$ ;  $[G(v_\tau)] = \text{kp m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ;  $[F(v_\tau)] = \text{kp m}^{-1} \text{s}^{-2}$ .

Bild 3.26 zeigt den Verlauf des Widerstandsbeiwerts  $c_w(M)$  bei dem Luftwiderstandsgesetz 1943 und einigen weiteren Standard-Luftwiderstandsgesetzen.

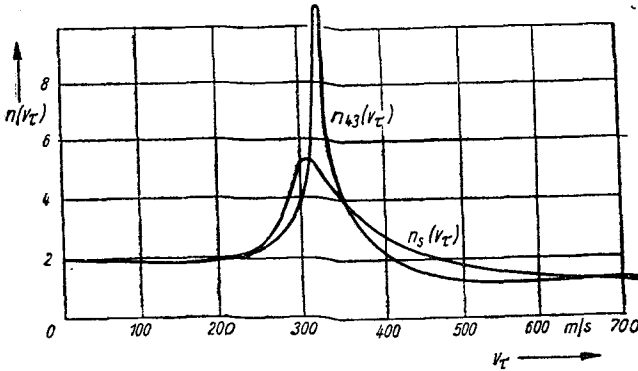


Bild 3.25 Ballistischer Widerstandsgrad  $n(v_T)$  des Standard-Luftwiderstandsgesetzes 1943 und des Luftwiderstandsgesetzes von Siacci als Funktion der fiktiven Geschwindigkeit  $v_T$

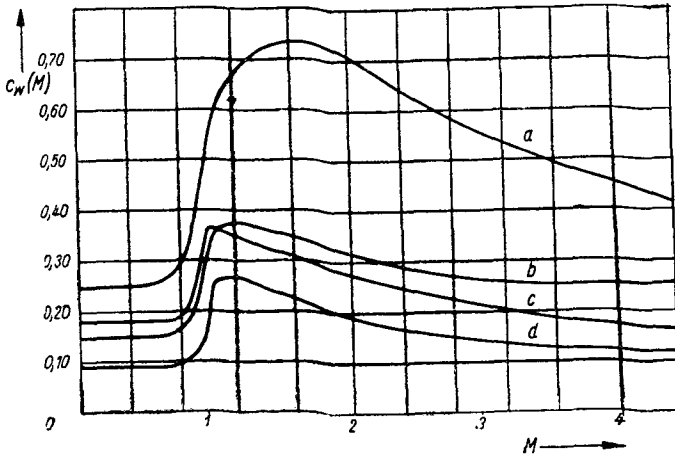


Bild 3.26 Widerstandsbeiwert  $c_w(M)$  als Funktion der Mach-Zahl  
 a - Luftwiderstandsgesetz von Siacci; b - Luftwiderstandsgesetz 1943;  
 c - Luftwiderstandsgesetz 1930; d - Luftwiderstandsgesetz nach Šapiro/  
 Mazing/Prudnikov [ 21]

Die Tafel II des Anhangs enthält Auszüge aus der  $G_{43}(v_\tau)$ -Tabelle, der  $F_{43}(v_\tau)$ -Tabelle sowie der Tabelle des zugehörigen Ballistischen Widerstandsgrades  $n_{43}(v_\tau)$ . Der Verlauf des Widerstandsbeiwertes  $c_w^{(43)}(M)$  kann Tafel III entnommen werden.

Die Verläufe der Widerstandsfunktionen  $G(v_\tau)$  und  $F(v_\tau)$  für das Luftwiderstandsgesetz 1943 und das Luftwiderstandsgesetz von *Siacci* sind in Bild 3.23 bzw. Bild 3.24 veranschaulicht; die entsprechenden Ballistischen Widerstandsgrade  $n(v_\tau)$  in Bild 3.25.

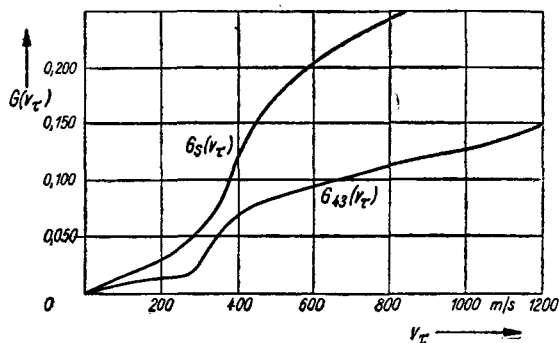


Bild 3.23  
Widerstandsfunktion  $G(v_\tau)$  für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 und das Luftwiderstandsgesetz von *Siacci* (Maßeinheiten siehe Text)

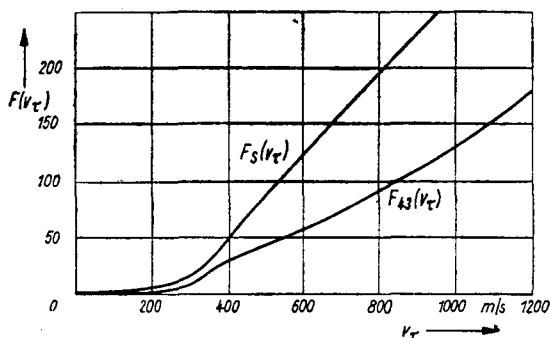


Bild 3.24  
Widerstandsfunktion  $F(v_\tau)$  für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 und das Luftwiderstandsgesetz von *Siacci* (Maßeinheiten siehe Text)

Beim Vergleich der Kurven für  $G_{43}(v_\tau)$  und  $G_S(v_\tau)$  bzw.  $F_{43}(v_\tau)$  und  $F_S(v_\tau)$  ist zu beachten, daß das Luftwiderstandsgesetz 1943 andere Bodenwerte der Normalatmosphäre enthält als das Luftwiderstandsgesetz von *Siacci*.

Verwendet man für  $c$  den Ansatz (3.110) und mißt  $c$  in  $\text{m}^2/\text{kg}$ , so ist  $G(v_\tau)$  in  $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$  und  $F(v_\tau)$  in  $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$  zu messen; beim Ansatz  $c = \bar{c}$  lauten die entsprechenden Maßeinheiten  $[\bar{c}] = \text{m}^2/\text{kp}$ ;  $[G(v_\tau)] = \text{kp m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ;  $[F(v_\tau)] = \text{kp m}^{-1} \text{s}^{-2}$ .



Bild 3.26 zeigt den Verlauf des Widerstandsbeiwerts  $c_w(M)$  bei dem Luftwiderstandsgesetz 1943 und einigen weiteren Standard-Luftwiderstandsgesetzen.

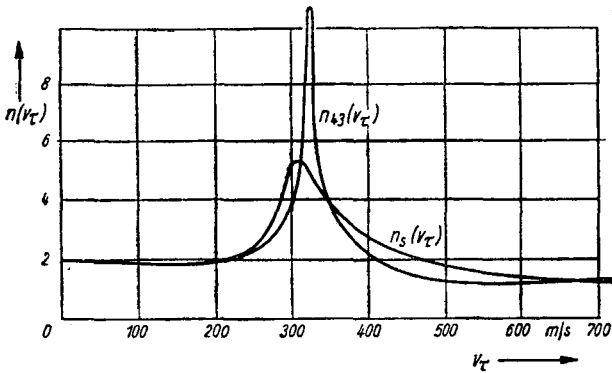


Bild 3.25 Ballistischer Widerstandsgrad  $n(v_c)$  des Standard-Luftwiderstandsgesetzes 1943 und des Luftwiderstandsgesetzes von Siacci als Funktion der fiktiven Geschwindigkeit  $v_c$

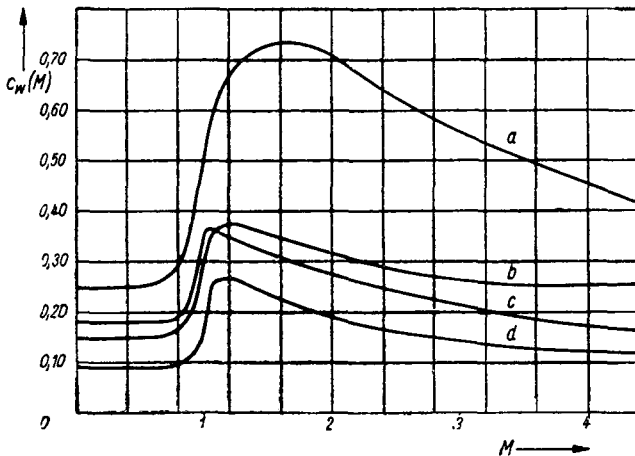


Bild 3.26 Widerstandsbeiwert  $c_w(M)$  als Funktion der Mach-Zahl  
 a – Luftwiderstandsgesetz von Siacci; b – Luftwiderstandsgesetz 1943;  
 c – Luftwiderstandsgesetz 1930; d – Luftwiderstandsgesetz nach Šapiro/  
 Mazing|Prudnikov [21]

Um eine Vorstellung von der Größe des Luftwiderstands zu vermitteln, den ein Geschöß nach dem Luftwiderstandsgesetz 1943 erfährt, sind in Tabelle 3.6 einige ballistische Daten für eine 152-mm-Granate, eine 76,2-mm-Granate und ein 7,62-mm-Infanteriegeschöß gegenübergestellt. Zur Berechnung der letzten beiden Spalten der Tabelle wurde  $i_{43} = 1$ ,  $H_r(h) = 1$  und  $v_r = v$  angenommen.

Tabelle 3.6 *Einfluß der ballistischen Geschößparameter auf den Luftwiderstand*

$d$ mm	$m$ kg	$Q$ g/cm <sup>2</sup>	$C_m$ g/cm <sup>3</sup>	$c_{43}$ m <sup>2</sup> /kg	$v$ m/s	$W$ kp	$\alpha = \frac{b'}{g_0}$ 1
152	50,0	276	14,2	0,462	1000	302,5	6,06
					750	190,0	3,80
					500	101,5	2,03
					250	10,75	0,22
76,2	6,5	143	14,7	0,894	1000	76,1	11,71
					750	47,8	7,36
					500	25,6	3,94
					250	2,76	0,42
7,62	0,011	24,1	24,9	5,28	1000	0,762	69,2
					750	0,478	43,4
					500	0,256	23,3
					250	0,028	2,5

*Bezeichnungen:*

$d$  – Geschößkaliber

$m$  – Geschößmasse

$Q$  – Querschnittsbelastung

$C_m$  – Massenkoeffizient

$v$  – Bahngeschwindigkeit

$W$  – Luftwiderstand

$\alpha$  – Verzögerung des Geschößes durch den Luftwiderstand, gemessen in Vielfachen der Schwerebeschleunigung am Boden

Das Verhältnis  $\alpha$  des Luftwiderstands  $W = m b'$  zur Schwerkraft  $G_0 = m g_0$  variiert in Abhängigkeit von den ballistischen Parametern innerhalb relativ weiter Grenzen, wie ein Blick auf die letzte Spalte von Tabelle 3.6 zeigt.

### \*3.5.3. Die Abhängigkeit der $\hat{G}(v_\tau)$ -Tabelle von den Bodenwerten der Standardatmosphäre

In den Ansatz für die Widerstandsfunktion  $\hat{G}(v_\tau)$  gehen die Bodenwerte der Standardatmosphäre ein. Hierin besteht – worauf bereits hingewiesen worden ist – der Hauptmangel des klassischen Ansatzes für die Verzögerungsfunktion.

Benutzt man bei der Berechnung des Luftwiderstands eine vorhandene  $\hat{G}(v_\tau)$ -Tabelle zusammen mit einer hieran nicht angepaßten Normalatmosphäre, so ergibt sich die Notwendigkeit, gewisse Umrechnungsfaktoren einzuführen. Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin, diese Umrechnungsfaktoren zu ermitteln.

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist der klassische Ansatz für die Verzögerungsfunktion  $b'$  in der Form

$$b' = \bar{c} H_\tau(h) \hat{G}(v_\tau) v, \quad (3.116)$$

$$\bar{c} = \frac{d^2 i}{m g_{0N}} \cdot 1000, \quad \hat{G}(v_\tau) = \frac{\pi \varrho_{0N} g_{0N}}{8000} v_\tau \hat{c}_w \left( \frac{v_\tau}{a_{0N}} \right) \quad (3.117)$$

und  $H_\tau(h)$  aus (3.84). Diese Darstellung liegt auch den Originaltabellen des Luftwiderstandsgesetzes 1943 zugrunde.

Entnimmt man die Schallgeschwindigkeit  $a(h)$  und die Höhenfunktion  $H_\tau(h)$  der Tabelle einer beliebigen Normalatmosphäre mit den Bodenwerten  $\{a_{0N}, \varrho_{0N}, \tau_{0N}, g_{0N}\}$ , dann würde man für die Berechnung der Verzögerung  $b'$  die zu dieser Normalatmosphäre passende Widerstandsfunktion (3.117) benötigen.

An Stelle der eigentlich erforderlichen  $\hat{G}(v_\tau)$ -Tabelle sei jedoch eine  $\hat{G}^*(v_\tau)$ -Tabelle vorhanden, die sich nicht auf die Bodenwerte  $\varrho_{0N}, a_{0N}, g_{0N}$ , sondern auf  $\varrho_{0N}^*, a_{0N}^*, g_{0N}^*$  bezieht:

$$\hat{G}^*(v_\tau) = \frac{\pi \varrho_{0N}^* a_{0N}^*}{8000} v_\tau \hat{c}_w \left( \frac{v_\tau}{a_{0N}^*} \right).$$

Geht man mit

$$v_\tau^* = \bar{a} v_\tau, \quad \bar{a} := a_{0N}^*/a_{0N} \quad (3.118)$$

in die  $\hat{G}^*(v_\tau)$ -Tabelle ein, so liest man den Wert ab

$$\hat{G}(v_\tau) = \frac{\pi \varrho_{0N}^* g_{0N}^*}{8000} v_\tau^* \hat{c}_w \left( \frac{v_\tau^*}{a_{0N}^*} \right) = \frac{\pi \varrho_{0N}^* g_{0N}^* a_{0N}^*}{8000 \cdot a_{0N}} v_\tau \hat{c}_w \left( \frac{v_\tau}{a_{0N}} \right). \quad (3.119)$$

Zusammenfassung von (3.117) und (3.119) liefert

$$\hat{G}(v_\tau) = K \hat{G}^*(v_\tau^*), \quad K := \frac{\varrho_{0N}^* a_{0N}^* g_{0N}}{\varrho_{0N}^* a_{0N}^* g_{0N}^*}. \quad (3.120)$$

Für die Transformation des Luftwiderstandsgesetzes 1943 von der Atmosphäre ANA auf die Atmosphäre SSA-64 erhält man auf diese Weise die speziellen Umrechnungsfaktoren

$$\bar{a}_{43} = 1,00150; \quad K_{43} = 1,0139. \quad (3.121)$$

Um eine angepaßte Widerstandsfunktion  $\bar{G}_{43}(v_\tau)$  zu ermitteln, hat man somit wie folgt vorzugehen:

- Berechnung von  $v_\tau^*$  nach (3.118) mit  $\bar{a}_{43}$  aus (3.121);
- Entnahme von  $\bar{G}_{43}^*(v_\tau^*)$  aus der  $\bar{G}_{43}^*(v_\tau)$ -Tabelle;
- Multiplikation von  $\bar{G}_{43}^*(v_\tau^*)$  mit  $K_{43}$  aus (3.121).

*Anmerkung:* Beim Übergang zu einer neuen Normalatmosphäre ändert sich im allgemeinen der gesamte Normalbahnverlauf, insbesondere wird ein anderer Formkoeffizient benutzt werden müssen (siehe Abschnitt 3.6.3.).

### 3.5.4. Weitere Standard-Luftwiderstandsgesetze

Neben den modernen Luftwiderstandsgesetzen, wie dem Widerstandsgesetz 1943, haben einige ältere Standard-Widerstandsgesetze eine gewisse Bedeutung bewahrt. Sie verdanken dies im wesentlichen zwei Umständen:

- Die analytisch definierten älteren Widerstandsgesetze sind für theoretische Untersuchungen besser geeignet als ein ausschließlich tabellarisch gegebenes modernes Widerstandsgesetz.
- Einige der älteren Widerstandsgesetze haben zur Berechnung umfangreicher ballistischer Tabellenwerke Verwendung gefunden, die für Überschlagsrechnungen auch heute noch brauchbar sind.<sup>1)</sup>

In diesem Zusammenhang sind folgende Luftwiderstandsgesetze zu nennen:

- Zonen-Potenzgesetz von *Majevski/Sabudski* (1872/1895),
- Gesetz von *Chapel* (1874),
- Gesetz der Kommission von *Gâvre* (1888),
- Gesetz von *Vallier* (1894),
- Gesetz von *Siacci* (1896),
- Gesetz von *Scheve* (1907),
- Gesetz der Fa. *Krupp* (1912)<sup>2)</sup>,
- Gesetz von *Dupuis/Garnier* (1928/1929),
- „Gesetz 1930“ (UdSSR).

Die vor dem ersten Weltkrieg aufgestellten Luftwiderstandsgesetze beziehen sich auf Geschosse aerodynamisch recht ungünstiger Gestalt.

<sup>1)</sup> Voraussetzung hierfür ist allerdings eine sorgfältige Wahl des Formkoeffizienten; siehe Abschnitt 3.6.3.3.

<sup>2)</sup> In der UdSSR wird dieses Gesetz auch *Gesetz von Krupp|Eberhard* oder *Gesetz von Eberhard* genannt.

Die Widerstandsbeiwerte dieser Geschosse sind demzufolge wesentlich größer als die Widerstandsbeiwerte der modernen Artilleriegeschosse (siehe die  $c_w$ -Kurven für das Luftwiderstandsgesetz von *Siacci* und das Luftwiderstandsgesetz 1943 in Bild 3.26).

Soweit für numerische Untersuchungen ein spezielles Luftwiderstandsgesetz erforderlich ist, wird in diesem Buch das Gesetz 1943 benutzt werden. Es erübrigt sich deshalb, auf die obengenannten älteren Luftwiderstandsgesetze näher einzugehen.<sup>1)</sup>

In der UdSSR ist 1955 ein neues Standard-Luftwiderstandsgesetz aufgestellt worden [45]. Es umfaßt den Geschwindigkeitsbereich  $0 \leq v_\tau \leq 1300$  m/s und wurde durch Verallgemeinerung des Gesetzes von *Krupp/Eberhard* sowie einiger anderer Luftwiderstandsgesetze gewonnen.

In den letzten zwei Jahrzehnten sind eine Reihe von Standard-Luftwiderstandsgesetzen entwickelt worden, die speziell auf die Strömungsverhältnisse bei Raketengeschossen zugeschnitten sind. Als Beispiel für ein derartiges Widerstandsgesetz sei das in [21] enthaltene Luftwiderstandsgesetz erwähnt (siehe Bild 3.26, Kurve d). Der Verlauf des Widerstandsbeiwerts dieses Gesetzes ist im Anhang, Tafel III, wiedergegeben.

### 3.6. Die Anpassung von Luftwiderstandsgesetzen

Um die mathematische Behandlung von ballistischen Problemen, insbesondere die Flugbahnberechnung, zu erleichtern, werden die individuellen Widerstandsbeiwert-Funktionen  $c_w = c_w(M)$  der Geschosse durch eine universelle Standard-Beiwertfunktion  $\hat{c}_w = \hat{c}_w(M)$  approximiert (Abschnitt 3.5.). Zur Kompensation des hierdurch entstehenden Fehlers wurde in die Ansätze für die Verzögerung durch den Luftwiderstand  $b'$  ein Faktor  $i$ , der sogenannte *Formkoeffizient*, eingefügt.

Über den Zahlenwert des Formkoeffizienten  $i$  wird durch Vorgabe einer speziellen Anpassungsbedingung verfügt. Da  $i$  ein Zahlenfaktor ist, muß diese Anpassungsbedingung notwendig skalar sein.

Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin, die für die Praxis wichtigsten Wege zur Bestimmung von Formkoeffizienten zu erläutern.

Es werden drei Grundtypen von Anpassungsbedingungen behandelt:

- die lokale Anpassung (*lokaler Formkoeffizient*:  $i^{(l)}$ );
- die Anpassung im Mittel (*mittlerer Formkoeffizient*:  $i^{(m)}$ ) und
- die globale Anpassung (*globaler Formkoeffizient*:  $i^{(g)}$ ).

<sup>1)</sup> Nähere Angaben zu diesen Gesetzen findet man zum Beispiel in [2], [4], [22], [23].

Die in den Schußtafeln angegebenen Formkoeffizienten sind in der Regel durch globale Anpassung entstanden.

Welche Art der Anpassung zweckmäßig ist, hängt von der zu bearbeitenden Aufgabe ab. Die Entscheidung über die Wahl des Anpassungsverfahrens muß jedoch in jedem Fall sehr sorgfältig erfolgen, da zur Bestimmung von  $i$  nur eine einzige skalare Bedingung gestellt werden kann und in den nichtangepaßten Punkten (bzw. bei den nichtangepaßten Bahnelementen) mehr oder minder große Abweichungen zwischen experimenteller und berechneter Bahn in Kauf genommen werden müssen.

### 3.6.1. Lokale Anpassung von Luftwiderstandsgesetzen

Interessiert die Verzögerung  $b'$ , die ein spezielles Geschloß erfährt, nur in einem einzigen Flugbahnpunkt (etwa an der Mündung der Waffe), dann ist es naheliegend, den Zahlenwert des Formkoeffizienten so festzulegen, daß die nach dem Standard-Widerstandsgesetz berechnete Verzögerung  $b'$  an der vorgegebenen Stelle ( $h = h^\circ = \text{const}$ ,  $M = M^\circ = \text{const}$ ) mit der Verzögerung übereinstimmt, die sich aus dem individuellen Widerstandsgesetz des Geschosses ergibt (*lokale Anpassung der Widerstandsgesetze*).

Die *Anpassungsbedingung für den lokalen Formkoeffizienten* lautet auf Grund von (3.79) und (3.105) somit

$$b' = \frac{\alpha_{\text{LN}} \rho_{\text{ON}} i^{(1)}}{2Q} H(h^\circ) M^{\circ 2} \hat{c}_w(M^\circ) = \frac{\alpha_{\text{LN}} \rho_{\text{ON}}}{2Q} H(h^\circ) M^{\circ 2} c_w(M^\circ),$$

$$i^{(1)} \cdot \hat{c}_w(M^\circ) = c_w(M^\circ).$$

Der lokale Formkoeffizient  $i^{(1)}$  ist demnach eine Funktion der *Mach-Zahl*  $M^\circ$ , bei der die Anpassung erfolgt:

$$i^{(1)}(M^\circ) = c_w(M^\circ) / \hat{c}_w(M^\circ). \quad (3.122)$$

In dem Zahlenbeispiel in Abschnitt 3.3.4. war für  $M = 2,496$  der Widerstandsbeiwert  $c_w(M) = 0,2695$  ermittelt worden. Der dieser *Mach-Zahl* entsprechende  $\hat{c}_w$ -Wert des Widerstandsgesetzes 1943 ist  $c_w = 0,2878$  (siehe Anhang, Tafel III). Der lokale Formkoeffizient  $i^{(1)}$  ergibt sich damit zu

$$i^{(1)} = \frac{c_w}{\hat{c}_w} = \frac{0,2695}{0,2878} = 0,936.$$

Der Formkoeffizient  $i^{(1)}(M^\circ)$  kann als Maßstabsfaktor interpretiert werden, mit dem der Widerstandsbeiwert  $\hat{c}_w(M^\circ)$  des Standard-Luftwiderstandsgesetzes multipliziert werden muß, um ihn an der Stelle  $M = M^\circ$  in den Widerstandsbeiwert  $c_w(M^\circ)$  des individuellen (geschoßtypischen) Widerstandsgesetzes überzuführen. An anderen Stellen ( $M \neq M^\circ$ ) werden die Kurven  $\hat{c}_w(M)$  und  $i^{(1)}(M^\circ) \hat{c}_w(M)$  jedoch mehr oder weniger stark voneinander abweichen:

$$c_w(M) \neq i^{(1)}(M^\circ) \hat{c}_w(M) \quad (M \neq M^\circ).$$

Das ist in Bild 3.27, in dem für einen speziellen  $M^\circ$ -Wert die Anpassung der  $c_w$ -Kurve des Widerstandsgesetzes 1943 an die  $c_w$ -Kurve des Widerstandsgesetzes von *Siacci* vorgenommen worden ist, deutlich zu erkennen.

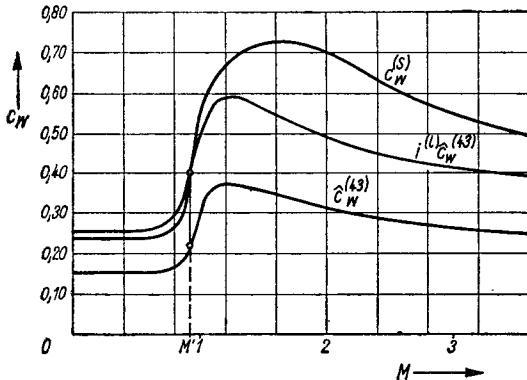


Bild 3.27  
Lokale Anpassung der Widerstandsbeiwert-Funktion  $\hat{c}_w^{(43)}(M)$  an die Beiwert-Funktion  $c_w^{(S)}(M)$  an der Stelle  $M = M^\circ$

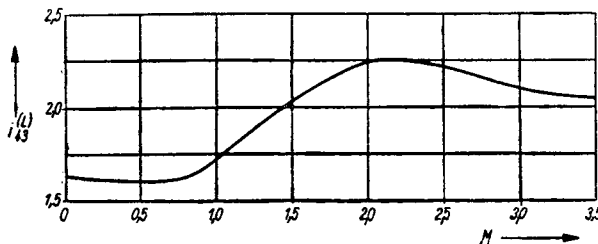


Bild 3.28  
Formkoeffizient  $i^{(1)}$  für die lokale Anpassung des Standard-Luftwiderstandsgesetzes von *Siacci* an das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943

Der lokale Formkoeffizient ist gut geeignet, Unterschiede in der Struktur zweier spezieller Standard-Luftwiderstandsgesetze sichtbar zu machen. Ein Beispiel für eine derartige Anwendung der lokalen Anpassung zeigt Bild 3.28, in dem der lokale Formkoeffizient des Luftwiderstandsgesetzes von *Siacci*, bezogen auf das Luftwiderstandsgesetz 1943, als Funktion der *Mach*-Zahl dargestellt ist:

$$i_{43}^{(1)}(M) = \frac{[\hat{c}_w(M)]_{Siacci}}{[\hat{c}_w(M)]_{1943}}$$

Der lokale Formkoeffizient ändert sich als Funktion von  $M$  in relativ weiten Grenzen.

### 3.6.2. Anpassung von Luftwiderstandsgesetzen im Mittel

Mit dem in Abschnitt 3.6.1. geschilderten Verfahren konnte eine lokale Anpassung von individueller und Standard-Widerstandsfunktion an der Stelle ( $M = M^0; h = h^0$ ) erzielt werden.

Bei der Behandlung von Problemen, die sich auf den Flugbahnverlauf als Ganzes beziehen, ist eine lokale Anpassung nicht zweckentsprechend, da die *Mach*-Zahl längs der Flugbahn keinen konstanten Wert hat, sondern ein gewisses Intervall von  $M = M_1$  bis  $M = M_2$  durchläuft. Es liegt in diesem Fall nahe, zu versuchen, die Beiwertfunktion des Standard-Widerstandsgesetzes  $\hat{c}_w(M)$  so an den  $c_w(M)$ -Verlauf des individuellen Widerstandsgesetzes anzupassen, daß auf dem Intervall  $[M_1, M_2]$  beide  $c_w$ -Kurven im Mittel möglichst gut übereinstimmen. Man gelangt auf diesem Wege zu einem *mittleren Formkoeffizienten*  $i^{(m)}$ , dessen Zahlenwert – bei vorgegebenem Mittelungsverfahren – eine Funktion des Intervalls ist, über dem die Mittelung erfolgt:

$$i^{(m)} = i^{(m)}([M_1, M_2]).$$

Was man unter einer „im Mittel möglichst guten“ Anpassung beider  $c_w$ -Kurven verstehen will, bedarf einer besonderen Festlegung. Im Sinne der *Čebyšev*-Approximation könnte man etwa fordern, daß die maximale Abweichung der Kurven  $c_w(M)$  und  $i^{(m)} \cdot \hat{c}_w(M)$  auf dem Intervall  $[M_1, M_2]$  ein Minimum wird:

$$\max_{[M_1, M_2]} |c_w(M) - i^{(m)} \cdot \hat{c}_w(M)| = \min!$$



Eine andere Möglichkeit zur Anpassung im Mittel bietet die Methode der kleinsten Quadrate.

Der entscheidende Mangel der Anpassung im Mittel besteht darin, daß das Bahnmodell unberücksichtigt bleibt. Für die Größe des Fehlers der Horizontalschußweite etwa ist nicht nur der absolute Betrag der Abweichung der  $c_w$ -Kurven von Bedeutung, sondern auch die Stelle der Flugbahn, an der diese Abweichung auftritt: Fehler, die bereits am Bahnbeginn (in der Umgebung des Abgangspunktes) entstehen, können den gesamten nachfolgenden Bahnverlauf verfälschen; Störungen, die erst kurz vor dem Auftreffen des Geschosses eintreten, „haben keine Zeit mehr“, die Bahnelemente wesentlich zu beeinflussen.

### 3.6.3. Globale Anpassung von Luftwiderstandsgesetzen

Die Anpassungsverfahren gemäß Abschnitt 3.6.1. und 3.6.2. betreffen unmittelbar den Verlauf des Widerstandsbeiwerts  $c_w(M)$ .

In der ballistischen Praxis ist der Grad der Übereinstimmung der Zahlenwerte für die Verzögerungen bei dem individuellen und dem Standard-Luftwiderstandsgesetz von untergeordnetem Interesse, es kommt vielmehr darauf an, daß die *Bahnelemente* von berechneter und tatsächlicher Flugbahn hinreichend gut übereinstimmen.

Die globale Anpassung verfolgt das Ziel, den Zahlenwert des Formkoeffizienten so zu bestimmen, daß für ein spezielles (vorgegebenes) Bahnelement – in einem vorgegebenen (festen) Bahnpunkt – der Fehler der Bahnvorhersage Null wird.

Bei Bahnen der Klasse Boden – Boden ist die Horizontalschußweite das wichtigste Flugbahnelement. Die globale Anpassung der Luftwiderstandsgesetze besteht in diesem Fall darin, den Zahlenwert des Formkoeffizienten so zu wählen, daß die nach dem individuellen und die nach dem Standard-Widerstandsgesetz berechnete Flugbahn die gleiche Horizontalschußweite ergeben.

#### 3.6.3.1. Globale Anpassung bei bekanntem individuellem Widerstandsgesetz

In der parabolischen Theorie sind die Bahnelemente Funktionen zweier Flugbahnparameter, und zwar der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und des Abgangswinkels  $\vartheta_0$ . Für die Horizontalschußweite  $x_e$  ist damit die symbolische Darstellung möglich

$$x_e = \varphi(v_0, \vartheta_0).$$

Beim *klassischen Bahnmodell für die Geschößbewegung im luftgefüllten Raum*<sup>1)</sup> tritt als dritter Parameter der Ballistische Koeffizient  $c$  hinzu:

$$x_e = \varphi(c, v_0, \vartheta_0 | W, \mathfrak{A}).$$

Der Bahnverlauf im luftgefüllten Raum hängt wesentlich von der speziellen Gestalt des Luftwiderstandsgesetzes und der Struktur der zugrunde gelegten Normalatmosphäre ab, was durch die Symbole  $W$  und  $\mathfrak{A}$  angedeutet wird.

Berechnet man die Horizontalschußweite  $x_e$  unter Verwendung des individuellen Widerstandsgesetzes  $W = W^{(1)}$ , so erhält man

$$\bar{x}_e = \bar{\varphi}(c, v_0, \vartheta_0 | W^{(1)}, \mathfrak{A}), \quad c = \frac{d^2}{m} \cdot 1000.$$

Bei Ersatz des individuellen Widerstandsgesetzes durch ein Standard-Widerstandsgesetz  $W = \hat{W}$  mit (zunächst noch beliebig) vorgegebenem Formkoeffizienten  $i = \hat{i}$  liefert die Integration der Flugbahngleichungen die Horizontalschußweite  $x_e = \hat{x}_e$ ,

$$\hat{x}_e = \hat{\varphi}(\bar{c}, v_0, \vartheta_0 | \hat{W}, \mathfrak{A}), \quad \bar{c} = c \hat{i}. \quad (3.123)$$

Die *Anpassungsbedingung*  $\hat{x}_e = \bar{x}_e$  lautet somit

$$\hat{\varphi}(c \hat{i}^{(s)}, v_0, \vartheta_0 | \hat{W}, \mathfrak{A}) = \bar{\varphi}(c, v_0, \vartheta_0 | W^{(1)}, \mathfrak{A}).$$

Diese Gleichung ist mit Hilfe eines geeigneten (numerischen) Verfahrens nach  $\hat{i}$  aufzulösen. Man erhält damit den globalen Formkoeffizienten  $i^{(s)}$ ,

$$\hat{i} = i^{(s)} = \psi(c, v_0, \vartheta_0 | W^{(1)}, \hat{W}, \mathfrak{A}).$$

Der globale Formkoeffizient hängt (direkt und über die Normalatmosphäre  $\mathfrak{A}$ ) von einer großen Anzahl von Parametern ab. Die für  $i^{(s)}$  ermittelten Zahlenwerte gelten daher nur für die spezielle Kombination von Standard-Widerstandsgesetz  $\hat{W}$  und individuellem Widerstandsgesetz  $W^{(1)}$  und sind überdies von der gewählten Normalatmosphäre  $\mathfrak{A}$  abhängig.

<sup>1)</sup> Zum klassischen Bahnmodell siehe Kapitel 4.

### 3.6.3.2. Globale Anpassung bei unbekanntem individuellem Widerstandsgesetz

Individuelles Widerstandsgesetz  $W^{(1)}$  und Standard-Widerstandsgesetz  $\hat{W}$  sind in der Regel nicht gleichzeitig bekannt, wie in Abschnitt 3.6.3.1. zunächst angenommen wurde. Man verwendet in der Praxis deshalb an Stelle der nach dem individuellen Widerstandsgesetz berechneten Schußweite  $\bar{x}_e$  die experimentell ermittelte Schußweite  $\tilde{x}_e$ . Steht ein ballistisches Tafelwerk<sup>1)</sup> zur Verfügung, das die Horizontal-schußweite  $x_e$  als Funktion der drei Parameter  $c$ ,  $v_0$  und  $\vartheta_0$  enthält und auf das Standard-Widerstandsgesetz  $\hat{W}$  bezogen ist, so läßt sich die globale Anpassung der Schußweiten  $\bar{x}_e$  und  $\tilde{x}_e$  sehr rasch bewerkstelligen:

- Man liest in dem Tafelwerk für das Tripel  $\{\tilde{x}_e, v_0, \vartheta_0\}$  den zugehörigen Ballistischen Koeffizienten  $c = \tilde{c}$  ab:

$$\tilde{c} = \tilde{c}(x_e^*, v_0, \vartheta_0) = \tilde{c}[\tilde{x}_e(v_0, \vartheta_0), v_0, \vartheta_0].$$

- Man dividiert  $\tilde{c}$  durch  $c$  aus (3.110) und erhält den globalen Formkoeffizienten  $i^{(g)}$ :

$$\tilde{i} = i^{(g)} = \tilde{c}/c = f(v_0, \vartheta_0).$$

Für einen gegebenen Geschosstyp ist der globale Formkoeffizient eine Funktion der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und des Abgangswinkels  $\vartheta_0$ .

Hält man zusätzlich noch  $v_0$  fest ( $v_0: const$ ), so ist der Verlauf des globalen Formkoeffizienten  $i^{(g)}$  als Funktion des Abgangswinkels  $\vartheta_0$  leicht grafisch darstellbar. Die Kurve  $i^{(g)} = f(\vartheta_0)$  spielt bei der Aufstellung von Schußtafeln eine wichtige Rolle; siehe Kapitel 7.

Mit dem Verfahren der globalen Anpassung erfaßt man nicht nur die Fehler, die durch die Approximation des individuellen Luftwiderstandsgesetzes  $W$  durch das Standard-Luftwiderstandsgesetz  $\hat{W}$  verursacht werden, sondern zugleich auch den Vorhersagefehler, der durch die physikalischen Idealisierungen des Bahnmodells bedingt ist.

Die globale Anpassung von Flugbahnen hat große praktische Bedeutung. Man bezeichnet das Anpassungsproblem deshalb auch als *inverses Hauptproblem der Äußeren Ballistik*.

<sup>1)</sup> Zum Aufbau dieser Tafelwerke siehe Abschnitt 5.7.

Die globale Anpassung, wie sie hier beschrieben worden ist, bewirkt, daß die berechnete Flugbahn durch einen vorgegebenen Punkt – den Auftreffpunkt – verläuft. Die Anpassung der Schußweiten hat jedoch keineswegs automatisch eine Anpassung auch der übrigen Bahnelemente (Flugzeit, Bahngeschwindigkeit usw.) zur Folge: Die Zahlenwerte dieser Bahnelemente können unter Umständen erheblich voneinander abweichen.

Diese Bemerkung gilt sinngemäß auch für den Fall, daß die globale Anpassung nacheinander für verschiedene Bahnelemente im Auftreffpunkt, etwa die Flugzeit  $t_e$  und die Schußweite  $x_e$ , vorgenommen wird. Die hierbei ermittelten globalen Formkoeffizienten  $i^{(s)}\{t_e\}$  und  $i^{(s)}\{x_e\}$  stimmen in der Regel nicht überein.

### 3.6.3.3. Globale Anpassung von Standard-Luftwiderstandsgesetzen

In der Praxis ergibt sich häufig die Aufgabe, einen vorgegebenen Formkoeffizienten auf ein anderes Standard-Luftwiderstandsgesetz umzurechnen. Diese Aufgabe ist inhaltlich damit identisch, zwei Standard-Luftwiderstandsgesetze  $\hat{W}^{(1)}$  und  $\hat{W}^{(2)}$  aneinander anzupassen.

Stehen für beide Standardgesetze ballistische Tafelwerke zur Verfügung, die die Horizontalschußweite  $x_e$  als Funktion der Parameter  $c$ ,  $v_0$ ,  $\vartheta_0$  liefern, so geht man mit einem speziellen Wertetripel  $\{x_e, v_0, \vartheta_0\}$  in diese Tafelwerke ein und liest  $c = c_1$  bzw.  $c = c_2$  ab. Division von  $c_1$  durch  $c_2$  ergibt

$$\beta_{1,2} := c_1/c_2 = i_1^{(s)}/i_2^{(s)}, \quad i_2^{(s)} = \beta_{1,2} i_1^{(s)}.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Ballistischen Koeffizienten beider Tafelwerke in gleicher Weise, etwa in der Form (3.110) definiert sind.

Für ein gegebenes Geschöß und eine konstante Anfangsgeschwindigkeit ist  $\beta_{1,2}$  eine eindeutige Funktion des Abgangswinkels  $\vartheta_0$  (bzw. der Horizontalschußweite  $x_e$ ).

In Tabelle 3.7 sind einige Umrechnungsfaktoren  $\beta_s$  für den Übergang vom Luftwiderstandsgesetz von *Siacci* zum Luftwiderstandsgesetz 1943 wiedergegeben, die durch globale Anpassung ermittelt worden sind.

Der Verlauf der  $\beta_s$ -Werte ist in Bild 3.29 veranschaulicht. Man erkennt, daß die Zahlenwerte des Umrechnungsfaktors relativ stark von den jeweiligen Anfangsbedingungen abhängen.

Tabelle 3.7 Umrechnungsfaktoren  $\beta_s = i_{43}^{(s)} / i_s^{(s)}$  für den Übergang vom Luftwiderstandsgesetz von Siacci zum Luftwiderstandsgesetz 1943 ( $c_s = 1,0 \text{ m}^2/\text{kg}$ )

$\vartheta_0 \backslash v_0$ m/s	200	400	600	800	1000
5°	1,58	1,77	1,94	2,05	2,09
10°	1,63	1,82	1,92	2,01	2,04
15°	1,62	1,80	1,90	1,97	2,01
20°	1,63	1,79	1,87	1,95	1,99
25°	1,63	1,77	1,86	1,94	1,97
30°	1,63	1,75	1,84	1,92	1,96
35°	1,63	1,74	1,83	1,90	1,95
40°	1,63	1,73	1,82	1,89	1,94
45°	1,63	1,73	1,81	1,88	1,93
50°	1,63	1,73	1,81	1,88	1,92
55°	1,63	1,73	1,81	1,87	1,92
60°	1,63	1,73	1,81	1,87	1,92

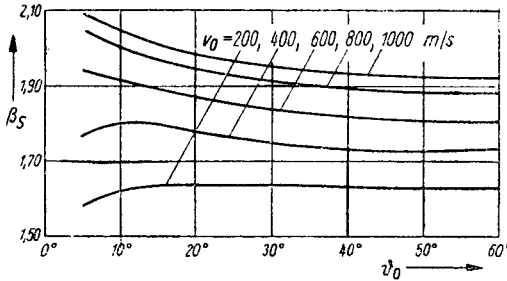


Bild 3.29  
Quotient  $\beta_s = i_{43}^{(s)} / i_s^{(s)}$  als Funktion des Abgangswinkels  $\vartheta_0$  (für  $v_0 = 200, 400, 600, 800, 1000 \text{ m/s}$  und  $c_s = 1,0 \text{ m}^2/\text{kg}$ )

Die in der Literatur anzutreffenden Formeln zur näherungsweise Berechnung von Formkoeffizienten sind nur mit äußerster Vorsicht verwendbar. Es empfiehlt sich, Formkoeffizienten, die in Schußtafel-Berechnungen eingehen, stets durch globale Anpassung zu ermitteln.

### Kontrollfragen zu Kapitel 3

- 3.1. Erläutern Sie die Begriffe *Modellatmosphäre* und *Standardatmosphäre*!
- 3.2. Welche Zonen werden in dem Schichtmodell der Erdatmosphäre unterschieden? Worin bestehen ihre physikalischen Besonderheiten?
- 3.3. Auf welchen Grundannahmen beruhen die modernen Modellatmosphären? Wodurch unterscheiden sie sich von den älteren Modellatmosphären?
- 3.4. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die Modellatmosphäre statisch und thermodynamisch stabil ist?
- 3.5. Wie sind die Molekulartemperatur  $\tau^*$  und die geopotentielle Höhe  $h^*$  definiert? Was wird mit der Einführung dieser Größen bezweckt?
- 3.6. Unter welchen Voraussetzungen geht die Molekulartemperatur in die kinetische (absolute) Temperatur und die geopotentielle Höhe in die geometrische Höhe über?
- 3.7. Welche Parameter müssen bei einer Modellatmosphäre vorgegeben werden, um die Höhenabhängigkeit der meteorologischen Elemente eindeutig festzulegen?
- 3.8. Erläutern Sie den Temperaturverlauf der Standardatmosphäre SSA-64!
- 3.9. Welche grundsätzlichen Unterschiede bestehen zwischen der Standardatmosphäre SSA-64 und der sowjetischen Artillerie-Normalatmosphäre ANA?
- 3.10. Welche Maße für die Luftfeuchte werden in der Ballistik benutzt? Wie sind sie definiert?
- 3.11. Welchen Einfluß hat die Luftfeuchte auf den Druckverlauf  $p(h)$  und den Schallgeschwindigkeitsverlauf  $a(h)$  in der Atmosphäre qualitativ?
- 3.12. Erläutern Sie die Begriffe *fiktive Temperatur* und *virtuelle Temperatur*!
- 3.13. Wie sind der Druckpunkt  $P$  und der Schwerpunkt  $S$  eines Geschosses erklärt?
- 3.14. Skizzieren Sie die Zerlegung der Resultierenden der aerodynamischen Kräfte in Stirnwiderstand, Auftrieb und Querkraft!
- 3.15. Wie lautet der aerodynamische Ansatz für den Luftwiderstand? Von welchen dimensionslosen Parametern hängt der Widerstandsbeiwert  $c_w$  ab?
- 3.16. In welche Komponenten kann der resultierende Widerstandsbeiwert  $c_w$  zerlegt werden?  
Welchen relativen Beitrag liefern die einzelnen Anteile zum resultierenden Widerstandsbeiwert?
- 3.17. Welche Strömungstypen werden – nach der Größe der jeweiligen *Mach-Zahl* – unterschieden?
- 3.18. Wie ist die fiktive Geschwindigkeit definiert?
- 3.19. Wodurch unterscheiden sich der moderne und der klassische ballistische Ansatz für die Verzögerung durch den Luftwiderstand?
- 3.20. Welche physikalische Dimension hat der Ballistische Koeffizient beim modernen und beim klassischen Verzögerungsansatz?
- 3.21. Wie kann der Ballistische Widerstandsgrad physikalisch interpretiert werden?
- 3.22. Erläutern Sie Aufbau und Struktur des sowjetischen Standard-Luftwiderstandsgesetzes 1943!
- 3.23. Welche Verfahren zur Bestimmung von Formkoeffizienten kennen Sie? Was läßt sich über die Anwendungsbereiche dieser Anpassungsverfahren sagen?
- 3.24. Wie hat man vorzugehen, um einen (bekannt)en Formkoeffizienten auf ein anderes Standard-Luftwiderstandsgesetz zu transformieren?

### Übungsaufgaben zu Kapitel 3

- 3.1. Man berechne Druck-, Dichte- und Schallgeschwindigkeitsverlauf als Funktion der geometrischen Höhe  $h$  in einer Modellatmosphäre mit dem (vorgegebenen) Temperaturverlauf  $\tau^*(h^*) = a_0 + a_1 h^* + a_2 h^{*2}$ !
- 3.2. Für ein Geschöß mit dem Ballistischen Koeffizienten  $c_{d3} = 1,0 \text{ m}^2/\text{kg}$ , das sich mit der Geschwindigkeit  $v = 1500 \text{ m/s}$  bewegt, berechne man das Verhältnis  $\alpha = W/G$  von Luftwiderstand  $W$  zu Schwerkraft  $G$  in den Höhen  $h = 0; 5; 10$  und  $15 \text{ km}$  (Atmosphäre SSA-64 und Widerstandsgesetz 1943)!
- \*3.3. Man ermittle die Abweichung der meteorologischen Elemente in der Höhe  $h = 10 \text{ km}$  für zwei Modellatmosphären mit linearer Abhängigkeit der Molekular-temperatur  $\tau^*$  von der geopotentiellen Höhe  $h^*$  und den Temperaturgradienten  $\Lambda = \Lambda_1^*$  bzw.  $\Lambda = \Lambda_a^*$  ( $\Lambda_a^*$ : adiabatischer Temperaturgradient). Die übrigen Grundparameter beider Atmosphären seien gleich denen der Atmosphäre SSA-64!
- \*3.4. Nach dem in Abschnitt 3.2.3.4. angegebenen Verfahren stelle man die thermodynamische Stabilitätsbedingung für feuchte (ungesättigte) Luft auf! Phasenumwandlungen des Wassers (Verdampfung, Kondensation) sollen unberücksichtigt bleiben.
- 3.5. Aus welcher Beziehung errechnet sich die fiktive Temperatur  $\tau^\circ$  der Dichte  $\rho_{fL}$  in feuchter Luft bei konstanter Feuchtezahl ( $s = s_0 = \text{const}$ )? Vergleichen Sie das erhaltene Ergebnis mit der fiktiven Temperatur  $\bar{\tau}$  für den Druck  $p_{fL}$ !
- \*3.6. Man wiederhole die in Abschnitt 3.3.4. durchgeführten Rechnungen für ein Geschöß
  - a) mit ogivaler Spitze,
  - b) mit parabolischer Spitzeder gleichen relativen Spitzenhöhe!
  - c) In welchem Verhältnis stehen die resultierenden Widerstandsbeiwerte  $c_w$  der Geschosse mit konischer, ogivaler und parabolischer Spitze?
- \*3.7. Wie lauten die Faktoren  $k$  ( $V_G = k d^3$ ) für die in Aufgabe 3.6. angeführten Geschosse mit ogivaler und parabolischer Spitze?
- 3.8. Man berechne die Ableitung der Verzögerung durch den Luftwiderstand  $b'$  nach der fiktiven Geschwindigkeit  $v_\tau$ !
- \*3.9. a) Wie ändert sich die Verzögerung durch den Luftwiderstand  $b'$  eines Geschosses, das die Bahngeschwindigkeit  $v$  hat und sich in der Höhe  $h$  über dem Erdboden befindet, wenn die Feuchtezahl der Atmosphäre von  $s(h) \equiv 0$  auf den Wert  $s(h) \equiv s_0 = \text{const}$  ansteigt?
  - b) Man linearisiere das unter a) erhaltene Ergebnis bezüglich  $s_0$ !

## **4. Das klassische Bahnmodell der Äußeren Ballistik**

Die Berechnung der Flugbahnen antriebsfreier Geschosse kurzer und mittlerer Reichweite erfolgt in der Praxis mit Hilfe des sogenannten *klassischen Bahnmodells der Äußeren Ballistik*. Dieses Bahnmodell unterscheidet sich von dem Bahnmodell der parabolischen Theorie (Kapitel 2) vor allem durch die Einbeziehung des tangential zur Flugbahn wirkenden Luftwiderstands.

Ziel dieses Kapitels ist es, das System von Voraussetzungen zu formulieren, auf dem das klassische Bahnmodell beruht, die Differentialgleichungen des Bahnmodells herzuleiten und die allgemeinen Eigenschaften der durch diese Gleichungen beschriebenen Flugbahnen zu erörtern.

Die Verfahren zur analytischen und numerischen Integration der Gleichungen des klassischen Bahnmodells bilden den Gegenstand des folgenden Kapitels 5. Die auf dem klassischen Bahnmodell aufbauende Störungstheorie wird in Kapitel 6 behandelt.

Das klassische Bahnmodell nimmt in der Äußeren Ballistik eine zentrale Stellung ein. Es ist deshalb erforderlich, die mit diesem Bahnmodell zusammenhängenden Fragen relativ ausführlich zu behandeln.

### **4.1. Aufstellung des Bahnmodells**

#### **4.1.1. Das System der physikalischen Voraussetzungen**

Um ein außenballistisches Modell für die Vorhersage des Flugbahnverlaufs eines Geschosses aufzustellen, sind, wie in Kapitel 1 erläutert worden war, Festlegungen zu folgenden Teilfragen erforderlich:

- I. der Struktur des Flugkörpers;
- II. dem Bezugssystem, in dem der Bewegungsablauf betrachtet wird;



- III. dem System der Kräfte, die an dem Flugkörper angreifen;
- IV. der Struktur des Mediums, in dem sich das Geschöß bewegt, und
- V. dem Bewegungszustand des Geschößes im Anfangspunkt des Vorhersageintervalls.

Die bei dem parabolischen Bahnmodell zu Punkt I und V getroffenen Festlegungen<sup>1)</sup> werden im klassischen Bahnmodell beibehalten. Der Neufassung bedürfen jedoch die Annahmen zu Punkt III und IV; die Voraussetzung unter Punkt II wird etwas abgeschwächt.

Das vollständige *System von Voraussetzungen*, auf dem das klassische Bahnmodell beruht, lautet:

- I. *Struktur des Flugkörpers*: Der Flugkörper ist eine Punktmasse der Masse  $m$  ( $m = \text{const}$ ).
- II. *Bezugssystem*: Die Geschößbewegung wird in einem Koordinatensystem beschrieben, das fest mit der Erdoberfläche verbunden ist. Von der Erdrotation wird abgesehen, so daß das erdfeste Koordinatensystem als Inertialsystem behandelt werden kann.
- III. *Kräftesystem am Flugkörper*: Am Geschöß greifen zwei Kräfte an,
  - 1. die Schwerkraft  $G$  und
  - 2. der (tangential zur Flugbahn und entgegen der Bewegungsrichtung weisende) Luftwiderstand  $W$ .
- IV. *Struktur des Mediums, in dem die Geschößbewegung vonstatten geht*: Das Geschöß bewegt sich durch die statisch und thermodynamisch stabile Erdatmosphäre, die als physikalisches Kontinuum angenommen wird.
- V. *Bewegungszustand im Anfangspunkt des Vorhersageintervalls*: Das Geschöß befindet sich zum Zeitpunkt  $t = t_0$  im Ursprung des erdfesten Koordinatensystems gemäß Festlegung II und hat dort die Geschwindigkeit  $v = v_0$  relativ zur Erdoberfläche.

Die Geschößbewegung geht somit in einem Kraftfeld vonstatten, das durch eine Zentralkraft (die Schwerkraft) und eine Tangentialkraft (den Luftwiderstand) gebildet wird.

Die Flugbahnen, die unter dem Einfluß eines derartigen Kraftfeldes zustande kommen, sind ebene Raumkurven, wie sich ganz allgemein

<sup>1)</sup> Siehe Abschnitt 2.1.

zeigen läßt.<sup>1)</sup> Durch geeignete Wahl des (erdfesten) Koordinatensystems kann die Geschosßbewegung als mathematisch zweidimensionaler Vorgang behandelt werden.

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen für das klassische Bahnmodell wird die Geschosßbewegung im allgemeinen in einem rechtwinklig-kartesischen Koordinatensystem  $x, y, z$  beschrieben, dessen Achsenlage gemäß Bild 2.1 (Seite 16) gewählt wird.

Setzt man das Gravitationspotential der Erde als kugelsymmetrisch voraus, so ist die an dem Geschosß angreifende Schwerkraft eine Zentralkraft, die zum Erdmittelpunkt weist und deren Betrag von der Entfernung Geschosß – Erdmittelpunkt nach dem Gesetz (3.15) abhängt.

Eine wesentliche Voraussetzung des klassischen Bahnmodells in seiner üblichen Form ist es, zwar die Höhenabhängigkeit der Fallbeschleunigung zu berücksichtigen, die Abweichung des Schwerfeldes von einem Parallelfeld längs der Flugbahn jedoch zu vernachlässigen: *Man nimmt an, daß der Vektor der Fallbeschleunigung die Richtung der negativen  $y$ -Achse des rechtwinklig-kartesischen  $x, y, z$ -Systems hat.*

In den Ansätzen für die Verzögerung durch den Luftwiderstand (3.79) und (3.86), die aus (3.73) folgen, sowie in der Formel für die Fallbeschleunigung (3.16) tritt die geometrische Höhe  $h$  des Geschosses über dem Erdboden auf. Im Rahmen des klassischen Bahnmodells wird die Höhe  $h$  durch die Ordinate  $y$  des erdfesten  $x, y$ -Koordinatensystems ersetzt, dessen Ursprung im Abgangspunkt liegt (Bild 4.1).

Der Ersatz der geometrischen Höhe  $h$  durch die Ordinate  $y$  ist zulässig, solange die Horizontalschußweite  $x_e$  klein ist (siehe Abschnitt 4.1.4.).

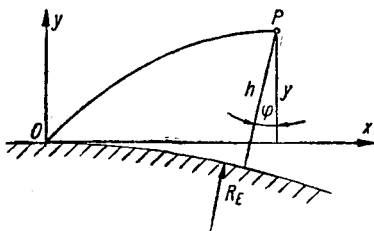


Bild 4.1

Geometrische Höhe  $h$  über dem Erdboden und Ordinate  $y$  eines Flugbahnpunktes  $P$

Der Betrag des in negative Tangentenrichtung weisenden Luftwiderstands  $W$  sei durch (3.72) gegeben; als Atmosphäre findet eine Modellatmosphäre gemäß Abschnitt 3.2. Verwendung.

<sup>1)</sup> Ein diesbezüglicher Beweis stammt von R. Rothe; siehe Molitz; Strobel [23], S. 135 ff.

Für die Verzögerung  $b'$  durch den Luftwiderstand gilt somit

$$b' = |b'| = C_0 H(y) \Phi(M) = c H_r(y) G(v_r) v, \\ \frac{b'}{|b'|} = -\frac{v}{|v|} = \frac{v}{v}; \quad M = \frac{v}{a(y)} = \frac{v_r}{a_0}, \quad (4.1)$$

und für die Fallbeschleunigung  $g$ :

$$g(y) = g_0 \left( \frac{R_E}{R_E + y} \right)^2; \quad \frac{g(y)}{g_0} = -i_y. \quad (4.2)$$

Zur Berechnung von Bahnen mit Schußtafelgenauigkeit werden in diesem Buch die Atmosphären SSA-64 oder ANA und das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 zugrunde gelegt.<sup>1)</sup>

Bei der Behandlung anderer ballistischer Probleme, insbesondere den Untersuchungen zur geschlossenen (näherungsweise) Integration der Bewegungsgleichungen, werden neben dem tabellarisch gegebenen Luftwiderstandsgesetz 1943 auch einfachere, analytische Widerstandsgesetze (wie Potenzansätze  $b' \sim M^n$ ,  $n \geq 1$ ) benutzt. In diesen Fällen ist es üblich (und zulässig), die höhenabhängigen meteorologischen Elemente durch konstante Mittelwerte zu ersetzen.

#### 4.1.2. Das Anfangswertproblem für das klassische Bahnmodell]

Die Voraussetzungen I bis V (Abschnitt 4.1.1.) genügen, um die Newtonschen Bewegungsgleichungen für das Punktmassen-Geschoß des klassischen Bahnmodells aufzustellen.

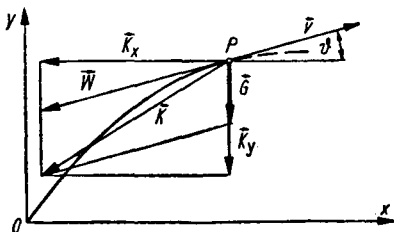


Bild 4.2  
Zerlegung der resultierenden Kraft  $K$  in eine horizontale Komponente  $K_x$  und eine vertikale Komponente  $K_y$ .

<sup>1)</sup> Zur Atmosphäre SSA-64 siehe Abschnitt 3.2.6.2., zur Atmosphäre ANA siehe Abschnitt 3.2.6.3., zum Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 vergleiche Abschnitt 3.5.2.

Zerlegt man die Resultierende der an dem Punktmassen-Geschoß angreifenden Kräfte  $\mathbf{K} = \mathbf{W} + \mathbf{G}$  in eine horizontale Komponente  $K_x$  und eine vertikale Komponente  $K_y$ , so ergibt sich (siehe Bild 4.2):

$$\begin{aligned} K_x &= W_x = -W \cos \vartheta, \\ K_y &= W_y + G_y = -W \sin \vartheta - G. \end{aligned}$$

Die z-Komponente von  $\mathbf{K}$  ist identisch gleich Null ( $K_z = 0$ ). Auf Grund des 2. Newtonschen Axioms erhält man als Bewegungsgleichungen des Geschosses:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= -W \cos \vartheta, \\ m \ddot{y} &= -W \sin \vartheta - G. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Die zugehörigen Anfangsbedingungen lauten nach Voraussetzung V:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \quad \dot{x}(0) = u_0 = v_0 \cos \vartheta_0; \\ y(0) &= 0, \quad \dot{y}(0) = w_0 = v_0 \sin \vartheta_0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Mit

$$\begin{aligned} W &= m b', & G &= m g, \\ \dot{x} &= v \cos \vartheta, & \dot{y} &= v \sin \vartheta \end{aligned} \tag{4.5}$$

und der Abkürzung  $E := b'/v$  ergibt sich aus (4.3) und (4.4) für die Flugbahnen des klassischen Bahnmodells das *Anfangswertproblem*:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -E \dot{x}, & x(0) &= 0, \quad \dot{x}(0) = u_0; \\ \ddot{y} &= -E \dot{y} - g, & y(0) &= 0, \quad \dot{y}(0) = w_0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Wenn man für die Verzögerung  $b'$  den klassischen Ansatz (3.86) benutzt, so ist  $E$  eine Funktion von  $c$ ,  $y$  und  $v$ :

$$E = E(c, y, v), \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \tag{4.7}$$

und die Lösung des Anfangswertproblems (4.6) lautet symbolisch

$$x = \varphi_x(t; t_0 | c, v_0, \vartheta_0); \quad y = \varphi_y(t; t_0 | c, v_0, \vartheta_0). \tag{4.8}$$

Für die Atmosphäre SSA-64 und das Luftwiderstandsgesetz 1943 hängt  $E$  in komplizierter Weise von  $y$  und  $v$  ab. Man wird deshalb im allgemeinen nicht erwarten können, die Lösung (4.8) formelmäßig (in geschlossener Form) zu erhalten.

Für die analytischen und numerischen Untersuchungen zur Integration der ballistischen Bewegungsgleichungen ist es zweckmäßig, das System von zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung (4.6) in ein System von vier Differentialgleichungen 1. Ordnung umzuwandeln.

Führt man die Horizontal- und die Vertikalkomponente  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  der Bahngeschwindigkeit  $v$  als neue abhängige Veränderliche  $u$ ,  $w$  ein,

$$u := \dot{x}, \quad w := \dot{y},$$

so geht das Anfangswertproblem (4.6) über in:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, & x(0) &= 0, \\ \dot{y} &= w, & y(0) &= 0, \\ \dot{u} &= -E u, & u(0) &= u_0, \\ \dot{w} &= -E w - g, & w(0) &= w_0, \\ E &= c H_\tau(y) G(v_\tau); & v_\tau &= \sqrt{u^2 + w^2} \cdot \sqrt{\tau_{0N}/\tau(y)}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Man bezeichnet dieses Anfangswertproblem als *t-System der Bewegungsgleichungen*.

In dem *t-System* sind die drei letzten Gleichungen gekoppelt; sie müssen somit parallel integriert werden. Nachdem  $u = u(t)$  bekannt ist, kann  $x(t)$  durch eine einfache Quadratur gewonnen werden:

$$x(t) = \int_{t_0}^t u(t') dt'. \tag{4.10}$$

Das *t-System* ist bei beliebigen Anfangsbedingungen anwendbar.

### 4.1.3. Der Energiesatz

Bei der Bewegung eines Geschosses im luftleeren Raum ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie des Geschosses längs der Flugbahn konstant und gleich dessen Mündungsenergie.<sup>1)</sup> Man nennt eine Bewegung mit dieser Eigenschaft in der Mechanik *konservativ*.

<sup>1)</sup> Siehe hierzu Abschnitt 2.2.3.

Im luftgefüllten Raum nimmt die mechanische Gesamtenergie des Geschosses längs der Flugbahn ständig ab, die Bewegung ist *dissipativ*.

Zur Ableitung des Energiesatzes im luftgefüllten Raum multipliziert man die erste der Differentialgleichungen (4.6) mit  $\dot{x}$ , die zweite mit  $\dot{y}$  und addiert die Produkte:

$$\dot{x} \ddot{x} + \dot{y} \ddot{y} = -E \dot{x}^2 - E \dot{y}^2 - g \dot{y}.$$

Nach (4.7) ist

$$\frac{d}{dt} v^2 = \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2 (\dot{x} \ddot{x} + \dot{y} \ddot{y}),$$

so daß man die vorstehende Gleichung wie folgt schreiben kann:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) + g \frac{dy}{dt} = -E v^2 = -b' v,$$

$$\frac{1}{2} d(v^2) + g dy = -b' v dt.$$

Die Integration vom Abgangspunkt  $O$  bis zu einem beliebigen Flugbahnpunkt  $P$  mit den Bahnelementen  $(t; x, y, v, \vartheta)$  ergibt

$$\frac{1}{2} v^2 + \int_0^y g dy = \frac{1}{2} v_0^2 - \int_0^t b' v dt.$$

Nach Einführung der geopotentiellen Höhe  $h^*$  gemäß (3.13) und der Näherung  $h \approx y$ ,

$$dh^* = \frac{g}{g_0} dy,$$

sowie nach Multiplikation mit der Geschossmasse  $m$  erhält man

$$\frac{m}{2} v^2 + m g_0 h^* = \frac{m}{2} v_0^2 - m \int_0^t b' v dt. \quad (4.11)$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt die mechanische Gesamtenergie  $\Psi$  des Geschosses in dem Zustand  $(t, v, h^*)$  dar:

$$\Psi := \frac{m}{2} v^2 + m g_0 h^*.$$

Wegen  $b' v = E v^2 > 0$  nimmt die mechanische Gesamtenergie des Geschosses längs der Flugbahn ständig ab:

$$d\Psi/dt = - m v^2 E < 0. \quad (4.12)$$

Bezeichnet man die kinetische Energie des Geschosses mit  $\Psi_{\text{kin}}$ , so kann man hierfür auch schreiben

$$d\Psi/dt = - 2 E \Psi_{\text{kin}} = - 2 c H_\tau(y) G(v_\tau) \Psi_{\text{kin}}, \quad (4.13)$$

$$d\Psi/dt \sim c.$$

*Die Abnahme der mechanischen Gesamtenergie des Geschosses  $\Psi$  längs der Flugbahn erfolgt um so rascher, je größer der Ballistische Koeffizient  $c$  des Geschosses ist. Für  $c = 0$  bleibt die mechanische Gesamtenergie des Geschosses längs der Flugbahn konstant.*

#### \*4.1.4. Erweiterung des klassischen Bahnmodells für Fernbahnen

Bei der Formulierung des klassischen Bahnmodells (Abschnitt 4.1.1.) bestand eine wesentliche Voraussetzung darin, in den Ausdrücken für die Verzögerung  $b'$  und die Fallbeschleunigung  $g$  die geometrische Höhe  $h$  durch die Ordinate des betreffenden Flugbahnpunkts  $y$  zu ersetzen (siehe Bild 4.1.). Des weiteren wurde die Richtungsänderung der Schwerkraft längs der Flugbahn vernachlässigt.

Diese beiden Voraussetzungen sollen nun fallengelassen werden; die Erde wird jedoch weiterhin als ruhend angenommen.

Die vektorielle Bewegungsgleichung des Geschosses, die den vorgenannten Verallgemeinerungen entspricht, lautet

$$m \mathbf{b} = \mathbf{W} + \mathbf{G} = - W \frac{\mathbf{v}}{v} - G \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (4.14)$$

$$W = m b' = m E(c, h, v) v, \quad G = m g(h),$$

wenn man mit  $\mathbf{r}$  den vom Erdmittelpunkt ausgehenden Ortsvektor eines laufenden Flugbahnpunkts  $P$  bezeichnet (Bild 4.3).

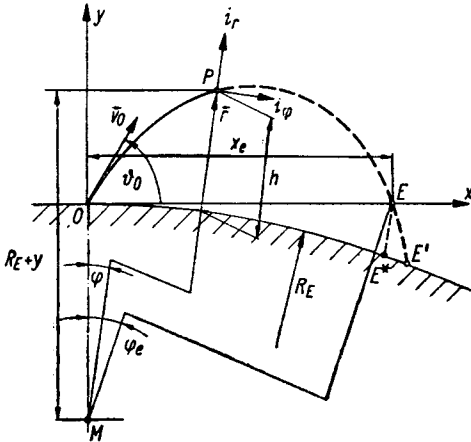
Es ist in der Mechanik üblich, die Vektordifferentialgleichung (4.14) in eine Gleichung in radialer Richtung (Einheitsvektor:  $\mathbf{i}_r$ ) und eine Gleichung in die hierzu senkrechte Richtung (Einheitsvektor:  $\mathbf{i}_\varphi$ ) zu zerlegen.

Wie ohne Beweis<sup>1)</sup> angegeben sei, gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \mathbf{i}_r, \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{i}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{i}_\varphi, \\ \mathbf{b} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{i}_r + (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \mathbf{i}_\varphi. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Einsetzen von (4.15) in (4.14) und nachfolgende innere Multiplikation mit  $\mathbf{i}_\varphi$  bzw.  $\mathbf{i}_r$  liefert die beiden skalaren Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi} &= - E(c, h, v) r \dot{\varphi}, \\ \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 &= - E(c, h, v) \dot{r} - g(h); \\ v &= \sqrt{\dot{r}^2 + (r \dot{\varphi})^2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$



**Bild 4.3**  
Rechtwinklig-kartesisches  
Koordinatensystem  $x, y$  und  
Polarkoordinatensystem  $r, \varphi$

Für die Belange der Ballistik ist das  $r, \varphi$ -System nicht sehr zweckmäßig; es ist günstiger, an Stelle von  $r$  die geometrische Höhe  $h$  über der Erdoberfläche und an Stelle von  $\varphi$  die längs der Erdoberfläche gemessene Entfernung  $x^*$  einzuführen:

$$x^* = R_E \varphi, \quad r = R_E + h. \quad (4.17)$$

<sup>1)</sup> Hinsichtlich des Beweises vergleiche ein Lehrbuch der Mechanik, etwa *Hund, F.: Einführung in die Theoretische Physik. Erster Band: Mechanik. 2., ergänzte Aufl., Leipzig 1948.*



Die Gleichungen (4.16) gehen damit über in

$$\begin{aligned}\ddot{x}^* &= -E(c, h, v) \dot{x}^* - \frac{2 \dot{h} \dot{x}^*}{R_E + h}, \\ \ddot{h} &= -E(c, h, v) \dot{h} - g_0 \left( \frac{R_E}{R_E + h} \right)^2 + \frac{(R_E + h) \dot{x}^{*2}}{R_E^2}, \quad (4.18) \\ v &= \sqrt{\dot{x}^{*2} \left( \frac{R_E + h}{R_E} \right)^2 + \dot{h}^2};\end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}x^*(t_0) &= 0; \quad \dot{x}^*(t_0) = v_0 \cos \vartheta_0; \\ h(t_0) &= 0; \quad \dot{h}(t_0) = v_0 \sin \vartheta_0.\end{aligned} \quad (4.19)$$

Mit zunehmender Horizontalentfernung  $x$  wachsen die Abweichungen  $\Delta x := x^* - x$  und  $\Delta y := h - y$  zwischen den geometrischen Koordinaten  $x, x^*$  bzw.  $y, h$  an. Man entnimmt (4.17) und Bild 4.3:

$$\begin{aligned}\Delta x &= R_E \varphi - x = R_E \arctan \left( \frac{x}{R_E + y} \right) - x, \quad (4.20) \\ \Delta y &= (R_E + h) - (R_E + y) = \sqrt{x^2 + (R_E + y)^2} - (R_E + y).\end{aligned} \quad (4.21)$$

Unter der Voraussetzung  $x \ll y + R_E$  kann man den Arkustangens und die Quadratwurzel durch die ersten Glieder ihrer Reihenentwicklungen ersetzen:

$$\begin{aligned}\Delta x &= R_E \left[ \frac{x}{R_E + y} - \frac{1}{3} \left( \frac{x}{R_E + y} \right)^3 + \dots \right] - x; \\ \Delta y &= (R_E + y) \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{R_E + y} \right)^2 - \dots \right] - (R_E + y).\end{aligned}$$

Mit einer Genauigkeit bis zu den Gliedern 2. Ordnung gilt somit

$$\begin{aligned}\Delta x &= -\frac{y}{R_E + y} x - \frac{1}{3} \left( \frac{R_E}{R_E + y} \right)^3 \frac{x^3}{R_E^2} + \dots, \\ \Delta y &= \frac{1}{2} \cdot \frac{R_E}{R_E + y} \cdot \frac{x^2}{R_E}.\end{aligned}$$

Nimmt man ferner an, daß  $y \ll R_E$  ist, so vereinfachen sich diese Beziehungen weiter zu

$$\Delta x \approx -\frac{y}{R_E} x; \quad \Delta y \approx \frac{1}{2} \frac{x^2}{R_E}.$$

Aus  $x \rightarrow 0$  folgt  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  (Schuß senkrecht nach oben bzw. unten).

Für einen Flugbahnpunkt mit den Koordinaten  $x = 30$  km;  $y = 15$  km z.B. wird

$$\Delta x = -70 \text{ m}, \quad \Delta x/x = -2,3 \text{ ‰};$$

$$\Delta y = +70 \text{ m}, \quad \Delta y/y = +4,7 \text{ ‰}.$$

Die Formeln (4.20), (4.21) geben den *geometrischen Unterschied der Koordinaten*  $x$ ,  $x^*$  bzw.  $y$ ,  $h$  eines beliebigen Punkts an. Sie treffen jedoch keine Aussagen über die *Abweichungen der Lösungen der Anfangswertprobleme* (4.9) und (4.18), (4.19). Will man diese Abweichungen berechnen, so muß man auf Methoden der Störungstheorie zurückgreifen, da den beiden Anfangswertproblemen unterschiedliche Ansätze für das Kräftesystem am Geschöß zugrunde liegen.

## 4.2. Äquivalente Darstellungen der Bewegungsgleichungen

### 4.2.1. Vorbemerkungen

Im folgenden sollen einige äquivalente Formen des Flugbahnanfangswertproblems zusammengestellt werden, auf die bei den späteren Untersuchungen zurückgegriffen werden muß.

Aus Gründen, die erst bei der Behandlung der Störungstheorie ersichtlich werden, empfiehlt es sich, die verschiedenen Varianten der Bewegungsgleichungen nach der darin auftretenden unabhängigen Veränderlichen zu benennen.

Diese Bezeichnungsweise ist, worauf bereits zu Beginn des Abschnitts 2.2. hingewiesen worden war, so lange eindeutig, wie bei der unabhängigen Variablen nur *ein* Satz von abhängigen Variablen vorkommt.

Erweist es sich im Einzelfall als notwendig, die Gesamtheit der Variablen anzugeben, so werden diese in geschweifte Klammern eingeschlossen; die unabhängige Variable steht hierbei an erster Stelle,

sie wird von den übrigen Variablen durch einen senkrechten Strich abgetrennt, z. B.  $\{t|x, y, u, w\}$ .

Wenn bei Koordinatentransformationen die Lösungen des Ausgangs- und des transformierten Anfangswertproblems einander umkehrbar eindeutig zugeordnet sein sollen, so müssen die Transformationsfunktionen, die die neuen Variablen durch die alten ausdrücken, gewissen Bedingungen genügen (siehe Abschnitt 4.2.10.).

#### 4.2.2. Das modifizierte $t$ -System der Bewegungsgleichungen

Das *modifizierte  $t$ -System* unterscheidet sich von dem in Abschnitt 4.1.2. angegebenen  $t$ -System (4.9) durch eine andere Wahl der *abhängigen* Veränderlichen. Während das  $t$ -System die Variablen  $\{t|x, y, u, w\}$  benutzt, verwendet das modifizierte  $t$ -System die Variablen  $\{t|x, y, v, \vartheta\}$ .

Das Anfangswertproblem für die Flugbahn im modifizierten  $t$ -System läßt sich leicht aufstellen.

Aus der Beziehung für die Bahngeschwindigkeit  $v$ ,

$$v^2 = u^2 + w^2,$$

erhält man durch Differentiation

$$v \dot{v} = u \dot{u} + w \dot{w}.$$

Eliminiert man  $\dot{u}$  und  $\dot{w}$  mit Hilfe der Gleichungen des  $t$ -Systems (4.9), so folgt

$$\begin{aligned} v \dot{v} &= u(-E u) + w(-E w - g) \\ &= -E(u^2 + w^2) - g w = -E v^2 - g v \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Division durch  $v$  liefert mit  $b' = E v$ :

$$\dot{v} = -b' - g \sin \vartheta.$$

Zur Berechnung von  $\dot{\vartheta}$  differenziert man die Beziehung  $\tan \vartheta = w/u$  nach  $t$ . Es ergibt sich

$$\frac{\dot{\vartheta}}{\cos^2 \vartheta} = \frac{\dot{w} u - \dot{u} w}{u^2}, \quad v^2 \dot{\vartheta} = \dot{w} u - \dot{u} w.$$

Die Ableitungen  $\dot{u}$  und  $\dot{w}$  können wieder mit Hilfe der Gleichungen des  $t$ -Systems (4.9) eliminiert werden:

$$v^2 \dot{\vartheta} = (-E w - g) u + E u w = -g u,$$

$$\dot{\vartheta} = -\frac{g}{v} \cos \vartheta.$$

Das *modifizierte  $t$ -System* lautet damit vollständig:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \vartheta, & x(0) &= 0; \\ \dot{y} &= v \sin \vartheta, & y(0) &= 0; \\ \dot{v} &= -b' - g \sin \vartheta, & v(0) &= v_0; \\ \dot{\vartheta} &= -\frac{g}{v} \cos \vartheta, & \vartheta(0) &= \vartheta_0; \\ E &= c H_\tau(y) G(v_\tau); & v_\tau &= v \sqrt{\tau_{0N}/\tau(y)}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

In diesem Anfangswertproblem sind die Differentialgleichungen für  $y$ ,  $v$  und  $\vartheta$  gekoppelt;  $x = x(t)$  ergibt sich bei bekanntem  $v(t)$  und  $\vartheta(t)$  durch eine Quadratur:

$$x(t) = \int_0^t v(t') \cos \vartheta(t') dt'. \quad (4.23)$$

Das modifizierte  $t$ -System hat den Vorteil, daß die Bahnelemente unmittelbar in *der* Form erhalten werden, in der sie in der Schußtafel Aufnahme finden; es ist jedoch rechnerisch etwas unbequemer zu handhaben als das  $t$ -System (4.9).

Hinsichtlich der Wahl der Anfangsbedingungen unterliegt das modifizierte  $t$ -System keinerlei Einschränkungen.

### 4.2.3. Die natürlichen Bewegungsgleichungen

Das System der natürlichen Bewegungsgleichungen benutzt als unabhängige Variable die Bogenlänge  $s$  der Flugbahn; die abhängigen Variablen sind die gleichen wie beim modifizierten  $t$ -System.

Um das Anfangswertproblem für die Flugbahn in System der natürlichen Bewegungsgleichungen  $\{s|t, x, y, \dot{v}, \vartheta\}$  zu erhalten, hat man die

Differentialgleichungen (4.22) mit  $v^{-1}$  zu multiplizieren und  $v = ds/dt$  zu beachten:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{1}{v}, & t(0) &= 0; \\ \frac{dx}{ds} &= \cos \vartheta, & x(0) &= 0; \\ \frac{dy}{ds} &= \sin \vartheta, & y(0) &= 0; \\ \frac{dv}{ds} &= -E - \frac{g}{v} \sin \vartheta, & v(0) &= v_0; \\ \frac{d\vartheta}{ds} &= -\frac{g}{v^2} \cos \vartheta, & \vartheta(0) &= \vartheta_0; \\ E &= c H_z(y) G(v_z); & v_z &= v \sqrt{\tau_{0N}/\tau(y)}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Gekoppelt sind die Gleichungen für  $y$ ,  $v$  und  $\vartheta$ .

Hinsichtlich des Anwendungsbereichs der natürlichen Bewegungsgleichungen gilt das beim modifizierten  $t$ -System Gesagte.

#### 4.2.4. Das $x$ -System der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen erhalten eine sehr übersichtliche Gestalt, wenn man als unabhängige Variable die Horizontalentfernung  $x$  und als abhängige Variable  $t$ ,  $y$ ,  $u$  sowie  $p$  einführt:  $\{x|t, y, u, p\}$ .

Mit Hilfe der Gleichungen (4.9) und (4.22) bestätigt man leicht die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -E u \cdot \frac{1}{u} = -E, \\ \frac{dp}{dx} &= \frac{dp}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \cdot \left( -\frac{g \cos \vartheta}{v} \right) \cdot \frac{1}{u} = -\frac{g}{u^2}. \end{aligned}$$

Das  $x$ -System der Bewegungsgleichungen lautet damit:

$$\begin{aligned}
 \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{u}, & t(0) &= 0; \\
 \frac{dy}{dx} &= p, & y(0) &= 0; \\
 \frac{du}{dx} &= -E, & u(0) &= u_0; \\
 \frac{dp}{dx} &= -\frac{g}{u^2}, & p(0) &= p_0; \\
 E &= c H_\tau(y) G(v_\tau); & v_\tau &= u \sqrt{1 + p^2} \cdot \sqrt{\tau_{0N}/\tau(y)}.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Gekoppelt sind wiederum die letzten drei Gleichungen.

Das  $x$ -System ist bei Abgangswinkeln  $\vartheta_0 \leq 60^\circ$  sehr gut zur Behandlung aller einschlägigen Bahnprobleme geeignet. Beim senkrechten bzw. nahezu senkrechten Schuß ist das  $x$ -System nicht anwendbar, da für  $\vartheta \rightarrow \pi/2$  die im Nenner der ersten und vierten Differentialgleichung auftretende Horizontalgeschwindigkeit  $u \rightarrow 0$  geht.

#### 4.2.5. Das $p$ -System der Bewegungsgleichungen

Das  $p$ -System  $\{p|x, t, y, u\}$  hat sich unter den Ballistikern früher außerordentlicher Beliebtheit erfreut, da hier nur zwei (der insgesamt vier) Differentialgleichungen gekoppelt sind. Dieser Vorteil ist im Zeitalter der automatischen Digitalrechner nahezu bedeutungslos geworden.

Unter Verwendung der Gleichungen des  $t$ - und  $x$ -Systems findet man für die Ableitungen der Variablen  $x, t, y$  und  $u$  nach  $p$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dp} &= -\frac{u^2}{g}, \\
 \frac{dt}{dp} &= \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} = \frac{1}{u} \cdot \left(-\frac{u^2}{g}\right) = -\frac{u}{g}, \\
 \frac{dy}{dp} &= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} = p \cdot \left(-\frac{u^2}{g}\right) = -\frac{u^2 p}{g}, \\
 \frac{du}{dp} &= \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dp} = -E u \cdot \left(-\frac{u}{g}\right) = \frac{E u^2}{g}.
 \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen des  $p$ -Systems lauten damit:

$$\begin{aligned}
 \frac{dt}{dp} &= -\frac{u}{g}, & t(p_0) &= 0; \\
 \frac{dx}{dp} &= -\frac{u^2}{g}, & x(p_0) &= 0; \\
 \frac{dy}{dp} &= -\frac{u^2 p}{g}, & y(p_0) &= 0; \\
 \frac{du}{dp} &= \frac{E u^2}{g}, & u(p_0) &= u_0; \\
 E &= c H_t(y) G(v_\tau); & v_\tau &= u \sqrt{1 + p^2} \sqrt{\tau_{0N}/\tau(y)}.
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

In dem  $p$ -System sind nur die letzten beiden Gleichungen gekoppelt. Nachdem  $y = y(p)$  und  $u = u(p)$  bekannt sind, erhält man  $t = t(p)$  und  $x = x(p)$  durch einfache Quadraturen:

$$t(p) = - \int_{v_0}^p \frac{u(p')}{g[y(p')]} dp', \quad x(p) = - \int_{v_0}^p \frac{u^2(p')}{g[y(p')]} dp'. \tag{4.27}$$

Da für  $\vartheta \rightarrow \pi/2$  die Neigung  $p \rightarrow \infty$  geht, wird man das  $p$ -System in der Regel nur für Abgangswinkel  $\vartheta_0 < 85^\circ$  anwenden.

#### 4.2.6. Das $\vartheta$ -System der Bewegungsgleichungen

Das  $\vartheta$ -System der Bewegungsgleichungen  $\{\vartheta|t, x, y, u\}$  ergibt sich sofort aus (4.26), wenn man

$$\frac{dp}{d\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta} \tan \vartheta = \frac{1}{\cos^2 \vartheta}, \quad v = \frac{u}{\cos \vartheta}$$

beachtet:

$$\begin{aligned}
 \frac{dt}{d\vartheta} &= -\frac{v}{g \cos \vartheta}, & t(\vartheta_0) &= 0; \\
 \frac{dx}{d\vartheta} &= -\frac{v^2}{g}, & x(\vartheta_0) &= 0; \\
 \frac{dy}{d\vartheta} &= -\frac{v^2}{g} \tan \vartheta, & y(\vartheta_0) &= 0; \\
 \frac{du}{d\vartheta} &= \frac{b'v}{g}, & u(\vartheta_0) &= v_0 \cos \vartheta_0; \\
 E &= c H_t(y) G(v_\tau); & v_\tau &= \frac{u}{\cos \vartheta} \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau(y)}}.
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

Hinsichtlich der Kopplung der Differentialgleichungen und des Anwendungsbereichs des  $\vartheta$ -Systems gilt das in Abschnitt 4.2.5. Gesagte sinngemäß.

#### 4.2.7. Das $y$ -System der Bewegungsgleichungen

Zur Lösung einiger Aufgaben der ballistischen Störungstheorie benötigt man die Bewegungsgleichungen im  $y$ -System  $\{y|t, x, v, \vartheta\}$ . Unter Benutzung der Gleichungen des modifizierten  $t$ -Systems (4.22) findet man unschwer

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dy} &= \frac{1}{w}, & \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{p}, \\ \frac{dv}{dy} &= \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = - \frac{b' + g \sin \vartheta}{w}, \\ \frac{d\vartheta}{dy} &= \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = - \frac{g \cos \vartheta}{v w}.\end{aligned}$$

Das  $y$ -System der Bewegungsgleichungen erhält damit die Gestalt:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \cot \vartheta, & x(0) &= 0; \\ \frac{dt}{dy} &= \frac{1}{v \sin \vartheta}, & t(0) &= 0; \\ \frac{dv}{dy} &= - \frac{E}{\sin \vartheta} - \frac{g}{v}, & v(0) &= v_0; \\ \frac{d\vartheta}{dy} &= - \frac{g}{v^2} \cot \vartheta, & \vartheta(0) &= \vartheta_0; \\ E &= c H_{\tau}(y) G(v_{\tau}); & v_{\tau} &= v \sqrt{\tau_{0N}/\tau(y)}.\end{aligned}\tag{4.29}$$

In dem vorstehenden Anfangswertproblem sind nur die Differentialgleichungen für  $v$  und  $\vartheta$  gekoppelt.

Das  $y$ -System ist geeignet für die Berechnung von Bahnstücken, bei denen  $\vartheta$  wesentlich von Null verschieden ist. Das ist der Fall bei Bahnen von Fla-Geschossen sowie beim Bombenwurf aus dem Sturzflug.



Bei der Anwendung des  $y$ -Systems auf Bahnen der Klasse Boden – Boden ist zu beachten, daß zu jedem  $y$ -Wert zwischen  $y = y_0$  und  $y = y_z$  jeweils zwei Flugbahnpunkte gehören, von denen der eine auf dem ansteigenden, der andere auf dem absteigenden Flugbahnast liegt.

#### 4.2.8. Das $U$ -System der Bewegungsgleichungen

Zur Berechnung von rasanten Flugbahnen der Klasse Boden – Boden verwendet man als unabhängige Variable zweckmäßigerweise die Horizontalkomponente  $u$  der Bahngeschwindigkeit  $v$  oder ein Vielfaches  $U$  von  $u$ :

$$U = \kappa u \quad (\kappa = \text{const}).$$

Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen im  $U$ -System  $\{U|t, x, y, p\}$  bereitet wenig Mühe, wenn man hierzu auf die Gleichungen des  $t$ - und  $x$ -Systems (4.9), (4.25) zurückgreift. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dU} &= \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dU} = -\frac{1}{E u} \cdot \frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{E U}, \\ \frac{dx}{dU} &= \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dU} = -\frac{u}{E U} = -\frac{1}{\kappa E}, \\ \frac{dy}{dU} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dU} = w \cdot \left(-\frac{1}{E U}\right) = -\frac{p}{\kappa E}, \\ \frac{dp}{dU} &= \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dU} = -\frac{g}{u^2} \cdot \left(-\frac{1}{\kappa E}\right) = \frac{\kappa g}{E U^2}. \end{aligned}$$

Das  $U$ -System der ballistischen Bewegungsgleichungen lautet damit:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dU} &= -\frac{1}{E U}, & t(U_0) &= 0; \\ \frac{dx}{dU} &= -\frac{1}{\kappa E}, & x(U_0) &= 0; \\ \frac{dy}{dU} &= -\frac{p}{\kappa E}, & y(U_0) &= 0; \\ \frac{dp}{dU} &= \frac{\kappa g}{E U^2}, & p(U_0) &= p_0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$E = c H_t(y) G(v_t); \quad v_t = \frac{U}{\kappa} \sqrt{1 + p^2} \cdot \sqrt{\tau_{0N}/\tau(y)}.$$

Gekoppelt sind die Gleichungen für  $p$  und  $y$ ;  $x = x(U)$  und  $t = t(U)$  ergeben sich durch Quadraturen.

Geschosse von Handfeuerwaffen haben einen relativ großen Ballistischen Koeffizienten  $c$ ; ihre Bewegung verläuft deshalb stark verzögert. Da Geschosse dieses Typs zudem meist nahezu horizontal abgefeuert werden, nehmen die rechten Seiten des Differentialgleichungssystems (4.30) in diesem Fall sehr kleine Werte an.

#### \*4.2.9. Darstellung des Flugbahnverlaufs in einem schiefwinkligen Koordinatensystem

Bei den in den vorangegangenen Abschnitten behandelten Formen der ballistischen Bewegungsgleichungen wird das geometrische Bild der Flugbahn durch rechtwinklig-kartesische Koordinaten  $x, y$  beschrieben; beim  $t$ -System etwa in der Parameterdarstellung  $x = x(t), y = y(t)$  (siehe Bild 4.2, Seite 173).

Für die mathematische Behandlung einer Reihe ballistischer Probleme, wie die Verallgemeinerung des Verfahrens von *Siacci*, Parameterentwicklungen der Flugbahnelemente und die Ballistik des Bombenwurfs, ist es zweckmäßig, den geometrischen Flugbahnverlauf nicht in einem rechtwinklig-kartesischen Koordinatensystem  $(x, y)$ , sondern in einem geeignet gewählten schiefwinkligen Koordinatensystem  $(\xi, \eta)$  darzustellen.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf ein  $\xi, \eta$ -System, dessen  $\xi$ -Achse in Richtung des Vektors der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  weist und dessen  $\eta$ -Achse die Richtung der Fallbeschleunigung  $g$  hat (Bild 4.4).

Zwischen den Koordinaten  $(\xi_1, \eta_1)$  und  $(x_1, y_1)$  ein und desselben (sonst aber beliebigen) Flugbahnpunkts  $P_1$  bestehen die Beziehungen

$$x_1 = \xi_1 \cos \vartheta_0, \quad y_1 = \xi_1 \sin \vartheta_0 - \eta_1.$$

Läßt man den Index „1“ weg, so erhält man die allgemeinen Transformationsformeln

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \vartheta_0, & y &= \xi \sin \vartheta_0 - \eta, \\ \xi &= x \sec \vartheta_0, & \eta &= x \tan \vartheta_0 - y. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Die Komponenten  $u_\xi, w_\eta$  der Bahngeschwindigkeit  $v$  in  $\xi$ - und  $\eta$ -Richtung ergeben sich durch Differentiation der vorstehenden Beziehungen

$$\begin{aligned} u_\xi &:= \dot{\xi} = \dot{x} \sec \vartheta_0 = u \sec \vartheta_0, \\ w_\eta &:= \dot{\eta} = \dot{x} \tan \vartheta_0 - \dot{y} = u \tan \vartheta_0 - w. \end{aligned} \tag{4.32}$$

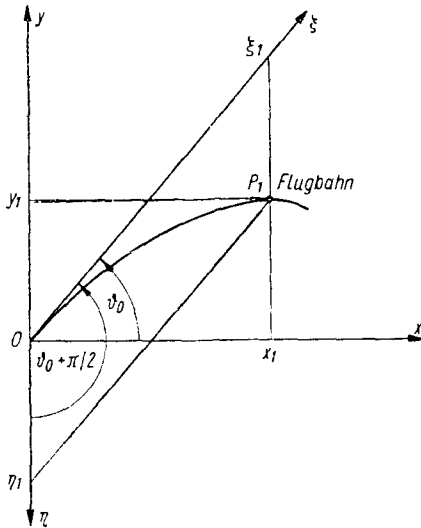
Nochmalige Differentiation liefert

$$\begin{aligned} \dot{u}_\xi &= \ddot{x} \sec \vartheta_0 = \dot{u} \sec \vartheta_0, \\ \dot{w}_\eta &= \ddot{x} \tan \vartheta_0 - \ddot{y} = \dot{u} \tan \vartheta_0 - \dot{w} \end{aligned}$$

bzw. nach Elimination von  $\dot{u}$  und  $\dot{w}$  mit Hilfe der Gleichungen des  $t$ -Systems (4.9):

$$\begin{aligned} \dot{u}_\xi &= -E u \sec \vartheta_0 = -E u_\xi, \\ \dot{w}_\eta &= -E u \tan \vartheta_0 + E w + g = -E (u \tan \vartheta_0 - w) + g \\ &= -E w_\eta + g. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Der Betrag der Bahngeschwindigkeit  $v$  kann durch  $u_\xi$  und  $w_\eta$  sowie  $\sin \vartheta_0$  ausgedrückt werden.



*Bild 4.4*  
Zur Definition des schiefwinkligen  $\xi, \eta$ -Koordinatensystems

Bezeichnet man die Einheitsvektoren in  $\xi$ - und  $\eta$ -Richtung mit  $i_\xi$  bzw.  $i_\eta$ , dann gilt nach den Regeln der Vektoraddition

$$v = u_\xi i_\xi + w_\eta i_\eta.$$

Um  $v = |v|$  zu ermitteln, hat man das Skalarprodukt  $v \cdot v$  zu bilden:

$$v \cdot v = v^2 = u_\xi^2 + w_\eta^2 + 2 u_\xi w_\eta i_\xi \cdot i_\eta.$$

Das Skalarprodukt der Einheitsvektoren  $i_\xi$  und  $i_\eta$  ist gleich dem Kosinus des von diesen Vektoren eingeschlossenen Winkels:

$$i_\xi \cdot i_\eta = \cos(\pi/2 + \vartheta_0) = -\sin \vartheta_0.$$

Man erhält somit für den Betrag  $v$  der Bahngeschwindigkeit  $v$ :

$$v = \sqrt{u_\xi^2 + w_\eta^2 - 2 u_\xi w_\eta \sin \vartheta_0}. \quad (4.34)$$

Die Bewegungsgleichungen im schiefwinkligen  $\{t|\xi, \eta, u_\xi, w_\eta\}$ -System lauten:

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= u_\xi, & \xi(t_0) &= 0; \\
 \dot{\eta} &= w_\eta, & \eta(t_0) &= 0; \\
 \dot{u}_\xi &= -E u_\xi, & u_\xi(t_0) &= v_0; \\
 \dot{w}_\eta &= -E w_\eta + g, & w_\eta(t_0) &= 0; \\
 E &= c H_\tau(y) G(v_\tau), & y &= \xi \sin \vartheta_0 - \eta; \\
 v_\tau &= \sqrt{u_\xi^2 + w_\eta^2 - 2 u_\xi w_\eta \sin \vartheta_0} \cdot \sqrt{\tau_{0N}/\tau(y)}.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Es ist ohne Schwierigkeiten möglich, aus dem vorstehenden Differentialgleichungssystem weitere Varianten der Bewegungsgleichungen herzuleiten. Zwei derartige Systeme, die im folgenden benötigt werden, sind nachstehend ohne Ableitung wiedergegeben.

a) Das  $\{x|t, \eta, q, u_\xi\}$ -System

Mit der verallgemeinerten Neigung  $q$ ,

$$\begin{aligned}
 q &:= \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\dot{\eta}}{\dot{\xi}} = \frac{\dot{x} \tan \vartheta_0 - \dot{y}}{\dot{x} \sec \vartheta_0} = \sin \vartheta_0 - \tan \vartheta \cos \vartheta_0, \\
 q &= (\tan \vartheta_0 - \tan \vartheta) \cos \vartheta_0
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

erhält man:

$$\begin{aligned}
 \frac{dt}{d\xi} &= \frac{1}{u_\xi}, & t(\xi_0) &= 0; \\
 \frac{d\eta}{d\xi} &= q, & \eta(\xi_0) &= 0; \\
 \frac{dq}{d\xi} &= \frac{g}{u_\xi^2}, & q(\xi_0) &= 0; \\
 \frac{du_\xi}{d\xi} &= -E, & u(\xi_0) &= v_0; \\
 E &= c H_\tau(y) G(v_\tau); & y &= \xi \sin \vartheta_0 - \eta. \\
 v_\tau &= u_\xi \sqrt{1 + q^2 - 2 q \sin \vartheta_0} \cdot \sqrt{\tau_{0N}/\tau(y)}.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

b) Das  $\{t|\xi, \eta, q, U\}$ -System

Unter Verwendung der Substitution  $u_\xi =: U/v$  ( $v = \text{const}$ ) erhält man:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\xi}{dt} &= -E U, & \xi(t_0) &= 0; \\
 \frac{d\eta}{dt} &= \frac{q U}{v}, & \eta(t_0) &= 0; \\
 \frac{dq}{dt} &= \frac{v g}{U}, & q(t_0) &= 0; \\
 \frac{dU}{dt} &= -E U, & U(t_0) &= v v_0.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

**\*4.2.10. Zulässigkeit von Variablentransformationen  
in den Bewegungsgleichungen**

Wenn man das  $t$ -System der Bewegungsgleichungen (4.9) mit Hilfe einer Variablentransformation in ein anderes System überführt, so wird man im allgemeinen verlangen, daß zwischen den Lösungen der entsprechenden Anfangswertprobleme eine umkehrbar-eindeutige (oder, wie man auch sagt: eineindeutige) Zuordnung besteht. Um diese Forderung zu erfüllen, müssen den Transformationsfunktionen, die die neuen Variablen durch die alten ausdrücken, gewisse Einschränkungen auferlegt werden.

Gegeben sei das Anfangswertproblem für  $n$  Differentialgleichungen 1. Ordnung<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{ds} &= f^1(s; x^1, \dots, x^n), & x^1(s_0) &= x_0^1; \\ \frac{dx^2}{ds} &= f^2(s; x^1, \dots, x^n), & x^2(s_0) &= x_0^2; \\ &\vdots & &\vdots \\ \frac{dx^n}{ds} &= f^n(s; x^1, \dots, x^n), & x^n(s_0) &= x_0^n \end{aligned} \tag{4.39}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} x^i &= p^i(s|s_0; x_0^1, \dots, x_0^n) \\ x_0^i &= p^i(s_0|s_0; x_0^1, \dots, x_0^n). \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, n), \tag{4.40}$$

Mit Hilfe der Transformationsformeln

$$\begin{aligned} z &= \varphi^0(s; x^1, \dots, x^n), \\ y^i &= \varphi^i(s; x^1, \dots, x^n) \end{aligned} \quad (i = 1(1) n)^2 \tag{4.41}$$

<sup>1)</sup> Die bei den folgenden Betrachtungen verwendeten Formelsymbole bedeuten allgemeine (beliebige) Variable. Hochgestellte Indizes dienen zur Numerierung der Variablen, tiefgestellte Indizes zur Kennzeichnung der Bahnpunkte.

<sup>2)</sup> Für  $i = 1, \dots, n$  schreibt man kürzer  $i = 1(1)n$ .

werde das Anfangswertproblem (4.39) übergeführt in das Anfangswertproblem

$$\frac{dy^i}{dz} = g^i(z; y^1, \dots, y^n), \quad y^i(z_0) = y_0^i \quad (i = 1(1)n), \quad (4.42)$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} y^i &= q^i(z|z_0; y_0^1, \dots, y_0^n), \\ y_0^i &\equiv q^i(z_0|z_0; y_0^1, \dots, y_0^n). \end{aligned} \quad (i = 1(1)n) \quad (4.43)$$

Die durch (4.41) vermittelte Abbildung (Transformation) zwischen den Variablensystemen  $\{s|x^1, \dots, x^n\}$  und  $\{z|y^1, \dots, y^n\}$  heißt *zulässig*, wenn sie folgenden *Bedingungen* genügt [24]:

1. Zu (4.41) existieren eindeutige Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} s &= \psi^0(z; y^1, \dots, y^n), \\ x^i &= \psi^i(z; y^1, \dots, y^n) \end{aligned} \quad (i = 1(1)n). \quad (4.44)$$

2. Die *Jacobische Determinante*<sup>1)</sup> der Abbildung (4.41) ist für alle Flugbahnpunkte beschränkt:

$$0 < C_1 \leq \left| \frac{D(\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^n)}{D(s, x^1, \dots, x^n)} \right| \leq C_2 < +\infty. \quad (4.45)$$

3. Die Funktionen  $\varphi^i$  ( $i = 1(1)n$ ) sind nach allen Variablen zweimal stetig differenzierbar.

4. Längs der Flugbahn ist die neue unabhängige Variable  $z$  eine monotone Funktion von  $s$ :

$$0 < C_3 \leq \left| \frac{d}{ds} \varphi^0[s; p^1(s), \dots, p^n(s)] \right| \leq C_4 < +\infty.$$

Sind die vorgenannten Bedingungen erfüllt, so transformieren sich die Lösungen (4.40) und (4.43) der Anfangswertprobleme (4.39) und (4.42) wie Koordinaten, das heißt gemäß (4.41) und (4.44).

<sup>1)</sup> Zum Begriff der *Jacobi-*(Funktional-) *Determinante* siehe etwa *Fichtenholz, G.M.: Differential- und Integralrechnung. Bd.1, 2., berichtigte Aufl., Berlin 1966, S.414ff.*

Am Beispiel der Transformation des  $t$ -Systems (4.9) in das  $x$ -System (4.25) soll nachgeprüft werden, inwieweit die Bedingungen 1 bis 4 erfüllt sind. Die Transformationsbeziehungen (4.40) lauten im vorliegenden Fall

$$\begin{aligned}
 x &= \varphi^0(t; x, y, u, w) \equiv x, \\
 t &= \varphi^1(t; x, y, u, w) \equiv t, \\
 y &= \varphi^2(t; x, y, u, w) \equiv y, \\
 u &= \varphi^3(t; x, y, u, w) \equiv u, \\
 p &= \varphi^4(t; x, y, u, w) \equiv w/u.
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Die hierzu inverse Abbildung (4.44) existiert und ist eindeutig für  $u \neq 0$ . Die *Jacobische* Determinante  $J$  der Abbildung lautet ausführlich:

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{D(\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4)}{D(t, x, y, u, w)} = \begin{vmatrix} \partial\varphi^0/\partial t & \partial\varphi^0/\partial x & \partial\varphi^0/\partial y & \partial\varphi^0/\partial u & \partial\varphi^0/\partial w \\ \partial\varphi^1/\partial t & \partial\varphi^1/\partial x & \partial\varphi^1/\partial y & \partial\varphi^1/\partial u & \partial\varphi^1/\partial w \\ \partial\varphi^2/\partial t & \partial\varphi^2/\partial x & \partial\varphi^2/\partial y & \partial\varphi^2/\partial u & \partial\varphi^2/\partial w \\ \partial\varphi^3/\partial t & \partial\varphi^3/\partial x & \partial\varphi^3/\partial y & \partial\varphi^3/\partial u & \partial\varphi^3/\partial w \\ \partial\varphi^4/\partial t & \partial\varphi^4/\partial x & \partial\varphi^4/\partial y & \partial\varphi^4/\partial u & \partial\varphi^4/\partial w \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w/u^2 & 1/u \end{vmatrix} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{v \cos \vartheta}.
 \end{aligned}$$

Solange weder die Bahngeschwindigkeit  $v = 0$  noch  $\vartheta = \pm\pi/2$  wird, ist  $|J| \neq 0$ . Die Bedingungen 2 und 3 sind ebenfalls erfüllt, wie man leicht beweisen kann. Das  $t$ - und das  $x$ -System sind also – unter den in der ballistischen Praxis vorliegenden Bedingungen – mathematisch gleichwertig.

### 4.3. Allgemeine Eigenschaften von Flugbahnen im luftgefüllten Raum

Obwohl das Anfangswertproblem für das klassische Bahnmodell nicht geschlossen lösbar ist, lassen sich aus den Bewegungsdifferentialgleichungen des Geschosses eine Reihe bemerkenswerter Aussagen über die allgemeinen Eigenschaften der Flugbahnelemente gewinnen. Diese Aussagen haben mathematisch meist die Form von Ungleichungen. Im Interesse der Übersichtlichkeit empfiehlt es sich, die allgemeinen Flugbahneigenschaften fortlaufend zu numerieren. Die Reihenfolge, in der die Eigenschaften besprochen werden, bedeutet hierbei nicht die Festlegung einer Rangordnung ihrer praktischen Bedeutung.

### 4.3.1. Eigenschaften der Bahngeschwindigkeit

Im folgenden werden fünf allgemeine Eigenschaften des Betrags  $v$  der Bahngeschwindigkeit  $\boldsymbol{v}$  bewiesen.

**Flugbahneigenschaft 1:** Auf dem ansteigenden Flugbahnast nimmt der Betrag  $v$  der Bahngeschwindigkeit  $\boldsymbol{v}$  monoton ab.

Der Beweis dieser Eigenschaft folgt unmittelbar aus dem Energiesatz (4.11). Auf dem aufsteigenden Flugbahnast werden zwei Bahnpunkte  $M_1, M_2$  herausgegriffen; die diesen Punkten entsprechenden Bahnelemente seien  $(t_1, x_1, y_1, v_1)$  bzw.  $(t_2 > t_1, x_2 > x_1, y_2 > y_1, v_2)$ ; siehe Bild 4.5.

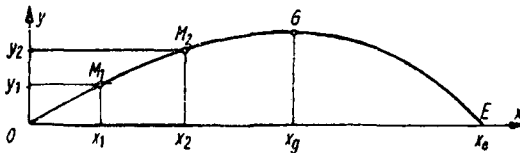


Bild 4.5  
Zum Beweis der Flugbahneigenschaft I

Schreibt man (4.11) für die Punkte  $M_1$  und  $M_2$  an und subtrahiert die erste Gleichung von der zweiten, so ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung

$$v_2^2 - v_1^2 = -g_0 (h_2^* - h_1^*) - \int_{t_1}^{t_2} E v^2 dt. \quad (4.47)$$

Bei der in Bild 4.5 angenommenen relativen Lage der Punkte  $M_1$  und  $M_2$  ist  $y_2 \geq y_1$  und  $h_2^* \geq h_1^*$ . Längs der Flugbahn ist stets  $E v^2 \geq 0$ . Da ferner (nach Voraussetzung)  $t_2 > t_1$  gilt, besteht die Ungleichung

$$\int_{t_1}^{t_2} E v^2 dt \geq 0, \quad (4.48)$$

wie man sich am einfachsten an Hand einer Skizze veranschaulicht.

Zusammenfassung von (4.47) und (4.48) liefert

$$v_2^2 - v_1^2 \leq 0; \quad v_2 \leq v_1,$$

was zu zeigen war.

**Flugbahneigenschaft 2:** Die Bahngeschwindigkeit  $v = v_1$  in dem Punkt des aufsteigenden Flugbahnastes  $M_1 = (x_1, y_1)$  ist größer als die Bahngeschwindigkeit  $v = v_2$  in dem gleich hohen Punkt des absteigenden Astes  $M_2 = (x_2 > x_1, y_2 = y_1)$ ; siehe Bild 4.6.

Der Beweis der Flugbahneigenschaft 2 wird wiederum mit dem Energiesatz geführt. Da zwischen der geometrischen Höhe  $h$  und der geopotentiellen Höhe  $h^*$  eine ein-



deutige Beziehung besteht, (3.17), folgt aus  $y_1 = y_2 = y$  (im Gültigkeitsbereich des klassischen Bahnmodells)  $h_1^* = h_2^*$ . Gleichung (4.47) vereinfacht sich damit zu

$$v_2^2 - v_1^2 = - \int_{t_1}^{t_2} E v^2 dt.$$

Unter Beachtung von (4.48) liest man hieraus ab:  $v_2 \leq v_1$ , was zu zeigen war.

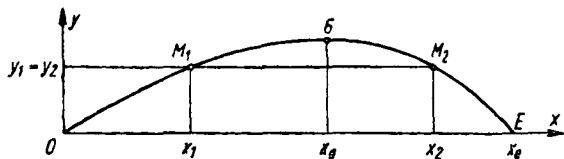


Bild 4.6  
Zum Beweis der Flugbahnneigenschaft 2

**Anmerkung:** Aus der Flugbahnneigenschaft 2 folgt für die Mündungsebene ( $M_1 = 0$ ;  $M_2 = E$ ):  $v_e \leq v_0$ .

Die Auftreffgeschwindigkeit ist im luftgefüllten Raum *kleiner*, im Vakuum *gleich* der Mündungsgeschwindigkeit.

**Flugbahnneigenschaft 3:** Die Horizontalkomponente  $u$  der Bahngeschwindigkeit  $v$  nimmt längs der Flugbahn monoton ab und erreicht für  $t \rightarrow \infty$  den Wert Null.

Zum Beweis der Flugbahnneigenschaft 3 benutzt man die dritte Gleichung des  $t$ -Systems (4.9). Man kann diese Gleichung in der Form schreiben

$$\frac{du}{u} = -E dt, \quad \ln u - \ln u_0 = - \int_0^t E dt.$$

Wegen  $E \geq 0$  und  $t \geq 0$  ist

$$\frac{u}{u_0} = e^{-\mu} \leq 1, \quad \mu := \int_0^t E dt \geq 0. \quad (4.49)$$

Die Funktion  $\mu(t)$  nimmt für  $E > 0$  längs der Flugbahn ständig zu, so daß  $e^{-\mu}$  monoton abnimmt. Für  $t \rightarrow \infty$  geht  $\mu \rightarrow \infty$  und  $e^{-\mu} \rightarrow 0$ . Wenn  $u_0 > 0$  vorausgesetzt wird, so strebt auch  $u \rightarrow 0$ .

Der Beweis der Flugbahnneigenschaft 3 ist damit erbracht.

Die Horizontalgeschwindigkeit  $u = v \cos \vartheta$  wird Null, wenn entweder die Bahngeschwindigkeit  $v = 0$  ist oder sich das Geschöß in vertikaler Richtung ( $\vartheta = \pm \pi/2$ ) bewegt.

Wie man sich leicht überlegt, ist (für  $\vartheta = -\pi/2$ )  $v > 0$ , solange das Geschöß nicht im Ziel (auf dem Boden) auftrifft. Die aus dem klassischen Bahnmodell folgenden Flugbahnkurven besitzen somit für  $t \rightarrow +\infty$  eine vertikale Asymptote.

Beim Beweis der Flugbahneigenschaft 8 wird gezeigt werden, daß die Flugbahnasymptote die  $x$ -Achse in *endlicher* Entfernung  $x = x_{gr} < +\infty$  vom Abgangspunkt die positive  $x$ -Achse schneidet (siehe Bild 4.7).

**Flugbahneigenschaft 4:** Die Vertikalkomponente  $w = w_1$  der Bahngeschwindigkeit  $v_1$  in dem Punkt des aufsteigenden Flugbahnastes  $M_1$  ist betragsmäßig größer als die Vertikalgeschwindigkeit  $w = w_2$  in dem gleichhohen Punkt des absteigenden Astes  $M_2$ .

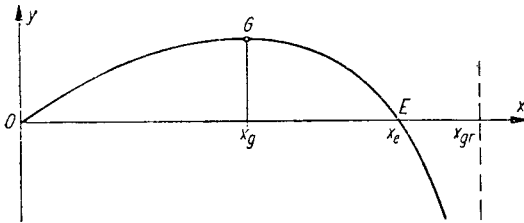


Bild 4.7  
Die vertikale Asymptote einer Flugbahn im luftgefüllten Raum

Der Beweis der Flugbahneigenschaft 4 wird mit Hilfe der vierten Gleichung des  $t$ -Systems (4.9) geführt. Multiplikation dieser Gleichung mit  $w$  liefert

$$w \dot{w} = -E w^2 - g w.$$

Hierfür kann man auch schreiben

$$\frac{1}{2} d(w^2) = -E w^2 dt - g dy$$

bzw. nach Einführung der geopotentiellen Höhe  $h^*$ :

$$\frac{1}{2} d(w^2) = -E w^2 dt - g_0 dh^*.$$

Integriert man die vorstehende Beziehung vom Punkt  $M_1$  bis zum Punkt  $M_2$  (Bild 4.6, Seite 195), so ergibt sich

$$w_2^2 - w_1^2 = -2 \int_{t_1}^{t_2} E w^2 dt. \quad (4.50)$$

Wegen  $E w^2 \geq 0$  und  $t_2 > t_1$  ist auch

$$\int_{t_1}^{t_2} E w^2 dt \geq 0.$$

Aus Gleichung (4.50) folgt somit  $w_1^2 \geq w_2^2$ ,  $w_1 \geq |w_2|$ , was zu zeigen war.

**Flugbahneigenschaft 5:** Extremwerte der Bahngeschwindigkeit  $v$  können nur auf dem absteigenden Flugbahnast auftreten.

*Beweis der Flugbahneigenschaft 5:*

Eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extremums von  $v$  ist  $dv/dt = 0$ . Auf Grund der dritten Gleichung des modifizierten  $t$ -Systems (4.22) muß

in einem Minimum (bzw. Maximum) der Bahngeschwindigkeit somit die Beziehung bestehen

$$\dot{v} = -b' - g \sin \vartheta = 0, \quad \sin \vartheta = -b'/g \leq 0. \quad (4.51)$$

Wenn man annimmt, daß die Flugbahn im I. Quadranten des  $x, y$ -Systems verläuft, folgt hieraus  $\vartheta \leq 0$ . Punkte mit negativem Neigungswinkel der Bahntangente liegen aber auf dem absteigenden Flugbahnast.

Die Flugbahneigenschaft 5 ist damit bewiesen.

Da  $\dot{v}$  die Tangentialbeschleunigung des Geschosses auf seiner Flugbahn ist, sagt Gleichung (4.51) aus:

*Extremwerte der Bahngeschwindigkeit  $v$  können in den Bahnpunkten auftreten, in denen die Tangentialbeschleunigung des Geschosses Null ist.*

Die Tangentialbeschleunigung  $\dot{v}$  besteht aus zwei Anteilen (Bild 4.8):

- der Verzögerung durch den Luftwiderstand  $-b'$ ,
- der Komponente der Fallbeschleunigung  $g$  in Richtung der Bahntangente  $-g \sin \vartheta$ .

Auf dem aufsteigenden Flugbahnast ist sowohl  $-b'$  als auch  $-g \sin \vartheta$  negativ; die Geschwindigkeit verringert sich somit kontinuierlich ( $\dot{v} < 0$ ; siehe Flugbahneigenschaft 1).

Im Flugbahngipfel wird  $\sin \vartheta = 0$ ; es wirkt hier nur die Verzögerung  $-b'$  des Luftwiderstands.

Nach Durchgang des Geschosses durch den Gipfelpunkt ist  $-g \sin \vartheta > 0$ ; die Tangentialkomponente von  $g$  weist somit in Richtung der Bahngeschwindigkeit  $v$ . Da  $|g \sin \vartheta|$  in der Nähe des Gipfels klein ist, wird  $\dot{v}$  auch hinter dem Gipfel zunächst noch negativ bleiben. Das Geschöß wird also weiterhin verzögert.

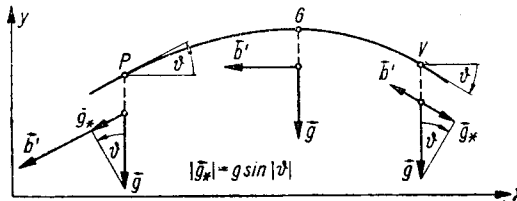


Bild 4.8  
Zum Verlauf der Tangentialbeschleunigung  $\dot{v}$  längs der Flugbahn

Je weiter sich das Geschöß von dem Gipfel entfernt, um so größere Werte nimmt  $|g \sin \vartheta|$  an. Es wird schließlich ein Punkt  $V$  erreicht, in dem sich die Tangentialkomponente der Fallbeschleunigung und die Verzögerung durch den Luftwiderstand gerade das Gleichgewicht halten:

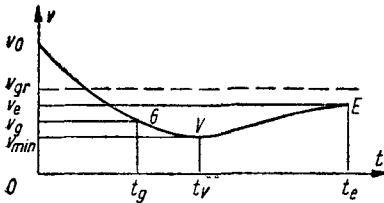
$$|g \sin \vartheta| = b'.$$

In diesem Punkt ist  $\dot{v} = 0$ ; die Geschwindigkeit  $v$  erreicht hier ihren Minimalwert  $v = v_{\min}$ .

Nach Passieren des Punktes  $V$  ist  $|g \sin \vartheta| > b'$ , das Geschöß wird von jetzt an beschleunigt.

Ein mathematisch strenger Beweis für die Existenz eines Geschwindigkeitsminimums auf dem absteigenden Flugbahnast ist bisher nur unter der relativ einschneidenden Voraussetzung einer konstanten Atmosphäre und konstanter Fallbeschleunigung erbracht worden.<sup>1)</sup>

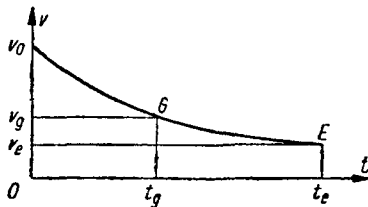
Unter den vorgenannten Voraussetzungen hat die Bahngeschwindigkeit qualitativ den in Bild 4.9 wiedergegebenen Verlauf (siehe auch Bild 2.4c, Seite 24).



**Bild 4.9**  
Existenz eines Minimums der Bahngeschwindigkeit  $v$  bei Bahnen der Klasse Boden – Boden

Ob das Geschwindigkeitsminimum zwischen Gipfel und Auftreffpunkt (das heißt, in dem Zeitintervall  $[t_g, t_e]$ ) erreicht wird, hängt von den jeweiligen Anfangsbedingungen der Flugbahn ab.

Bei rasanten Flugbahnen der Klasse Boden – Boden, die durch eine hohe Anfangsgeschwindigkeit und kleine Abgangswinkel charakterisiert sind, nimmt die Bahngeschwindigkeit zwischen dem Gipfel und dem Auftreffpunkt monoton ab; ein (echtes) Geschwindigkeitsminimum ist in diesem Intervall nicht enthalten (Bild 4.10).



**Bild 4.10**  
Verlauf der Bahngeschwindigkeit  $v$  bei rasanten Bahnen der Klasse Boden – Boden

Bei Fernbahnen mit einer Reichweite von 80 bis 100 km kann nach dem Geschwindigkeitsminimum noch ein Geschwindigkeitsmaximum vorhanden sein (Bild 4.11).

<sup>1)</sup> Siehe *Stojanow* [25] (zitiert nach [4], Bd. 1, S. 101). Der Begriff *konstante Atmosphäre* wird in Abschnitt 5.1. (Seite 215) erläutert.

Wie man Bild 4.9 entnimmt, strebt die Bahngeschwindigkeit  $v$  nach Durchlaufen ihres Minimums einem Grenzwert zu, der sogenannten Fallschirmgeschwindigkeit:

$$t \rightarrow \infty: \quad v \rightarrow v_{gr} \quad (\dot{v}_{gr} = 0).$$

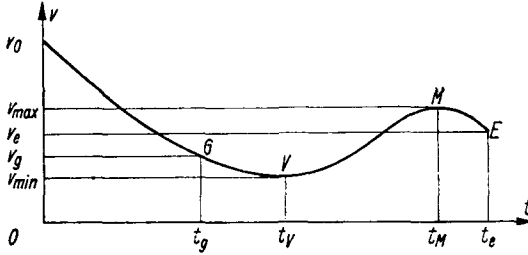


Bild 4.11  
Verlauf der Bahngeschwindigkeit  $v$  bei Fernbahnen

Auf Grund der Flugbahneigenschaft 3 verläuft die Flugbahn für  $t \rightarrow \infty$  senkrecht zur  $x$ -Achse; es ist also  $\vartheta_{gr} = -\pi/2$ . Gleichung (4.51) spezialisiert sich damit zu

$$b_{gr} = c H_{\tau}(\bar{y}) G(v_{\tau}) v = g_0, \quad (4.52)$$

worin  $\bar{y}$  einen konstanten (vorgegebenen) Mittelwert der Flugbahnhöhe und  $g_0$  die als konstant vorausgesetzte Fallbeschleunigung bedeuten.

Führt man die Funktion  $F(v_{\tau}) := G(v_{\tau}) v_{\tau}$  ein, so läßt sich (4.52) in der Form schreiben

$$\hat{c} F[(v_{\tau})_{gr}] = g_0, \quad \hat{c} := c H(\bar{y}) = c \frac{p(\bar{y})}{p_{0N}}$$

bzw. umgeformt

$$F[(v_{\tau})_{gr}] = g_0 / \hat{c}. \quad (4.53)$$

Steht eine Tabelle für  $F(v_{\tau})$ <sup>1)</sup> zur Verfügung, so kann man – für beliebige vorgegebene  $\hat{c}$ -Werte – die entsprechenden Grenzggeschwindigkeiten  $(v_{\tau})_{gr}$  ablesen;  $v_{gr}$  errechnet sich dann aus

$$v_{gr} = (v_{\tau})_{gr} \sqrt{\frac{\tau(\bar{y})}{\tau_{0N}}}.$$

<sup>1)</sup> Für das sowjetische Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 ist ein Tabellenauszug im Anhang (Tafel II) enthalten.

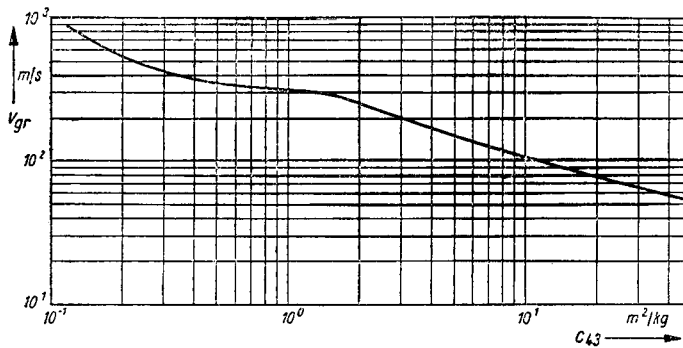
*Zahlenbeispiel:* Für  $c_{4,3} = 8,5 \text{ m}^2/\text{kg}$  und  $\bar{y} = 0$  ergibt sich

$$F_{4,3}(v_{gr}) = \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{8,5 \text{ m}^2/\text{kg}} = 1,15 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}.$$

Aus der  $F_{4,3}(v_{\tau})$ -Tabelle folgt als Grenzggeschwindigkeit:

$$v_{gr} = 124 \text{ m/s}.$$

Der Verlauf der Grenzggeschwindigkeit  $v_{gr}$  als Funktion des Ballistischen Koeffizienten  $c_{4,3}$  ist in Bild 4.12 veranschaulicht. Bei der Berechnung des Diagramms sind meteorologische Normalbedingungen vorausgesetzt worden.



*Bild 4.12 Grenzggeschwindigkeit  $v_{gr}$  als Funktion des Ballistischen Koeffizienten  $c$  (bezogen auf das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 und die Bodenwerte der Normalatmosphäre ANA)*

### 4.3.2. Aussagen über den Neigungswinkel der Flugbahntangente

In diesem Abschnitt werden einige allgemeine Aussagen über die Neigung der Flugbahntangente  $p := \tan \vartheta$  bewiesen. Dem optimalen Abgswinkel  $(\vartheta_0)_{opt} = \vartheta_0^*$  ist ein besonderer Abschnitt gewidmet.

**Flugbahneigenschaft 6:** *Die Bahnneigung  $p = \tan \vartheta$  nimmt längs der Flugbahn monoton ab.*

Zum *Beweis dieser Flugbahneigenschaft* wird von der ersten Gleichung des  $p$ -Systems (4.26) ausgegangen. Es gilt

$$dp = -(g/u) dt$$

bzw. nach Integration zwischen den Punkten  $M_1$  und  $M_2$  (Bild 4.5, Seite 194):

$$p_2 - p_1 = - \int_{t_1}^{t_2} (g/u) dt.$$

Wegen  $g/u > 0$  und  $t_2 \geq t_1$  ist

$$\int_{t_1}^{t_2} (g/u) dt \geq 0, \quad p_2 \leq p_1.$$

Da  $M_1 = (x_1, y_1)$  und  $M_2 = (x_2 > x_1, y_2)$  beliebige Punkte der Flugbahn bezeichnen, ist die Flugbahneigenschaft 6 bewiesen.

**Flugbahneigenschaft 7:** *In gleichen Höhen ( $y_1 = y_2 = y$ ) ist der Neigungswinkel  $\vartheta$  der Bahntangente auf dem ansteigenden Flugbahnast betragsmäßig kleiner als auf dem absteigenden Ast. (Der absteigende Flugbahnast verläuft steiler als der ansteigende.)*

*Beweis der Flugbahneigenschaft 7:* Multiplikation der vierten Gleichung des  $x$ -Systems (4.25) mit  $dy$  liefert

$$\frac{dp}{dx} dy = - \frac{g}{u^2} dy.$$

Unter Beachtung von

$$dy/dx = p, \quad dh^* = (g/g_0) dy$$

kann man die vorstehende Gleichung umformen in

$$\frac{1}{2} d(p^2) = -(g_0/u^2) dh^*. \quad (4.54)$$

Es werde nun angenommen, daß die Bahnelemente  $p, u$  der betreffenden Bahn als Funktion der geopotentiellen Höhe  $h^*$  berechnet vorliegen.

Integration von (4.54) zwischen dem Punkt auf dem ansteigenden Flugbahnast  $M_1$  und dem Gipfelpunkt  $G$  sowie zwischen  $G$  und dem Punkt auf dem absteigenden Flugbahnast  $M_2$  ergibt (siehe Bild 4.6, Seite 195):

$$p_g^2 - p_1^2 = 2 g_0 \int_{h_1^*}^{h_g^*} u^{-2} dh^*, \quad p_2^2 - p_g^2 = 2 g_0 \int_{h_g^*}^{h_2^*} u^{-2} dh^*.$$

Da die Horizontalkomponente der Bahngeschwindigkeit  $u$  längs der Flugbahn monoton abnimmt (*Flugbahneigenschaft 3*), liefert die Anwendung des 1. Mittelwertsatzes der Integralrechnung<sup>1)</sup> auf die vorstehenden Gleichungen:

$$p_g^2 - p_1^2 = 2 g_0 u_1^{-2} (h_g^* - h_1^*), \quad (4.55)$$

$$p_2^2 - p_g^2 = 2 g_0 u_{II}^{-2} (h_2^* - h_g^*); \quad (4.56)$$

$u_1, u_{II}$  sind Zahlenwerte, die  $u$  in gewissen Punkten  $P_I, P_{II}$  auf dem ansteigenden Flugbahnast  $\widehat{M_1 G}$  bzw. dem absteigenden Flugbahnast  $\widehat{G M_2}$  annimmt.

<sup>1)</sup> Siehe etwa Fichtenholz, G. M.: *Differential- und Integralrechnung. 2.*, berichtigte Aufl., Berlin 1966, Bd. 2, S. 117 ff.

Beachtet man, daß  $p_g = \tan \vartheta_g = 0$  ist und (im Rahmen des Gültigkeitsbereichs des klassischen Bahnmodells) für  $y_1 = y_2$  auch  $h_1^* = h_2^*$  wird, dann ergibt die Division von (4.55) durch (4.56):

$$\frac{p_1^2}{p_2^2} = \frac{u_{II}^2}{u_I^2} \leq 1, \quad p_1 \leq |p_2|.$$

Hieraus folgert man ( $\vartheta_1 \geq 0$ ):

$$\tan \vartheta_1 \leq |\tan \vartheta_2| = \tan |\vartheta_2|, \quad \vartheta_1 \leq |\vartheta_2|. \quad (4.57)$$

Für  $y = 0$  wird  $M_1 = 0$ ,  $M_2 = E$ , und (4.57) spezialisiert sich zu  $\vartheta_0 \leq |\vartheta_e|$ . Der Auftreffwinkel  $\vartheta_e$  ist im luftgefüllten Raum betragsmäßig größer als der Abgangswinkel  $\vartheta_0$ , im Vakuum dem Betrage nach gleich dem Abgangswinkel.

Der Unterschied zwischen Abgangs- und Auftreffwinkel ist um so ausgeprägter, je größer der Ballistische Koeffizient  $c$  des Geschosses ist.

*Zahlenbeispiel:* Bei einem speziellen 7,62-mm-Infanteriegeschosß findet man für  $\vartheta_0 = 35^\circ$  und  $v_0 = 800$  m/s als Auftreffwinkel  $|\vartheta_e| = 64^\circ 23'$ .

Unter der Voraussetzung, daß die meteorologischen Elemente der Atmosphäre und die Fallbeschleunigung  $g$  längs der Flugbahn als konstant angenommen werden können, läßt sich leicht die folgende Flugbahneigenschaft beweisen:

**Flugbahneigenschaft 8:** Die Flugbahntangente erreicht in einer endlichen Entfernung  $x = x_{gr}$  vom Abgangspunkt den Neigungswinkel  $\vartheta_{gr} = -\pi/2$ . (Die Flugbahn hat in einer endlichen Entfernung vom Abgangspunkt eine vertikale Asymptote.)

Zum Beweis der Flugbahneigenschaft 8 benutzt man zweckmäßigerweise die zweite Gleichung des  $\vartheta$ -Systems (4.28):

$$\frac{dx}{d\vartheta} = -\frac{v^2}{g}.$$

Integration von  $\vartheta = \vartheta_0$  bis  $\vartheta = \vartheta_{gr} = -\pi/2$  liefert

$$x_{gr} \leq x_0 - \int_{\vartheta_0}^{-\pi/2} (v^2/g) d\vartheta. \quad (4.58)$$

Setzt man die Atmosphäre und die Fallbeschleunigung als konstant voraus und schließt die Klasse der Vakuumbahnen ausdrücklich aus, so strebt die Bahngeschwindigkeit  $v$  für  $t \rightarrow \infty$  einem endlichen Grenzwert  $v = v_{gr}$  zu (siehe Abschnitt 4.3.1.); die maximal mögliche Bahngeschwindigkeit  $v = v_{max}$  ist somit ebenfalls endlich. Die rechte Seite von (4.58) kann dann wie folgt abgeschätzt werden:

$$x_{gr} \leq x_0 - (v_{max}^2/g_0) \int_{\vartheta_0}^{-\pi/2} d\vartheta = x_0 + (v_{max}^2/g_0)(\vartheta_0 + \pi/2) < +\infty,$$

was zu zeigen war.

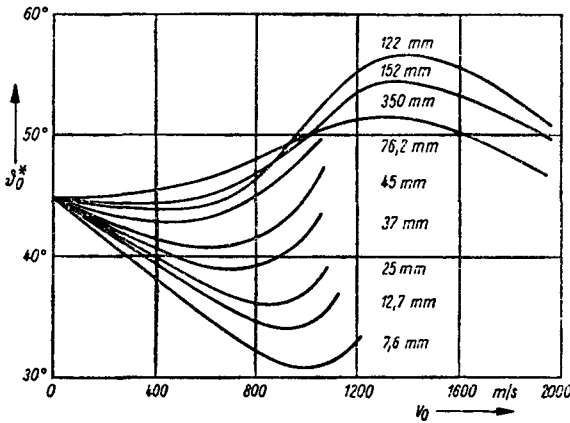


### 4.3.3. Der optimale Abgangswinkel

Der optimale Abgangswinkel  $\vartheta_0^* := (\vartheta_0)_{\text{optimal}}$  ist derjenige Abgangswinkel, unter dem ein spezielles Geschöß – bei vorgegebener Anfangsgeschwindigkeit – seine maximale Schußweite erreicht.

Im Vakuum beträgt der optimale Abgangswinkel  $\vartheta_0^* = \pi/4 \cong 45^\circ$ , wenn sich Ziel und Abgangspunkt in gleicher Höhe befinden (siehe Abschnitt 2.5.).

Im luftgefüllten Raum kann der optimale Abgangswinkel (unter der vorgenannten Voraussetzung) sowohl *größer* wie auch *kleiner* als  $45^\circ$  sein. Der im Einzelfall für  $\vartheta_0^*$  gültige Zahlenwert hängt in starkem Maße von der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und dem Ballistischen Koeffizienten  $c$  des betreffenden Geschosses ab; siehe Bild 4.13.<sup>1)</sup>



**Bild 4.13**  
Optimaler Abgangswinkel  $\vartheta_0^*$  als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  für eine Reihe ausgewählter Geschosse (nach [4], Bd. I, S. 100)

Bei geringer Anfangsgeschwindigkeit ( $v_0 \rightarrow 0$ ) unterscheidet sich der optimale Abgangswinkel im luftgefüllten Raum wenig von dem optimalen Abgangswinkel der parabolischen Theorie.

Mit wachsender Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  verringert sich der optimale Abgangswinkel  $\vartheta_0^*$ , durchläuft ein Minimum und steigt anschließend wieder merklich an.

Bei Geschossen großkalibriger Waffen (Fernbahnen mit kleinem Ballistischem Koeffizienten) erreicht  $\vartheta_0^*$  im Bereich  $v_0 > 1300$  m/s ein Maximum; bei weiterer Vergrößerung der Anfangsgeschwindigkeit fällt  $\vartheta_0^*$  erneut.

<sup>1)</sup> Zur Berechnung von Bild 4.13 hat das sowjetische *Luftwiderstandsgesetz 1930* Verwendung gefunden.

Der bei kleinen Anfangsgeschwindigkeiten zu verzeichnende Abfall des optimalen Abgangswinkels unter dem Vakuum-Wert erklärt sich durch die mit wachsender Anfangsgeschwindigkeit zunehmende Asymmetrie der Flugbahn.

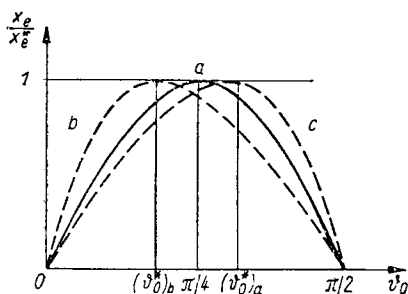
Sind Anfangsgeschwindigkeit und Abgangswinkel hinreichend groß, so verläuft ein großer Teil der Flugbahn in einem Bereich der Atmosphäre, in dem die Luftdichte gering ist. Man wird in diesem Fall eine große Schußweite erreichen, wenn das Geschöß unter einem Winkel von etwa  $45^\circ$  in die Schichten geringer Luftdichte eintritt. In Anbetracht der Bahnkrümmung muß der optimale Abgangswinkel am Boden deshalb größer als  $45^\circ$  sein.

Je kleiner der Ballistische Koeffizient des Geschosses ist, bei um so kleinerer Geschwindigkeit beginnt der Anstieg des optimalen Winkels auf Werte über  $45^\circ$  und um so weniger ausgeprägt ist dieser Anstieg.

Nimmt die Anfangsgeschwindigkeit sehr große Werte an ( $v_0 > 1400$  m/s), dann verläuft der Hauptteil der optimalen Flugbahn in einem Höhenbereich, in dem nahezu Vakuum herrscht: Der optimale Abgangswinkel nähert sich wieder dem optimalen Abgangswinkel  $\vartheta_0^* = 45^\circ$  der Vakuumbahnen.

Bei Ferngeschützen, deren Geschosse eine große Querschnittsbelastung (einen kleinen Ballistischen Koeffizienten) und hohe Anfangsgeschwindigkeiten [ $v_0 = (1000 \dots 1500)$  m/s] haben, erhält man optimale Abgangswinkel von  $\vartheta_0^* = (50 \dots 55)^\circ$ . Die hiermit erreichbaren maximalen Schußweiten betragen (50 ... 100) km.

Bei Geschossen mittlerer Kaliber und Anfangsgeschwindigkeiten der Größenordnung  $v_0 = 800$  m/s liegt der optimale Abgangswinkel zwischen  $43^\circ$  und  $45^\circ$ .



**Bild 4.14**  
Relative Schußweite  $x_e/x_e^*$  als Funktion des Abgangswinkels  $\vartheta_0$   
a – parabolische Theorie; b – klassisches Bahnmodell – Schützenwaffengeschöß ( $c_{43} = 6,0$  m<sup>2</sup>/kg;  $v_0 = 1000$  m/s); c – klassisches Bahnmodell – Geschöß eines Ferngeschützes ( $c_{43} = 0,1$  m<sup>2</sup>/kg;  $v_0 = 1000$  m/s)

Bei Handfeuerwaffen ergeben sich optimale Abgangswinkel von  $(30 \dots 35)^\circ$ ; das Schußweitenmaximum ist jedoch nur sehr schwach ausgeprägt.

Das leichte 7,62-mm-Gewehrsgeschöß erreicht unter dem Abgangswinkel  $\vartheta_0 = 35^\circ$  eine Schußweite von  $x_e \approx 3650$  m. Verringert man den Abgangswinkel um  $16^\circ$  auf  $\vartheta_0 = 19^\circ$ , so nimmt die Schußweite nur etwa um 150 m ab ( $x_e \approx 3500$  m).

Das Verhältnis der bei einem (beliebigen) Abgangswinkel  $\vartheta_0$  und konstanter Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  erzielbaren Schußweite  $x_e$  zur maximalen Schußweite  $x_e^*$  ( $\vartheta_0 = \vartheta_0^*$ ) ist im Rahmen der parabolischen Theorie eine universelle Funktion von  $\vartheta_0$  (siehe Bild 2.9, Seite 37). Im luftgefüllten Raum gilt dies nicht mehr: Das Maximum der Kurve  $x_e/x_e^* = f(\vartheta_0)$  ist – in Abhängigkeit von den speziellen  $c$ - und  $v_0$ -Werten – gegenüber dem Maximum der Vakuum-Kurve nach links oder rechts verschoben (Bild 4.14).

Die in diesem Abschnitt getroffenen Aussagen über den optimalen Abgangswinkel beziehen sich auf Bahnen des klassischen Bahnmodells, sind also unter der Voraussetzung gültig, daß die Schwerkraft richtungsunabhängig ist und im Bereich der Schußweite die Erdoberfläche mit hinreichender Genauigkeit als Ebene angesehen werden kann.

Bei Schußweiten, die einige hundert (oder gar tausend) Kilometer betragen, sind die vorgenannten Annahmen nicht mehr realistisch und müssen fallengelassen werden. Für die Abhängigkeit des optimalen Abgangswinkels von den Flugbahnparametern gelten dann andere (allgemeinere) Beziehungen, die im Band „Raketen und Raketenballistik“ dieser Reihe behandelt werden.

#### 4.3.4. Aussagen über die Bahnelemente im Flugbahngipfel

In diesem Abschnitt werden einige allgemeine Eigenschaften der Bahnelemente im Flugbahngipfel bewiesen.

**Flugbahneigenschaft 9:** *Bei gleicher Flughöhe ( $y_1 = y_2 = y$ ) liegt der Punkt  $M_1 = (x_1, y_1)$  auf dem ansteigenden Flugbahnast weiter vom Gipfel entfernt als der Punkt  $M_2 = (x_2 > x_1, y_2 = y_1)$  auf dem absteigenden Ast:  $x_g - x_1 \geq x_2 - x_g$  (siehe Bild 4.6).*

Die Flugbahneigenschaft 9 läßt sich auch formulieren:

**Flugbahneigenschaft 9a:** *Der Gipfelpunkt  $G$  liegt hinter der Mitte zwischen zwei gleich hohen Bahnpunkten:*

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \leq x_g \quad (y_1 = y_2).$$

Hieraus ergibt sich die *Folgerung*:

*Der Gipfelpunkt liegt näher zum Auftreffpunkt als zum Abgangspunkt.*

Der *Beweis der Flugbahneigenschaft 9* ist schnell erbracht, wenn man annimmt, daß die Bahnelemente der betreffenden Flugbahn als Funktion von  $y$  bekannt sind.

Aus der ersten Gleichung des  $y$ -Systems (4.29) folgt durch Integration von dem Punkt  $M_1 = (x_1, y_1)$  auf dem aufsteigenden Flugbahnast bis zum Gipfpunkt  $G$  und vom Gipfpunkt  $G$  zu dem Punkt  $M_2 = (x_2 > x_1, y_2 = y_1)$  auf dem absteigenden Flugbahnast:

$$x_g - x_1 = \int_{y_1}^{y_g} p^{-1} dy, \quad x_2 - x_g = \int_{y_g}^{y_2} p^{-1} dy. \quad (4.59)$$

Die zweite dieser Gleichungen kann man wie folgt umformen:

$$x_2 - x_g = - \int_{y_2}^{y_g} p^{-1} dy = \int_{y_2}^{y_g} (-p)^{-1} dy = \int_{y_2}^{y_g} |p|^{-1} dy.$$

Wie beim Beweis der Flugbahneigenschaft 7 gezeigt, gilt in gleichhohen Flugbahnpunkten  $M_1, M_2$  auf dem an- bzw. absteigenden Flugbahnast:  $p_1 \leq |p_2|$ . Hieraus folgt nach einem bekannten Satz über bestimmte Integrale<sup>1)</sup>:

$$\left( \int_{y_1}^{y_g} p^{-1} dy \right)_{\text{aufst. Ast}} \leq \left( \int_{y_2=y_1}^{y_g} |p|^{-1} dy \right)_{\text{abst. Ast}} \quad (4.60)$$

(siehe Bild 4.15). Man erhält somit

$$x_g - x_1 \geq x_2 - x_g, \quad \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \leq x_g, \quad (4.61)$$

was zu zeigen war.

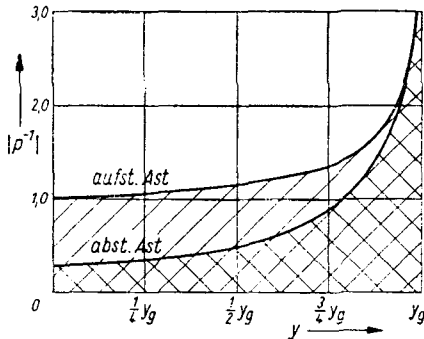


Bild 4.15  
Geometrische Veranschaulichung der  
Beziehung (4.60)

Für  $M_1 = O = (0, 0)$ ,  $M_2 = E = (x_e, 0)$  folgert man aus (4.61):

$$x_g \geq \frac{1}{2} x_e.$$

**Flugbahneigenschaft 10:** Gegeben seien zwei Punkte  $M_1 = (x_1, y_1)$  und  $M_2 = (x_2 > x_1, y_2 = y_1)$ , von denen  $M_1$  auf dem ansteigenden und  $M_2$  auf dem absteigenden Flugbahnast liegt. Dann ist die Flugzeit vom

<sup>1)</sup> Siehe etwa Fichtenholz, G. M.: *Differential- und Integralrechnung*. 2., berichtigte Aufl., Berlin 1966, Bd. 2, S. 116.

Punkt  $M_1$  bis zum Gipfel  $G$  kleiner als die Flugzeit vom Gipfel  $G$  bis zum Punkt  $M_2$ :

$$t_g - t_1 \leq t_2 - t_g. \quad (4.62)$$

Zum Beweis der Flugbahneigenschaft 10 geht man von der zweiten Gleichung des  $y$ -Systems (4.29) aus. Der Beweis verläuft in der gleichen Weise wie bei der Flugbahneigenschaft 9.

Liegen die Punkte  $M_1$  und  $M_2$  in der Mündungsebene ( $M_1 = O$ ,  $M_2 = E$ ), dann spezialisiert sich (4.62) zu

$$t_g \leq \frac{1}{2} t_e.$$

Auf analoge Weise zeigt man die folgende Flugbahneigenschaft.

**Flugbahneigenschaft 11:** Die Bogenlänge  $s$  von einem Bahnpunkt  $M_1$  des aufsteigenden Astes bis zum Gipfelpunkt  $G$  ist größer als die Bogenlänge vom Gipfelpunkt  $G$  bis zu dem gleich hohen Punkt  $M_2$  des absteigenden Astes:

$$s_g - s_1 \geq s_2 - s_g.$$

Für die numerische Abschätzung der Gipfelhöhe recht brauchbar ist die nachstehende Eigenschaft:

**Flugbahneigenschaft 12:** Die Flugbahn im luftgefüllten Raum liegt (für  $x \in [0, x_e]$ ) zwischen der Parabel mit gleicher Schußweite und gleichem Abgangswinkel sowie der Parabel mit gleicher Schußweite und gleichem Auftreffwinkel (siehe Bild 4.16).

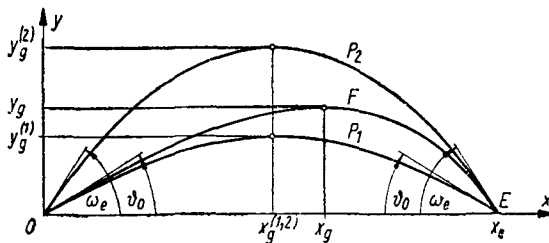


Bild 4.16  
Einschluß der Flugbahn  $\mathfrak{F}$  im luftgefüllten Raum zwischen die Parabel  $\mathfrak{P}_1$  mit gleichem Abgangswinkel und die Parabel  $\mathfrak{P}_2$  mit gleichem Auftreffwinkel ( $x_e = \text{const}$ )

Die in Bild 4.16 eingezeichneten Parabeln  $\mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{P}_2$  schneiden die Flugbahn  $\mathfrak{F}$  in zwei Punkten  $O$  und  $E$  und haben in jeweils einem dieser Punkte die gleiche Tangentenrichtung wie die Flugbahn.

Um zu zeigen, daß die Flugbahn  $\mathfrak{F}$  von den Parabeln  $\mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{P}_2$  eingeschlossen wird, genügt es nachzuweisen, daß sich sowohl  $\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{P}_1$  wie auch  $\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{P}_2$  *ausschließlich* in den Punkten  $O$  und  $E$  schneiden. Der Beweis dieses Sachverhalts erfolgt mit Hilfe des *Satzes von Rolle*<sup>1)</sup> (siehe Übungsaufgabe 4.5.).

#### 4.3.5. Näherungsformeln für die Bahnelemente im Flugbahngipfel

Die Flugbahneigenschaft 12 soll nun dazu verwendet werden, *Näherungsformeln für die Gipfelhöhe*  $y_g$  herzuleiten.

Im Rahmen der parabolischen Theorie war für die Horizontalschußweite  $\tilde{x}_e$  und die Gipfelhöhe  $\tilde{y}_g$  gefunden worden (Tabelle 2.1, Seite 35):

$$\tilde{x}_e = \frac{\tilde{v}_0^2}{g_0} \sin 2\tilde{\vartheta}_0, \quad \tilde{y}_g = \frac{\tilde{v}_0^2}{2g_0} \sin^2 \tilde{\vartheta}_0.$$

Durch Kombination dieser Beziehungen erhält man

$$\tilde{y}_g = \frac{1}{4} \tilde{x}_e \tan \tilde{\vartheta}_0. \quad (4.63)$$

Es sei nun  $y_g^{(1)}$  die Gipfelhöhe der Parabel  $\mathfrak{P}_1$  ( $\tilde{x}_e = x_e, \tilde{\vartheta}_0 = \vartheta_0$ ) und  $y_g^{(2)}$  die Gipfelhöhe der Parabel  $\mathfrak{P}_2$  ( $\tilde{x}_e = x_e, \tilde{\vartheta}_0 = \omega_e := -\vartheta_e$ ).

Zwischen den Gipfelhöhen  $y_g, y_g^{(1)}$  und  $y_g^{(2)}$  besteht auf Grund der Flugbahneigenschaft 12 die Relation

$$y_g^{(1)} \leq y_g \leq y_g^{(2)}$$

bzw. ausführlich

$$\frac{1}{4} x_e \tan \vartheta_0 \leq y_g \leq \frac{1}{4} x_e \tan \omega_e. \quad (4.64)$$

Man erhält Näherungsformeln für  $y_g$ , wenn man  $y_g^{(1)}$  und  $y_g^{(2)}$  in geeigneter Weise mittelt. Hierfür kommen insbesondere das arithmetische Mittel und das geometrische Mittel in Betracht:

a) *arithmetisches Mittel*  $\bar{y}_g$

$$\bar{y}_g = \frac{1}{2} [y_g^{(1)} + y_g^{(2)}],$$

$$\bar{y}_g = \frac{1}{8} x_e [\tan \vartheta_0 + \tan \omega_e]; \quad (4.65)$$

<sup>1)</sup> Siehe etwa *Fichtenholz, G. M.: Differential- und Integralrechnung. 2.,* berichtigte Aufl., Berlin 1966, Bd. I, S.207.

b) *geometrisches Mittel*  $\bar{y}_g$

$$\bar{y}_g = \sqrt{y_g^{(1)} \cdot y_g^{(2)}},$$

$$\bar{y}_g = \frac{1}{2} x_e \sqrt{\tan \vartheta_0 \cdot \tan \omega_e}. \quad (4.66)$$

Die Beziehungen (4.65) und (4.66) gestatten, die Gipfelordinate aus den Flugbahnelementen im Abgangs- und Auftreffpunkt näherungsweise zu ermitteln.<sup>1)</sup>

Das geometrische Mittel zweier Größen  $A$  und  $B$  ist betragsmäßig stets kleiner als deren arithmetisches Mittel:

$$|\sqrt{AB}| \leq \frac{1}{2}|A + B|.$$

Diese Ungleichung kann sehr leicht bewiesen werden. Aus

$$0 \leq (A - B)^2 = (A + B)^2 - 4AB$$

folgt zunächst

$$4AB \leq (A + B)^2$$

bzw. nach Ziehen der Quadratwurzel und Übergang zu den Beträgen

$$|\sqrt{AB}| \leq \frac{1}{2}|A + B|.$$

Im vorliegenden Fall gilt somit:  $\bar{y}_g \leq \bar{y}_a$ .

Aus  $\bar{y}_g$  und  $\bar{y}_a$  können wiederum das geometrische und das arithmetische Mittel gebildet werden:

$$y_g^* = \frac{1}{2}(\bar{y}_g + \bar{y}_a), \quad y_g^{**} = \sqrt{\bar{y}_g \cdot \bar{y}_a}.$$

Setzt man diesen Mittelungsprozeß fort, so konvergieren die Zahlenwerte der arithmetischen und geometrischen Mittel gegen das sogenannte *arithmetisch-geometrische Mittel*.

Zur *Ermittlung der Gipfelabszisse*  $x_g$  aus den Bahnelementen im Abgangs- und Auftreffpunkt läßt sich ebenfalls eine brauchbare Näherungsformel angeben. Die Herleitung dieser Formel erfolgt nach dem Schema, das bei dem Beweis der Flugbahneigenschaft 9 benutzt worden ist.

Aus  $dy/dx = p$  ergibt sich durch Integration vom Abgangspunkt  $O$  bis zum Gipfel  $G$  und vom Gipfel  $G$  bis zum Auftreffpunkt  $E$ :

$$y_g - y_0 = \int_{x_0}^{x_g} p \, dx, \quad y_e - y_g = \int_{x_g}^{x_e} p \, dx.$$

<sup>1)</sup> Siehe hierzu auch das in Abschnitt 5.5.4. behandelte Verfahren PBH.

Ersetzt man  $p$  längs der Bögen  $\widehat{OG}$  und  $\widehat{GE}$  durch die Mittelwerte  $\bar{p}_1$  bzw.  $\bar{p}_2$  und beachtet  $x_0 = y_0 = y_e = 0$ , so gehen die vorstehenden Gleichungen über in

$$y_g = \bar{p}_1 x_g, \quad y_g = -\bar{p}_2 (x_e - x_g). \quad (4.67)$$

In der Identität

$$x_g = \frac{1}{2} x_e + \frac{1}{2} x_g - \frac{1}{2} (x_e - x_g)$$

kann der zweite und dritte Term auf der rechten Seite dieser Gleichung mit Hilfe der Beziehungen (4.67) umgeformt werden:

$$x_g = \frac{1}{2} x_e + \frac{1}{2} y_g [(\bar{p}_1)^{-1} - |\bar{p}_2|^{-1}].$$

Um zu einer praktisch anwendbaren Näherungsformel für  $x_g$  zu gelangen, setzt man für  $\bar{p}_1$  und  $|\bar{p}_2|$  ein<sup>1)</sup>:

$$\bar{p}_1 = 2 \tan \frac{1}{2} \vartheta_0, \quad |\bar{p}_2| = 2 \tan \frac{1}{2} \omega_e.$$

Für  $x_g$  ergibt sich damit die Näherungsformel

$$x_g \approx x_g^* = \frac{1}{2} x_e + \frac{1}{4} y_g (\cot \frac{1}{2} \vartheta_0 - \cot \frac{1}{2} \omega_e). \quad (4.68)$$

Die *Bahngeschwindigkeit im Flugbahngipfel*  $v_g$  kann in guter Näherung mit Hilfe der Beziehung

$$v_g = x_e/t_e \quad (4.69)$$

abgeschätzt werden.

Ein Zahlenbeispiel für die Genauigkeit der hier wiedergegebenen Näherungsformeln findet man in Abschnitt 5.7.3.

#### 4.3.6. Signifikante Punkte der Flugbahn<sup>2)</sup>

Bei einer Flugbahn im luftgefüllten Raum (hier verstanden als Lösungskurve des klassischen Bahnmodells) können eine Reihe signifikanter (oder: ausgezeichneter) Punkte unterschieden werden.

Außer dem Abgangspunkt  $O$  und dem Auftreffpunkt  $E$  sind zu nennen:

a) *Gipfelpunkt*  $G$

Bedingungsgleichung:  $y = \max!$  bzw.  $dy/dx = 0, d^2y/dx^2 < 0$ ;

<sup>1)</sup> Siehe *Kraus* [26].

<sup>2)</sup> Die Darstellung lehnt sich an *Molitz/Strobel* [23] an.



b) *Punkt größter Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$*

Bedingungsgleichung:  $\dot{\vartheta} = \max!$  bzw.  $d^2\vartheta/dt^2 = 0$ ;  $d^3\vartheta/dt^3 < 0$ ;

c) *Scheitel (Punkt größter Bahnkrümmung)  $S$*

Bedingungsgleichung:  $\kappa := 1/\rho = \max!$  bzw.  $d\rho/dt = 0$ ,  $d^2\rho/dt^2 > 0$ ;  
( $\rho$ : Krümmungsradius der Bahn);

d) *Punkt geringster Folgsamkeit  $F^1$*

Bedingungsgleichung:  $\cos \vartheta/v^3 = \min!$  bzw.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\cos \vartheta}{v^3} \right) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\cos \vartheta}{v^3} \right) > 0;$$

e) *Punkt kleinsten relativen Widerstands  $P$*

Bedingungsgleichung:  $\alpha := b/g = \min!$  bzw.  $d\alpha/dt = 0$ ;  $d^2\alpha/dt^2 > 0$ ;

f) *Punkt geringster Bahngeschwindigkeit  $V$*

Bedingungsgleichung:  $v = \min!$  bzw.  $dv/dt = 0$ ;  $d^2v/dt^2 > 0$ .

Mit Hilfe der angegebenen Bedingungsgleichungen sowie der Bewegungsdifferentialgleichungen läßt sich zeigen, daß in den signifikanten Punkten die Beziehung

$$\sin \vartheta = -\zeta_i \frac{b'}{g} \quad (4.70)$$

gilt, wobei  $\zeta_i$  aus Tabelle 4.1 zu entnehmen ist.

Punkt	$G$	$\Omega$	$S$	$F$	$V$
$\zeta_i$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1

Tabelle 4.1

Man erkennt, daß die durch (4.70) und Tabelle 4.1 erfaßten signifikanten Punkte samt und sonders auf dem absteigenden Flugbahnast liegen. Für die zeitliche Aufeinanderfolge der signifikanten Punkte findet man unter Beachtung der Flugbahneigenschaft 6:

$$t_g \leq t_\Omega \leq t_s \leq t_F \leq t_V.$$

Zum Punkt geringster Bahngeschwindigkeit  $V$  sei auf die Ausführungen in Abschnitt 4.3.1. verwiesen.

<sup>1)</sup> Sieht man die Atmosphäre, die Fallbeschleunigung sowie die Rotationsgeschwindigkeit des Geschosses um seine Längsachse als konstant an, dann liegt das Geschöß mit seiner Symmetrieachse um so besser in der Bahntangente, je größer  $\cos \vartheta/v^3$  ist.

Der Punkt kleinsten relativen Widerstands  $P$  liegt in der Regel etwas vor dem Punkt geringster Bahngeschwindigkeit  $V(t_p < t_v)$ .

Im luftleeren Raum fallen alle genannten signifikanten Punkte in dem Flugbahngipfel zusammen; denn mit  $b' = 0$  geht die Bedingungsgleichung (4.70) in  $\sin \vartheta = 0$  über.

Über die Lage der signifikanten Punkte bezüglich des Auftreffpunkts  $E$  lassen sich im luftgefüllten Raum keine allgemeinen Aussagen treffen.

#### Kontrollfragen zu Kapitel 4

- 4.1. Auf welchen Grundvoraussetzungen beruht das klassische Bahnmodell der Äußeren Ballistik?
- 4.2. In welchen Punkten unterscheidet sich das klassische Bahnmodell von dem früher behandelten Bahnmodell der parabolischen Theorie?
- 4.3. Von welchen Parametern hängt die allgemeine Lösung des klassischen Bahnmodells ab?
- 4.4. Nennen Sie die Ihnen bekannten äquivalenten Variablensysteme, in denen die ballistischen Bewegungsgleichungen dargestellt werden können!
- 4.5. Warum gilt das klassische Bahnmodell nur für Bahnen relativ geringer Reichweite? Wie ist zur Berechnung von Fernbahnen vorzugehen?
- 4.6. Haben zwei Flugbahnpunkte  $M_1 = (x_1, y_1)$  und  $M_2 = (y_2, x_2)$  für  $y_1 = y_2 = y$  auch die gleiche geopotentielle Höhe  $h^*$ ? Man veranschauliche den Sachverhalt an einer Skizze!
- 4.7. Wann heißen die Gleichungen eines Differentialgleichungssystems „gekoppelt“? Welche Konsequenzen ergeben sich aus der Kopplung der ballistischen Bewegungsgleichungen für den Integrationsprozeß?
- 4.8. Was läßt sich über die mechanische Gesamtenergie eines Geschosses bei dessen Bewegung durch den luftleeren bzw. luftgefüllten Raum aussagen?
- 4.9. Welche allgemeinen Eigenschaften haben die Bahngeschwindigkeit  $v$  und deren Komponenten  $u$  und  $w$  im luftgefüllten Raum?
- 4.10. Skizzieren Sie aus dem Gedächtnis den Verlauf der Bahngeschwindigkeit  $v$ 
  - als Funktion der Flugzeit  $t$ ,
  - als Funktion der Horizontalentfernung  $x$ ,
  - a) für eine Flugbahn im Vakuum,
  - b) für eine Fernbahn,
  - c) für eine rasante Bahn eines Infanteriegeschosses!
- 4.11. Welche allgemeinen Eigenschaften besitzt die Flugbahn im luftgefüllten Raum für  $t \rightarrow \infty$ ?
- 4.12. Welche allgemeinen Aussagen lassen sich über den Verlauf des Neigungswinkels  $\theta$  der Bahntangente längs der Flugbahn treffen?
- 4.13. Unter welchem Abgangswinkel wird im luftgefüllten Raum die maximale Schußweite erzielt? (Begründung!)
- 4.14. Welchen Ungleichungen genügen die Bahnelemente im Flugbahngipfel?
- 4.15. Welche signifikanten Punkte besitzt die Flugbahn im luftgefüllten Raum? Durch welche Bedingungsgleichungen sind diese Punkte definiert?
- 4.16. Warum gibt es bei variabler Atmosphäre und höhenabhängiger Fallbeschleunigung keine geschostypische konstante Sinkgeschwindigkeit  $v = v_{gr}(t \rightarrow \infty)$ ?

## Übungsaufgaben zu Kapitel 4

- 4.1. Stellen Sie das Anfangswertproblem für das klassische Bahnmodell in folgenden Variablensystemen auf:
- $\{t|x, y, M, \theta\}$  ( $M$ : Mach-Zahl),
  - $\{v|t; x, y, \theta\}$ !
- \*4.2. a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminanten  $J$  für den Übergang vom  $t$ -System  $\{t|x, y, u, w\}$  zu den in Aufgabe 4.1. aufgeführten Variablensystemen!
- Unter welchen Voraussetzungen sind die Bewegungsgleichungen in den genannten Variablensystemen mathematisch äquivalent?
- 4.3. Man leite die Bewegungsgleichungen (4.37) und (4.38) her!
- 4.4. Bei Zugrundelegung des rechtwinkligen  $x, y$ -Koordinatensystems wird die Schußweite  $x_e$  mit Hilfe der Bedingungsgleichung  $y_e = y_0 = 0$  ermittelt; in dem  $x^*, h$ -System lautet die Bedingungsgleichung für die Schußweite  $x_e^*$  (siehe Bild 4.3, Seite 178):  $h_e = 0$ .
- Man berechne die Differenz der Schußweiten  $\Delta x_e = x_e^* - x_e$  näherungsweise, indem man den Flugbahnbogen  $\widehat{EE'}$  durch
- die Flugbahntangente im Punkt  $E$ ,
  - eine Flugbahnparabel ( $g = g_0 = \text{const}$ )
- ersetzt! Die Bahnelemente im Punkt  $E$  seien bekannt und vorgegeben.
- \*4.5. Man beweise mit Hilfe des Satzes von Rolle die *Flugbahneigenschaft 12* (Seite 207)!
- 4.6. Unter welcher Bedingung liefern die Näherungsausdrücke  $\bar{y}_g$  (4.65) und  $\bar{y}_g$  (4.66) für die Gipfelordinate  $y_g$  den gleichen Zahlenwert?
- 4.7. In den signifikanten Flugbahnpunkten gilt allgemein:  $\sin \vartheta = -\zeta_t \cdot b'/g$ .
- Man berechne für den Punkt kleinsten relativen Widerstands  $P$  ( $\alpha = W/G = \text{min!}$ ) den Zahlenfaktor  $\zeta = \zeta_P$ !
  - Was läßt sich über das Vorzeichen von  $\zeta_P$  aussagen?

## 5. Verfahren zur Lösung des 1. Hauptproblems beim klassischen Bahnmodell der Äußeren Ballistik

### 5.1. Überblick über die Lösungsverfahren

Bei der Formulierung des klassischen Bahnmodells war eine variable Modellatmosphäre und ein vorgegebenes (sonst aber beliebiges) Standard-Luftwiderstandsgesetz zugrunde gelegt worden. Das Anfangswertproblem für die Flugbahn erhält hierdurch eine so komplizierte Gestalt, daß die Abhängigkeit der Flugbahnelemente von der unabhängigen Variablen und den Flugbahnparametern  $c$ ,  $v_0$ ,  $\vartheta_0$  nur in Sonderfällen formelmäßig angegeben werden kann. Die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Geschosses im luftgefüllten Raum müssen deshalb im allgemeinen mit Hilfe von Näherungsverfahren gelöst werden.

Zur näherungsweisen Lösung der ballistischen Bewegungsgleichungen bieten sich drei Wege an:

- A. Die *rechten Seiten* der Bewegungsgleichungen werden so vereinfacht, daß eine geschlossene (formelmäßige) Lösung des Anfangswertproblems für die Flugbahn möglich ist oder die Lösung wenigstens auf Quadraturen zurückgeführt werden kann.
- B. Die Lösung der ungeänderten ballistischen Bewegungsgleichungen wird durch ein analytisches Verfahren approximiert.
- C. Das Anfangswertproblem wird mit Hilfe eines numerischen Algorithmus gelöst und das Ergebnis in Tabellenform dargestellt.

Die *numerischen Integrationsverfahren* für das Hauptproblem der Äußeren Ballistik liefern die Flugbahnelemente für ein vorgegebenes spezielles Parametertripler  $c$ ,  $v_0$ ,  $\vartheta_0$  mit hoher Präzision. Aussagen über den allgemeinen Charakter der Abhängigkeit der Bahnelemente von den Flugbahnparametern können jedoch nur auf dem Umweg über die Berechnung von Bahnscharen gewonnen werden.

Die *analytischen Näherungslösungen* haben gegenüber den numerischen Lösungen den wesentlichen Vorzug, daß sie unmittelbar Aussagen über

die Abhängigkeit der Bahnelemente von den Flugbahnparametern gestatten; ihre Genauigkeit reicht jedoch im allgemeinen nicht an die Genauigkeit heran, die sich mit Hilfe der numerischen Integrationsverfahren erreichen läßt.

Die hohe (und nahezu beliebig steigerbare) Genauigkeit der numerischen Lösungen muß mit relativ hohem Arbeitsaufwand bei der Durchführung des Integrationsprozesses erkaufte werden. Die *routine-mäßige* Anwendung numerischer Algorithmen zur Lösung der ballistischen Bewegungsgleichung ist – bei dem erreichten Entwicklungsstand der Rechentechnik – deshalb ökonomisch nur dann vertretbar, wenn ein leistungsfähiger Rechenautomat zur Verfügung steht.

Die Genauigkeitsforderungen, die an das Näherungsverfahren zu stellen sind, werden im wesentlichen durch das zu behandelnde Problem selbst bedingt; eine allgemeingültige Genauigkeitsschranke läßt sich nicht angeben. Es gilt jedoch der Grundsatz, daß die mathematischen Verfahrensfehler des Lösungsalgorithmus stets kleiner sein sollen als die physikalischen Modellfehler.

Die Kunst des praktisch tätigen Ballistikers besteht darin, aus der Vielzahl vorhandener Lösungsmethoden dasjenige Verfahren auszuwählen, das die Lösung der gestellten Aufgabe – unter Einhaltung der geforderten Genauigkeit – mit minimalem Aufwand ermöglicht.

Von den Näherungsverfahren zur Lösung des Hauptproblems der Äußeren Ballistik erfreuen sich unter den Praktikern die *Verfahren des Typs A* besonderer Beliebtheit.

In diesem Buch werden von den Verfahren des Typs A behandelt:

- der schwerefreie Schuß in einer konstanten Atmosphäre,
- der vertikale Schuß in einer konstanten Atmosphäre,
- der Schuß bei linearem und quadratischem Widerstandsgesetz in einer konstanten Atmosphäre sowie
- das Verfahren von *Siacci* in einer konstanten Atmosphäre.

Die Atmosphäre soll *konstant* genannt werden, wenn deren meteorologische Elemente (in dem von der Flugbahn durchquerten Atmosphärenbereich während der Flugdauer des Geschosses) räumlich und zeitlich konstant sind.

Die Vereinfachungen der Bewegungsgleichungen des klassischen Bahnmodells (insbesondere die Annahme einer konstanten Atmosphäre) werden in diesem Buch als Näherungsverfahren zur Lösung der exakten Bewegungsgleichungen aufgefaßt. Ein derartiges Vorgehen ist nicht zwingend. Die vereinfachten Bewegungsgleichungen könnten auch als

mathematische Beschreibung eines neuen (einfacheren) Bahnmodells interpretiert werden. Will man diesen Gedankengang konsequent verwirklichen, so ist man allerdings gezwungen, jede spezielle Näherungsannahme zur Lösung der ballistischen Bewegungsgleichungen aus einem eigens zu diesem Zweck gebildeten Bahnmodell herzuleiten. Es liegt auf der Hand, daß ein derartiges Vorgehen äußerst schwerfällig ist.

Zu den *Verfahren des Typs B* gehören die Potenzreihenentwicklungen der Bahnelemente. In diesem Kapitel werden einige einfache Beispiele für Potenzreihenentwicklungen nach einer Variablen wie auch für Entwicklungen nach einem Parameter dargestellt und deren praktische Bedeutung besprochen.

Auf Grund der großen Bedeutung, die den *Verfahren des Typs C* heute zukommt, werden die theoretischen Grundlagen der numerischen Einschritt-Integrationsverfahren relativ ausführlich behandelt. Als Prototyp dieser Verfahren dient das Verfahren *Runge-Kutta*.

Ein kurzer Überblick über die außenballistischen Tafelwerke und ihre Handhabung schließt das Kapitel ab.

Bei der Wiedergabe der Lösungsverfahren für das Hauptproblem der Äußeren Ballistik wird keine Vollständigkeit angestrebt; aus jeder Klasse von Verfahren werden nur ein oder einige wenige charakteristische Vertreter vorgestellt. Die Auswahl erfolgt hierbei unter dem Gesichtspunkt, nur solche Methoden zu besprechen, die in dieser oder jener Hinsicht mit der numerischen Routineintegration auf dem Digitalrechner konkurrieren können. Daß eine nach diesem Auswahlprinzip getroffene Zusammenstellung von Verfahren nicht frei von subjektiven Wertungen ist, liegt auf der Hand.

Auf die mathematisch interessante allgemeine Integrationstheorie der ballistischen Bewegungsgleichungen kann an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Es sei hierzu auf die Originalarbeiten verwiesen.<sup>1)</sup>

## 5.2. Geradlinige Flugbahnen

Die Untersuchungen zur Integration der Bewegungsgleichungen sollen mit zwei einfachen Sonderfällen begonnen werden, bei denen die Flugbahnen Geraden sind: dem schwebefreien Schuß und dem vertikalen Schuß.

<sup>1)</sup> Einen guten Überblick über die Ergebnisse der allgemeinen Integrationstheorie gibt die Arbeit von *Leimanis* [27]; siehe auch *Molitz/Strobel* [23], S.203 bis 209.

## 5.2.1. Der schwerkrefreie Schuß in einer konstanten Atmosphäre

### 5.2.1.1. Vorbemerkungen

Bei der Auswertung von Versuchsschießen zur Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit und der Geschosßbewegung im Ziel darf man die durch die Schwerkraft hervorgerufene Krümmung der Flugbahn in erster Näherung vernachlässigen. Man kann sich dies leicht veranschaulichen, wenn man eine parabolische Flugbahn betrachtet, die waagrecht beginnt, und als globales Maß für die Krümmung des betrachteten Flugbahnabschnitts den Winkel  $\varepsilon$  zwischen der Abgangsrichtung und der Richtung zum Ziel einführt (Bild 5.1).

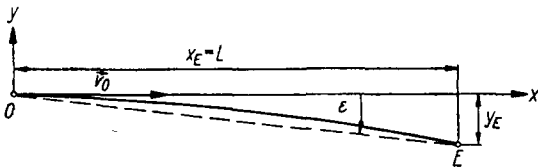


Bild 5.1  
Flugbahn eines horizontal abgefeuerten Geschosses (O - Abgangspunkt; E - Auftreffpunkt)

Im luftleeren Raum gilt für die Koordinaten des Punktes E:

$$y_E = -\frac{1}{2} g_0 t_E^2, \quad x_E = L = v_0 t_E.$$

Hieraus folgt

$$\tan \varepsilon = \frac{y_E}{x_E} = -\frac{g_0 L}{2 v_0^2}. \quad (5.1)$$

Der Winkel  $\varepsilon$  ist betragsmäßig klein, wenn ein kurzes Flugbahnstück mit hoher Geschwindigkeit durchflogen wird.

Ist die vorgenannte Voraussetzung erfüllt, so kann man die Krümmung des Flugbahnabschnitts durch die Schwerkraft vernachlässigen, in den ballistischen Bewegungsgleichungen also formal  $g_0 = 0$  setzen.

Da die Anwendung der Näherungsvoraussetzung  $g_0 = 0$  ohnehin auf kurze Flugbahnabschnitte beschränkt ist, darf man längs dieser Bahnabschnitte auch bei Abgangswinkeln  $\vartheta_0 \neq 0$  ( $\vartheta_0 \ll 1$ ) die meteorologischen Elemente der Atmosphäre als konstant ansehen.

Das Ziel des Abschnitts 5.2. besteht darin, für ein beliebiges (vorgegebenes) Luftwiderstandsgesetz sowie zwei spezielle Potenzansätze den Verlauf der Bahnelemente zu berechnen und die erhaltenen Formeln zur Reduktion von Geschwindigkeitsmessungen auf die Mündung der Waffe zu verwenden.

### 5.2.1.2. Die Bahnelemente bei beliebigem Widerstandsgesetz

Mit  $g \equiv 0$  gehen die natürlichen Bewegungsgleichungen (4.24) über in:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{1}{v}, & t(0) &= 0; \\ \frac{dx}{ds} &= \cos \vartheta, & x(0) &= 0; \\ \frac{dy}{ds} &= \sin \vartheta, & y(0) &= 0; \\ \frac{dv}{ds} &= -E, & v(0) &= v_0; \\ \frac{d\vartheta}{ds} &= 0, & \vartheta(0) &= \vartheta_0; \\ b' &= E v = C_0 H(y) \Phi(M); & M &= v/a. \end{aligned} \tag{5.2}$$

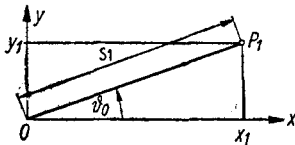
Aus der letzten Differentialgleichung folgt sofort

$$\vartheta(s) = \vartheta_0 = \text{const.}$$

Damit gehen die zweite und dritte Gleichung über in

$$x = s \cos \vartheta_0, \quad y = s \sin \vartheta_0 \tag{5.3}$$

(siehe Bild 5.2).



*Bild 5.2  
Zusammenhang zwischen den Bahnelementen  $x, y, s$   
beim schiefen Schuss*

In dem Ansatz für die Verzögerungsfunktion  $E$  wird nun  $y$  durch einen Mittelwert  $y = \bar{y}$  ersetzt:

$$H(\bar{y}) =: H_0 = \text{const}; \quad a(\bar{y}) =: a_0 = \text{const.}$$



In diesem Fall unterscheiden sich die Bahngeschwindigkeit  $v$  und die *Mach*-Zahl  $M$  nur um den konstanten Proportionalitätsfaktor  $a_0$ :  $v = a_0 M$ , und die erste und vierte Gleichung des Systems (5.2) können in der Form geschrieben werden

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{a_0 M}, \quad t(0) = 0; \quad (5.4)$$

$$\frac{dM}{ds} = - \frac{C_0 H_0}{a_0^2} \frac{\Phi(M)}{M}, \quad M(0) = \frac{v_0}{a_0}. \quad (5.5)$$

Trennung der Variablen in (5.5) und nachfolgende Integration liefert

$$s = - \frac{a_0^2}{C_0 H_0} \int_{M_0}^M \frac{M \, dM}{\Phi(M)}. \quad (5.6)$$

Division von (5.4) durch (5.5) ergibt

$$\frac{dt}{dM} = - \frac{a_0}{C_0 H_0} \frac{1}{\Phi(M)},$$

woraus durch Integration folgt

$$t = - \frac{a_0}{C_0 H_0} \int_{M_0}^M \frac{dM}{\Phi(M)}. \quad (5.7)$$

Es empfiehlt sich, die Integrale in (5.6) und (5.7) als neue Funktionen  $D^*(M)$ ,  $T^*(M)$  einzuführen. Man definiert<sup>1)</sup>:

$$D^*(M) := - \int_{M'}^M \frac{M \, dM}{\Phi(M)}, \quad T^*(M) := - \int_{M'}^M \frac{dM}{\Phi(M)}. \quad (5.8)$$

Die untere Grenze  $M = M'$  ist beliebig; man wählt für  $M'$  aus praktischen Erwägungen einen Zahlenwert, der größer als alle in den Anwendungen auftretenden *Mach*-Zahlen ist.

Die Integrale in (5.8) sind geschlossen auswertbar für Potenzgesetze des Typs  $\Phi(M) = A_n M^n$  (siehe die folgenden Abschnitte 5.2.1.3. und 5.2.1.4.).

<sup>1)</sup> Die Funktionen  $D^*(M)$  und  $T^*(M)$  stimmen – bei gleicher unterer und oberer Grenze – bis auf einen Zahlenfaktor mit den primären *Siacci*-Funktionen  $D(U)$ ,  $T(U)$  überein; siehe Übungsaufgabe 5.4.

Bezieht man sich auf das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943, so müssen die Funktionswerte von  $D^*(M)$  und  $T^*(M)$  in dem Hauptteil des in Frage kommenden *Mach*-Zahl-Bereichs durch numerische Quadraturen ermittelt werden. Die auf diesem Wege gewonnenen Tabellen besitzen dann jedoch (in gewissem Sinne) universellen Charakter. Mit (5.8) ergibt sich für den Geschößweg  $s$  die Darstellung

$$s = \frac{a_0^2}{C_0 H_0} \left[ - \int_{M'}^M \frac{M \, dM}{\Phi(M)} - \left( - \int_{M'}^{M_0} \frac{M \, dM}{\Phi(M)} \right) \right],$$

$$s = \frac{a_0^2}{C_0 H_0} [D^*(M) - D^*(M_0)]. \quad (5.9)$$

Nachdem  $s$  bekannt ist, folgen  $x$  und  $y$  aus (5.3). Entsprechend erhält man für die Flugzeit  $t$ :

$$t = \frac{a_0}{C_0 H_0} [T^*(M) - T^*(M_0)]. \quad (5.10)$$

Die Formeln (5.9) und (5.10) liefern eine Parameterdarstellung des Weg-Zeit-Verlaufs  $s = s(t)$ .

### 5.2.1.3. Die Bahnelemente bei linearem Widerstandsgesetz

Für den linearen Widerstandsansatz<sup>1)</sup>

$$\Phi(M) = A_1 M \quad (A_1 = \text{const})$$

sind die Integrationen (5.8) geschlossen ausführbar:

$$D^*(M) = - \int_{M'}^M \frac{dM}{A_1} = \frac{M' - M}{A_1},$$

$$T^*(M) = - \int_{M'}^M \frac{dM}{A_1 M} = \frac{1}{A_1} \ln \frac{M'}{M}.$$

<sup>1)</sup> Der allgemeine lineare Widerstandsansatz  $\Phi(M) = A_0 + A_1 M$ , die sogenannte *Chapelsche Gerade*, ist Gegenstand von Übungsaufgabe 5.1.

Die Formeln für den Geschößweg  $s$  (5.9) und die Flugzeit  $t$  (5.10) vereinfachen sich damit zu

$$s = \frac{a_0^2}{A_1 C_0 H_0} [(M' - M) - (M' - M_0)],$$

$$s = \frac{a_0}{A_1 C_0 H_0} (v_0 - v), \quad (5.11)$$

$$t = \frac{a_0}{A_1 C_0 H_0} \left[ \ln \frac{M'}{M} - \ln \frac{M'}{M_0} \right],$$

$$t = \frac{a_0}{A_1 C_0 H_0} \ln \frac{v_0}{v}. \quad (5.12)$$

Beachtet man, daß im vorliegenden Fall

$$E = \frac{C_0 H_0 \Phi(M)}{v} = \frac{A_1 C_0 H_0}{a_0} = E_0 = \text{const}$$

ist, kann man (5.11) und (5.12) in der Form schreiben

$$v = v_0 - E_0 s; \quad v = v_0 e^{-E_0 t}. \quad (5.13)$$

Die Geschwindigkeitsabnahme  $\Delta v := v_0 - v$  ist proportional zum zurückgelegten Weg  $s$ , während die Geschwindigkeit  $v$  als Funktion der Flugzeit  $t$  exponentiell abnimmt (siehe Bild 5.3).

Durch Gleichsetzen der beiden Beziehungen (5.13) für  $v$  erhält man den Weg-Zeit-Verlauf  $s = s(t)$ :

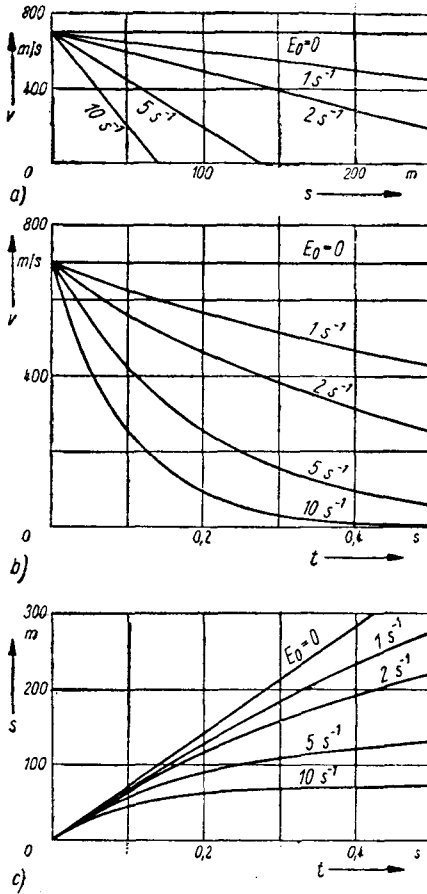
$$v_0 - E_0 s = v_0 e^{-E_0 t},$$

$$s = \frac{v_0}{E_0} (1 - e^{-E_0 t}). \quad (5.14)$$

Die maximale Schußentfernung  $s = s_{\max}$  beträgt

$$s_{\max} = v_0/E_0,$$

sie wird für  $t \rightarrow \infty$  erreicht. In der Entfernung  $s = s_{\max}$  ist die gesamte kinetische Energie des Geschosses durch die Luftreibung aufgezehrt (in Wärmeenergie umgewandelt) worden.



**Bild 5.3**  
 Bahnelemente beim schwerkfreien Schuß und linearem Luftwiderstandsgesetz  
 a – Bahngeschwindigkeit  $v$  als Funktion des Geschößweges  $s$ ; b – Bahngeschwindigkeit  $v$  als Funktion der Flugzeit  $t$ ; c – Geschößweg  $s$  als Funktion der Flugzeit  $t$  (Scharparameter:  $E_0 = 0, 1, 2, 5, 10 \text{ s}^{-1}$ )

#### 5.2 1.4. Die Bahnelemente bei quadratischem Widerstandsgesetz

Auch bei dem quadratischen Widerstandsansatz

$$\Phi(M) = A_2 M^2$$

sind die Funktionen  $D^*(M)$  und  $T^*(M)$  in geschlossener Form angegeb-

bar. Die Integration liefert:

$$D^*(M) = - \int_{M'}^M \frac{dM}{A_2 M} = \frac{1}{A_2} \ln \frac{M'}{M},$$

$$T^*(M) = - \int_{M'}^M \frac{dM}{A_2 M^2} = \frac{1}{A_2} \left( \frac{1}{M} - \frac{1}{M'} \right).$$

Mit der Abkürzung

$$c_2 := A_2 C_0 H_0 / a_0^2, \quad [c_2] = L^{-1}$$

erhalten die Formeln für  $s$  und  $t$  (5.9) bzw. (5.10) die Gestalt

$$s = \frac{1}{c_2} \ln \frac{v_0}{v}, \quad t = \frac{1}{c_2} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right) \quad (5.15)$$

bzw. nach der Bahngeschwindigkeit  $v$  aufgelöst

$$v = v_0 e^{-c_2 s}; \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + c_2 t. \quad (5.16)$$

Die zweite dieser Beziehungen kann auch in der Form geschrieben werden

$$v = \frac{v_0}{1 + c_2 v_0 t}. \quad (5.17)$$

*Die Bahngeschwindigkeit  $v$  nimmt als Funktion des Geschosswegs  $s$  exponentiell ab; der Zuwachs der reziproken Geschwindigkeiten  $\Delta(1/v) = (1/v) - (1/v_0)$  ist proportional zur Flugzeit  $t$ .*

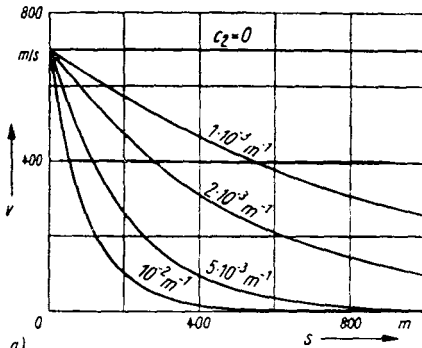
Eine endliche maximale Reichweite  $s = s_{\max}$  existiert im vorliegenden Fall nicht, da der Wert  $v = 0$  erst für  $s \rightarrow \infty$  angenommen wird.

Der Weg-Zeit-Verlauf ergibt sich durch Elimination von  $v$  aus den Gleichungen (5.16):

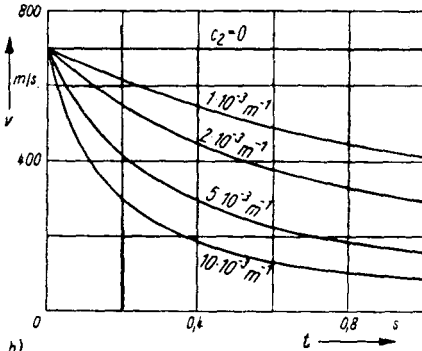
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} e^{c_2 s} = \frac{1}{v_0} + c_2 t,$$

$$s = \frac{1}{c_2} \ln (1 + c_2 v_0 t). \quad (5.18)$$

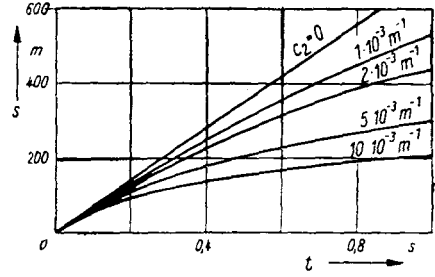
Der Verlauf der Bahnelemente ist in Bild 5.4 veranschaulicht.



a)



b)



c)

**Bild 5.4**

*Bahnelemente beim schwerkfreien Schuß und quadratischem Widerstandsgesetz*

*a - Bahngeschwindigkeit  $v$  als Funktion des Geschossweges  $s$ ; b - Bahngeschwindigkeit  $v$  als Funktion der Flugzeit  $t$ ; c - Geschossweg  $s$  als Funktion der Flugzeit  $t$  (Scharparameter:  $c_2 = 0; 0,001; 0,002; 0,005; 0,010 \text{ m}^{-1}$ )*

### 5.2.1.5. Reduktion von Bahngeschwindigkeitsmessungen auf die Mündung der Waffe

Messungen der Geschossgeschwindigkeit werden in der Praxis in der Regel in einer gewissen Entfernung von der Mündung der Waffe vorgenommen. Um aus diesen Meßwerten die in der Schußtafel angegebene Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  des Geschosses zu erhalten, wird unter Zugrundelegung eines speziellen Luftwiderstandsgesetzes der Geschwindigkeitsverlauf auf den Abgangspunkt  $O$  ( $s = s_0 = 0$ ) extrapoliert.

Beim Austritt aus der Mündung der Waffe hat das Geschöß die Geschwindigkeit  $v_d < v_{\max}$ . Die Geschwindigkeit der aus der Mündung der Waffe strömenden Pulvergase ist zunächst noch größer als  $v_d$ , das Geschöß wird also weiter beschleunigt. Von einer gewissen Entfernung  $s = s^*$  an überwiegt die Verzögerung durch den Luftwiderstand die

Beschleunigungskraft der Pulvergase, und die Geschößgeschwindigkeit nimmt monoton ab.

Die Nachwirkung der Pulvergase hat jedoch einen merklichen Einfluß bis zu einer gewissen Entfernung  $s = s_n > s^*$  (siehe Bild 5.5).

Die unter der Voraussetzung einer monotonen Geschwindigkeitsabnahme mit Methoden der Außenballistik aus Geschwindigkeitsmessungen  $v_1 = v(s_1)$ ,  $v_2 = v(s_2)$ , ... ermittelte Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  stellt somit eine fiktive Rechengröße dar, sie stimmt nur annähernd mit der Geschwindigkeit des Geschosses bei Austritt aus der Mündung  $v_d$  überein.

Die Aufgabe, aus Geschößgeschwindigkeitsmessungen in gewissen Entfernungen  $s = s_1, s_2, \dots$  auf die Geschößgeschwindigkeit an der Stelle  $s = s_0 = 0$  zu schließen, wird als *Reduktion der Geschößgeschwindigkeit auf die Mündung der Waffe* bezeichnet.

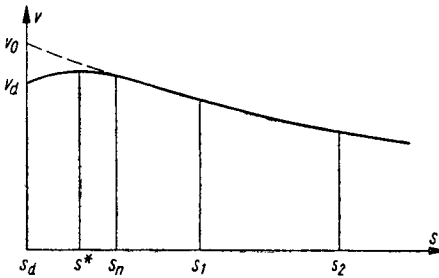


Bild 5.5  
Zur Definition der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$

Die Zahlenwerte, die sich für die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  ergeben, hängen davon ab, welches Luftwiderstandsgesetz bei der Extrapolation der Geschwindigkeitsmeßwerte auf die Entfernung  $s_d$  zugrunde gelegt worden ist. Das im folgenden wiedergegebene Zahlenbeispiel zeigt jedoch, daß die Abweichungen bei richtiger Anpassung der Luftwiderstandsgesetze klein sind.

a) *Reduktion nach dem linearen Widerstandsgesetz*

Aus (5.13) folgt für die Entfernungen  $s = s_1$  und  $s = s_2$ :

$$v_1 = v_0 - E_0 s_1, \quad v_2 = v_0 - E_0 s_2$$

und nach Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung:

$$v_2 - v_1 = -E_0 (s_2 - s_1), \quad E_0 = \frac{v_1 - v_2}{s_2 - s_1}. \quad (5.19)$$

Die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  kann damit nach der Formel berechnet werden

$$v_0 = v_1 + E_0 s_1 = v_1 + (v_1 - v_2) \frac{s_1}{s_2 - s_1},$$

$$v_0 = \frac{v_1 s_2 - v_2 s_1}{s_2 - s_1} = v_1 \frac{s_2}{s_2 - s_1} + v_2 \frac{s_1}{s_1 - s_2}. \quad (5.20)$$

Diese Beziehung ist bezüglich der Nummer der Meßstellen völlig symmetrisch. Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\mu_1 := \frac{s_1}{s_1 - s_2}, \quad \mu_2 := \frac{s_2}{s_2 - s_1}$$

kann man (5.20) in der Form schreiben

$$v_0 = v_1 \mu_2 + v_2 \mu_1. \quad (5.21)$$

b) *Reduktion nach dem quadratischen Widerstandsgesetz*

Setzt man die erste der Gleichungen (5.16) für die Entfernungen  $s = s_1$  und  $s = s_2$  an, so ergibt sich

$$v_1 = v_0 e^{-c_2 s_1}, \quad v_2 = v_0 e^{-c_2 s_2}$$

und nach Division der ersten durch die zweite Gleichung

$$\frac{v_1}{v_2} = e^{c_2(s_2 - s_1)}, \quad c_2 = \frac{\ln(v_1/v_2)}{s_2 - s_1}. \quad (5.22)$$

Für die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  erhält man damit die Formel

$$v_0 = v_1 e^{c_2 s_1} = v_1 \exp\left(\frac{s_1}{s_2 - s_1} \ln \frac{v_1}{v_2}\right),$$

$$v_0 = v_1 \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{s_1/(s_2 - s_1)}.$$

Diese Beziehung läßt sich wieder in einer bezüglich der Nummer der Meßstellen symmetrischen Form schreiben

$$v_0 = v_1^{\mu_2} v_2^{\mu_1}. \quad (5.23)$$



**Zahlenbeispiel:** In den Entfernungen  $s_1 = 10$  m und  $s_2 = 25$  m seien die Geschwindigkeit  $v_1 = 680$  m/s bzw.  $v_2 = 650$  m/s gemessen worden.

Mit  $\mu_1 = -2/3$ ,  $\mu_2 = 5/3$  erhält man für die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ :

a) nach (5.21):

$$v_0^{(1)} = \left( \frac{5}{3} \cdot 680 - \frac{2}{3} \cdot 650 \right) \text{ m/s} = \frac{2100}{3} \text{ m/s} = 700,0 \text{ m/s};$$

b) nach (5.23):

$$v_0^{(2)} = \frac{680^{5/3}}{650^{2/3}} \text{ m/s} = 700,8 \text{ m/s}.$$

Die Abweichung zwischen den beiden errechneten Geschwindigkeitswerten beträgt etwa  $1^0/_{00}$ . Ein derartiger Fehler liegt unterhalb der Meßgenauigkeit, so daß bei der Behandlung von praktischen Aufgaben der genannten Art sowohl das lineare wie auch das quadratische Luftwiderstandsgesetz angewandt werden können.

Geht man von dem in Abschnitt 5.2.1.2. abgeleiteten (für ein beliebiges Widerstandsgesetz gültigen) Formalsystem aus und legt das Luftwiderstandsgesetz 1943 zugrunde, so findet man  $v_0^{(43)} = 700,36$  m/s.

Die Übereinstimmung der drei berechneten  $v_0$ -Werte ist ausgezeichnet; die erreichte Genauigkeit ist größer, als bei der Lösung praktischer Aufgaben erforderlich.

## 5.2.2. Der vertikale Schuß in einer konstanten Atmosphäre

Die Flugbahn eines senkrecht nach oben geschossenen Körpers, der wieder zur Erde zurückkehrt, wird aus der Aufstiegsbahn (Anfangsgeschwindigkeit:  $v_0$ , Abgangswinkel:  $\vartheta_0 = \pi/2$ ) und der Abstiegsbahn (Anfangsgeschwindigkeit:  $v_0 = 0$ , Abgangswinkel:  $\vartheta_0 = -\pi/2$ ) zusammengesetzt.

Auf dem aufsteigenden Bahnabschnitt ( $v/v = \mathbf{i}_v$ ) wirkt die Schwerkraft verzögernd, auf dem absteigenden Bahnabschnitt ( $v/v = -\mathbf{i}_v$ ) beschleunigend. Der Luftwiderstand wirkt auf beiden Bahnteilen verzögernd. Da alle Kräfte (bis auf das Vorzeichen) die gleiche Richtung wie der Vektor der Anfangsgeschwindigkeit haben, ist die Flugbahn eine Gerade.<sup>1)</sup>

Setzt man voraus, daß die meteorologischen Elemente der Atmosphäre und die Fallbeschleunigung konstant sind, so können die Bahnelemente durch Quadraturen gewonnen werden.

<sup>1)</sup> Entsprechend den Voraussetzungen des klassischen Bahnmodells wird die Erdrotation vernachlässigt, andernfalls würde ein senkrecht nach oben geschossener Körper nicht längs der Aufstiegsbahn zur Erdoberfläche zurückkehren.

Für den senkrechten Schuß ( $\vartheta_0 = \pm\pi/2$ ) vereinfacht sich das System der natürlichen Bewegungsgleichungen (4.24) zu:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{1}{v}, & t(0) &= 0, \\ \frac{dv}{ds} &= -E \mp \frac{g_0}{v}, & v(0) &= 0, \\ y &= \pm s, & x &\equiv 0, & \vartheta &= \vartheta_0 = \pm\pi/2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Sind zwei Vorzeichen angegeben, so gilt das obere für den Schuß nach oben ( $v/v = \dot{y}$ ), das untere für den Schuß nach unten ( $v/v = -\dot{y}$ ). Unter der Voraussetzung konstanter meteorologischer Elemente wird

$$v = a_0 M, \quad E = \frac{C_0 H_0 \Phi(M)}{a_0 M},$$

und man kann (5.24) in der Form schreiben

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{1}{a_0 M}, & t(0) &= 0; \\ \frac{dM}{ds} &= -\frac{C_0 H_0 \Phi(M) \pm g_0}{a_0^2 M}, & M(0) &= \frac{v_0}{a_0}; \\ y &= \pm s, & x &\equiv 0, & \vartheta &= \vartheta_0 = \pm\pi/2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

In der zweiten Gleichung können die Variablen  $M$ ,  $s$  getrennt werden:

$$ds = -a_0^2 \frac{M dM}{C_0 H_0 \Phi(M) \pm g_0}$$

bzw. integriert

$$s = -a_0^2 \int_{M_0}^M \frac{M dM}{C_0 H_0 \Phi(M) \pm g_0}. \quad (5.26)$$

Entsprechend ergibt sich für die Flugzeit  $t$ :

$$\frac{dt}{dM} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dM} = -\frac{a_0}{C_0 H_0 \Phi(M) \pm g_0},$$

woraus durch Integration folgt

$$t = -a_0 \int_{M_0}^M \frac{dM}{C_0 H_0 \Phi(M) \pm g_0}. \quad (5.27)$$

Setzt man zur Abkürzung  $C^* := C_0 H_0/g_0$  und führt die vier Funktionen ein:

$$\begin{aligned}
 P_{\pm}(M, C^*) &:= - \int_{M'}^M \frac{M \, dM}{C^* \Phi(M) \pm 1}, \\
 Q_{\pm}(M, C^*) &:= - \int_{M'}^M \frac{dM}{C^* \Phi(M) \pm 1},
 \end{aligned}
 \tag{5.28}$$

so lassen sich die Bahnelemente  $s, t$  in der Form darstellen

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{a_0^2}{g_0} [P_{\pm}(M, C^*) - P_{\pm}(M_0, C^*)], \\
 t &= \frac{a_0}{g_0} [Q_{\pm}(M, C^*) - Q_{\pm}(M_0, C^*)].
 \end{aligned}
 \tag{5.29}$$

Die Funktionen  $P_{\pm}, Q_{\pm}$  können als Funktion ihrer Argumente  $M$  und  $C^*$  vertafelt werden, wobei die Integrale in (5.28) im allgemeinen numerisch auszuwerten sind.<sup>1)</sup>

Bei dem linearen Widerstandsansatz  $\Phi(M) = A_1 M$  und dem quadratischen Ansatz  $\Phi(M) = A_2 M^2$  sind die Integrationen in (5.28) geschlossen ausführbar.

Die Ermittlung der Bahnelemente für diese Spezialfälle ist Gegenstand von Übungsaufgabe 5.6.; siehe auch die Ausführungen in [28], §87 und [29], §§137 und 138.

Auch bei variablen meteorologischen Elementen und spezieller Wahl des Widerstandsgesetzes existieren Fälle, in denen das System (5.24) auf Quadraturen zurückgeführt werden kann; siehe [23], S.175ff und [29], §139.

### 5.3. Potenzansätze für den Luftwiderstand bei konstanter Atmosphäre

In diesem Abschnitt werden unter vereinfachenden Annahmen die Bahnelemente von Flugbahnen im Schwerfeld der Erde ( $g_0 \neq 0$ ) bei beliebigem Abgangswinkel  $\vartheta_0$  berechnet.

<sup>1)</sup> Man beachte, daß die Integranden auf dem absteigenden Ast für  $C^* \Phi(M) = 1$  singular werden!

Die einschränkenden Annahmen bestehen darin, daß die meteorologischen Elemente der Atmosphäre und die Fallbeschleunigung als konstant vorausgesetzt werden sowie für die Luftwiderstandsfunktion ein Potenzansatz  $\Phi(M) = A^n M^n$  gewählt wird.

### 5.3.1. Die Bahnelemente bei linearem Widerstandsgesetz

Bei konstanten meteorologischen Elementen, konstanter Fallbeschleunigung und dem linearen Widerstandsansatz  $\Phi(M) = A_1 M$  sind die Flugbahnelemente formelmäßig angebbar. Dieser Spezialfall der Bewegung eines Geschosses im luftgefüllten Raum ist deshalb gut geeignet, die Methodik der Behandlung des klassischen Bahnmodells zu erläutern.

Die Formeln für die Bahnelemente, die auf dem linearen Luftwiderstandsgesetz beruhen, finden bei der Auswertung von Schießversuchen und für überschlägige Betrachtungen Anwendung. Für die Berechnung von Schußtafeln sind sie auf Grund der sehr einschneidenden Voraussetzungen nicht brauchbar.

#### 5.3.1.1. Die Integration der Bewegungsgleichungen im $u$ -System

Unter den genannten Voraussetzungen gilt

$$M = \frac{v}{a_0}, \quad E = \frac{C_0 H_0 \Phi(M)}{v} = \frac{A_1 C_0 H_0}{a_0} = E_0 = \text{const.}$$

Die Bewegungsgleichungen des  $U$ -Systems (4.30) gehen mit  $\kappa = 1$  und  $E = E_0$  über in:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{du} &= -\frac{1}{E_0 u}, & t(u_0) &= 0; \\ \frac{dx}{du} &= -\frac{1}{E_0}, & x(u_0) &= 0; \\ \frac{dy}{du} &= -\frac{p}{E_0}, & y(u_0) &= 0; \\ \frac{dp}{du} &= \frac{g_0}{E_0 u^2}, & p(u_0) &= p_0 = \tan \vartheta_0; \\ v &= u \sqrt{1 + p^2}. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Die Lösungen der ersten, zweiten und vierten Gleichung können sofort hingeschrieben werden:

$$t = -\frac{1}{E_0} (\ln u - \ln u_0), \quad x = -\frac{1}{E_0} (u - u_0),$$

$$p = p_0 - \frac{g_0}{E_0} \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u_0} \right). \quad (5.31)$$

Einsetzen von (5.31) in die dritte Gleichung von (5.30) und nachfolgende Integration liefert

$$y = -\frac{1}{E_0} \int_{u_0}^u \left[ p_0 - \frac{g_0}{E_0} \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u_0} \right) \right] du$$

$$= -\frac{1}{E_0} \left( p_0 + \frac{g_0}{E_0 u_0} \right) (u - u_0) + \frac{g_0}{E_0^2} (\ln u - \ln u_0).$$

Durch einfache Umformungen folgen hieraus die *Bahnelemente als Funktion von x*:

$$u = u_0 - E_0 x; \quad (5.32)$$

$$t = \frac{1}{E_0} \ln \left( \frac{u_0}{u_0 - E_0 x} \right); \quad (5.33)$$

$$p = p_0 + \frac{g_0}{E_0 u_0} - \frac{g_0}{E_0} \cdot \frac{1}{u_0 - E_0 x}; \quad (5.34)$$

$$y = \left( p_0 + \frac{g_0}{E_0 u_0} \right) x - \frac{g_0}{E_0^2} \ln \left( \frac{u_0}{u_0 - E_0 x} \right). \quad (5.35)$$

Die *Bahnelemente* können ebenfalls leicht als *Funktion der Flugzeit t* dargestellt werden:

$$x = \frac{u_0}{E_0} (1 - e^{-E_0 t}), \quad (5.36)$$

$$y = -\frac{1}{E_0} \left( w_0 + \frac{g_0}{E_0} \right) (e^{-E_0 t} - 1) - \frac{g_0}{E_0} t, \quad (5.37)$$

$$u = u_0 e^{-E_0 t}, \quad (5.38)$$

$$p = p_0 - \frac{g_0}{E_0 u_0} (e^{-E_0 t} - 1), \quad (5.39)$$

$$w = w_0 e^{-E_0 t} - \frac{g_0}{E_0} (1 - e^{-E_0 t}). \quad (5.40)$$

### 5.3.1.2. Einige allgemeine Flugbahneigenschaften

Aus den Formeln für die Bahnelemente folgt für  $t \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} y &\rightarrow -\infty, & x &\rightarrow x_{gr} = u_0/E_0, \\ u &\rightarrow 0, & w &\rightarrow w_{gr} = -g_0/E_0, \\ p &\rightarrow -\infty, & \vartheta &\rightarrow \vartheta_{gr} = -\pi/2. \end{aligned}$$

Die Flugbahn hat somit in der Entfernung  $x = x_{gr}$  eine vertikale Asymptote;  $v_{gr} = |w_{gr}| = g_0/E_0$  ist die sogenannte *Fallschirmgeschwindigkeit*<sup>1)</sup>, mit der sich das Geschöß für  $t \rightarrow \infty$  in Richtung der negativen  $y$ -Achse bewegt.

Die Horizontalkomponente  $u$  der Bahngeschwindigkeit nimmt exponentiell mit der Zeit  $t$  ab. Als Funktion der Abszisse  $x$  dargestellt, sind sowohl die Horizontal- wie auch die Vertikalkomponente der Bahngeschwindigkeit  $v$  lineare Funktionen:  $u = u_0 + u_1x$ ,  $w = w_0 + w_1x$ .

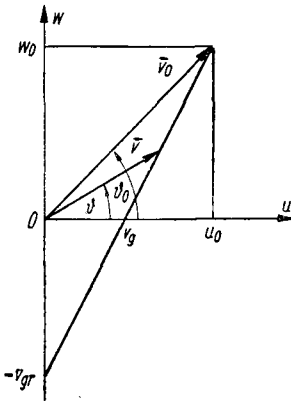


Bild 5.6  
Flugbahn-Hodograph beim linearen Widerstandsgesetz und bei konstanter Atmosphäre

Für  $u$  ist dies unmittelbar aus (5.32) ersichtlich; für  $w$  folgt diese Eigenschaft aus  $w = up$ :

$$\begin{aligned} w &= (u_0 - E_0 x) \left[ p_0 + \frac{g_0}{E_0 u_0} - \frac{g_0}{E_0} \cdot \frac{1}{u_0 - E_0 x} \right] \\ &= u_0 p_0 - E_0 x \left( p_0 + \frac{g_0}{E_0 u_0} \right); \\ w &= w_0 - \frac{E_0 w_0 + g_0}{u_0} x. \end{aligned} \tag{5.41}$$

<sup>1)</sup> Siehe Abschnitt 4.3.1., insbesondere Seite 199.

Die Kurve  $w = w(u)$ , der sogenannte *Hodograph der Flugbahn*, ist in der Geschwindigkeitsebene  $\{u, w\}$  eine Gerade:

$$w = u p = u \left[ p_0 - \frac{g_0}{E_0} \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u_0} \right) \right],$$

$$w = \left( p_0 + \frac{g_0}{E_0 u_0} \right) u - \frac{g_0}{E_0}. \quad (5.42)$$

Der Verlauf des Hodographen ist in Bild 5.6 veranschaulicht.

### 5.3.1.3. Die Bahnelemente im Gipfelpunkt

Die Gipfelabszisse  $x = x_g$  folgt aus (5.41) für  $w = w_g = 0$ :

$$x_g = \frac{u_0 w_0}{E_0 w_0 + g_0}. \quad (5.43)$$

Setzt man dies in (5.32) bis (5.35) ein, so erhält man für die anderen Bahnelemente im Flugbahngipfel

$$v_g = \frac{g_0 u_0}{E_0 w_0 + g_0}; \quad (5.44)$$

$$y_g = \frac{w_0}{E_0} - \frac{g_0}{E_0^2} \ln \left( 1 + \frac{E_0 w_0}{g_0} \right); \quad (5.45)$$

$$t_g = \frac{1}{E_0} \ln \left( 1 + \frac{E_0 w_0}{g_0} \right). \quad (5.46)$$

Für den Schuß senkrecht nach oben ( $u_0 = 0$ ,  $w_0 = v_0$ ) spezialisieren sich diese Gleichungen zu

$$v_g = 0, \quad \vartheta \equiv \vartheta_0 = +\pi/2;$$

$$y_g = \frac{v_0}{E_0} - \frac{g_0}{E_0^2} \ln \left( 1 + \frac{E_0 v_0}{g_0} \right), \quad (5.47)$$

$$t_g = \frac{1}{E_0} \ln \left( 1 + \frac{E_0 v_0}{g_0} \right).$$

#### 5.3.1.4. Die Bahnelemente im Auftreffpunkt

Die Horizontalschußweite  $x = x_e$  folgt aus der Bedingungsgleichung  $y = 0$ ,

$$\frac{E_0 w_0 + g_0}{E_0 u_0} x_e - \frac{g_0}{E_0^2} \ln \left( \frac{u_0}{u_0 - E_0 x_e} \right) = 0. \quad (5.48)$$

Diese transzendente Gleichung muß numerisch nach  $x_e$  aufgelöst werden.

Wenn  $x_e$  bekannt, sind auch die anderen Bahnelemente im Auftreffpunkt  $t_e, v_e, \vartheta_e$  berechenbar.

Für die Gesamtflugzeit  $t_e$  gilt nach (5.33).

$$t_e = \frac{1}{E_0} \ln \left( \frac{u_0}{u_0 - E_0 x_e} \right).$$

Eliminiert man den natürlichen Logarithmus mit Hilfe der Beziehung (5.48), so kann man hierfür schreiben

$$t_e = \frac{E_0 w_0 + g_0}{g_0 u_0} x_e. \quad (5.49)$$

Durch Vergleich von (5.43), (5.44) und (5.49) findet man

$$v_g = \frac{x_e}{t_e}, \quad x_g = \frac{w_0}{g_0} v_g = \frac{w_0}{g_0} \frac{x_e}{t_e}. \quad (5.50)$$

Diese von der parabolischen Theorie her bekannten Beziehungen gelten somit auch bei Annahme eines linearen Widerstandsgesetzes exakt.

Das sogenannte „Angelrutenschwenken“ der Flugbahn ist ebenfalls zulässig.<sup>1)</sup>

#### 5.3.1.5. Der Fehler der Approximation der Flugbahn durch eine Gerade

In Abschnitt 5.2.1.3. war die Flugbahn – unter der Voraussetzung eines linearen Widerstandsgesetzes und konstanter Atmosphäre – durch eine Gerade ersetzt worden. An Hand der im Abschnitt 5.3.1.1. für die Bahnelemente abgeleiteten Formeln soll jetzt der Höhenfehler berechnet werden, der durch die Vernachlässigung der Flugbahnkrümmung

<sup>1)</sup> Hinsichtlich des Beweises siehe Abschnitt 5.4.10.1.



infolge des Schwerkräfteinflusses hervorgerufen wird. Der Einfachheit halber wird ein horizontaler Abschub ( $\vartheta_0 = 0$ ) angenommen. Mit  $\vartheta_0 = 0$  geht die Formel für die Flugbahnordinate (5.35) über in

$$y = \frac{g_0}{E_0 v_0} x - \frac{g_0}{E_0^2} \ln \left( \frac{v_0}{v_0 - E_0 x} \right).$$

Bei der Behandlung des schwebefreien Schusses war unter der Voraussetzung eines linearen Widerstandsansatzes für den Zusammenhang zwischen Bahngeschwindigkeit  $v$  und Geschossweg  $s$  gefunden worden (5.13):

$$v = v_0 - E_0 s.$$

Setzt man näherungsweise  $x \approx s$ , so folgt durch Zusammenfassen der letzten beiden Gleichungen

$$y \approx \frac{g_0}{E_0^2} \left[ \frac{v_0 - v}{v_0} - \ln \left( \frac{v_0}{v} \right) \right]$$

bzw. mit  $v = v_0 - \Delta v$ :

$$y \approx \frac{g_0}{E_0^2} \left[ \frac{\Delta v}{v_0} + \ln \left( 1 - \frac{\Delta v}{v_0} \right) \right].$$

Ist die relative Geschwindigkeitsabnahme  $-\Delta v/v_0$  längs des betrachteten Bahnabschnitts betragsmäßig klein, so kann man den natürlichen Logarithmus durch die ersten beiden Glieder der entsprechenden Reihenentwicklung ersetzen:

$$y \approx -\frac{g_0}{2 E_0^2} \left( \frac{\Delta v}{v_0} \right)^2, \quad E_0 = \frac{v_1 - v_2}{s_2 - s_1}. \quad (5.51)$$

*Zahlenbeispiel:* Bei dem in Abschnitt 5.2.1.5. behandelten Beispiel waren gegeben:

$$v_0 = 700 \text{ m/s}; \quad v_{10} = 680 \text{ m/s}; \quad v_{25} = 650 \text{ m/s}.$$

Setzt man diese Zahlenwerte in (5.51) ein, so ergibt sich  $E_0 = 2 \text{ s}^{-1}$ , und für die Fallstrecke  $y_{25}$  in 25 m Entfernung:

$$|y_{25}| = \frac{9,81}{8 \cdot 14^2} \text{ m} = 6,27 \text{ mm}.$$

Eine Fallstrecke dieser Größe ist bei der Auswertung von  $v_0$ -Messungen als vernachlässigbar klein anzusehen, nicht jedoch bei der Berechnung von Visieren oder dem Anschub von Waffen.

### 5.3.2. Die Flugbahnelemente bei quadratischem Widerstandsgesetz und konstanter Atmosphäre

#### 5.3.2.1. Voraussetzungen

Bei kleinen Geschößgeschwindigkeiten ( $v \leq 0,7 \cdot a$ ) ist die Verzögerung des Geschosses durch den Luftwiderstand in guter Näherung proportional zu  $M^2$ :

$$\Phi(M) = A_2 M^2 \quad (A_2 = \text{const}).$$

Da allgemein  $\Phi(M) = M^2 c_w(M)$  gilt, ist in dem genannten Geschwindigkeitsbereich  $c_w(M) \equiv A_2 = \text{const}$ .

Liegt bereits die Anfangsgeschwindigkeit eines Geschosses unterhalb der lokalen Schallgeschwindigkeit, so durchquert das Geschöß einen relativ geringen Höhenbereich. Man wird deshalb keinen sehr großen Fehler begehen, wenn man längs der Flugbahn die meteorologischen Elemente der Atmosphäre und die Fallbeschleunigung  $g$  durch konstante Mittelwerte ersetzt.

Unter den genannten Voraussetzungen ist die Integration der Bewegungsgleichungen auf Quadraturen zurückführbar.

Die Verzögerungsfunktion  $E$  nimmt im vorliegenden Fall die Gestalt an

$$E = \frac{b}{v} = \frac{C_0 H_0 \Phi(M)}{v} = \frac{A_2 C_0 H_0}{a_0^2} v,$$

$$E = c_2 v, \quad c_2 := A_2 C_0 H_0 / a_0^2. \quad (5.52)$$

Wie man leicht nachprüft, kann der Ausdruck für  $c_2$  umgeformt werden in

$$c_2 = \frac{\rho_0 A_2}{2 Q}, \quad [c_2] = L^{-1}. \quad (5.53)$$

Der Parameter  $c_2$  übernimmt im vorliegenden Fall die Rolle des Anpassungsfaktors der numerischen Näherungslösung an die experimentellen Bahnelemente; man bezeichnet ihn deshalb auch gelegentlich als *modifizierten Ballistischen Koeffizienten*.

### 5.3.2.2. Die Bewegungsgleichungen im $p$ -System

Mit  $E = c_2 v$ ,  $g = g_0$  nimmt das  $p$ -System (4.26) die Gestalt an:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dp} &= -\frac{u}{g_0}, & t(p_0) &= 0; \\ \frac{dx}{dp} &= -\frac{u^2}{g_0}, & x(p_0) &= 0; \\ \frac{dy}{dp} &= -\frac{u^2 p}{g_0}, & y(p_0) &= 0; \\ \frac{du}{dp} &= \frac{c_2 u^3 \sqrt{1+p^2}}{g_0}, & u(p_0) &= u_0. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Mit den Substitutionen

$$x =: x^\circ/c_2, \quad y =: y^\circ/c_2, \quad t =: t^\circ/\sqrt{g_0 c_2}, \quad u =: u^\circ u_0 \tag{5.55}$$

und  $k := c_2 u_0^2/g_0$  geht (5.54) in ein Anfangswertproblem zwischen den dimensionslosen Variablen  $\{p|t^\circ, x^\circ, y^\circ, u^\circ\}$  über:

$$\frac{dt^\circ}{dp} = -\sqrt{k} u^\circ, \quad t^\circ(p_0) = 0; \tag{5.56}$$

$$\frac{dx^\circ}{dp} = -k u^{\circ 2}, \quad x^\circ(p_0) = 0; \tag{5.57}$$

$$\frac{dy^\circ}{dp} = -k u^{\circ 2} p, \quad y^\circ(p_0) = 0; \tag{5.58}$$

$$\frac{du^\circ}{dp} = k u^{\circ 3} \sqrt{1+p^2}, \quad u^\circ(p_0) = 1. \tag{5.59}$$

Da in diesem Anfangswertproblem als Parameter nur  $k$  und  $p_0$  auftreten, hängt auch dessen Lösung allein von diesen beiden Parametern ab. Die Transformation (5.55) verringert die Anzahl der Flugbahnparameter von *drei* ( $c, v_0, \vartheta_0$ ) auf *zwei* ( $k, p_0$ ).

Die Lösung des Anfangswertproblems (5.56) bis (5.59) kann somit symbolisch geschrieben werden

$$\begin{aligned} t^\circ &= \varphi_{t^\circ}(p|k, p_0), & u^\circ &= \varphi_{u^\circ}(p|k, p_0); \\ x^\circ &= \varphi_{x^\circ}(p|k, p_0), & y^\circ &= \varphi_{y^\circ}(p|k, p_0). \end{aligned}$$

Die dimensionslosen Bahnelemente im Auftreff- und Gipfelpunkt ( $x_e^\circ, t_e^\circ, u_e^\circ, p_e^\circ$  bzw.  $x_g^\circ, y_g^\circ, t_g^\circ, u_g^\circ$ ) lassen sich als Funktion von  $k$  und  $p_0$  vertafeln.

Die Bedingungsgleichung für den Auftreffpunkt lautet  $y = 0$ ,

$$\varphi_{y^\circ}(p_e|k, p_0) = 0.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach  $p_e$  ergibt sich die Neigung im Auftreffpunkt  $p_e$  als Funktion der beiden Parameter  $k, p_0$ , symbolisch:  $p_e = f(k, p_0)$ . Setzt man dies in die Beziehung für  $x^\circ$  ein, so ergibt sich die dimensionslose Horizontalschußweite  $x_e^\circ$ ,

$$x_e^\circ = \varphi_{x^\circ}(p_e|k, p_0) = \varphi_{x^\circ}[f(k, p_0)|k, p_0] = x_e^\circ(k, p_0).$$

Entsprechend kann man die Abhängigkeit der anderen Elemente des Gipfel- und Auftreffpunkts von  $k$  und  $p_0$  zeigen.

Es ist nicht zwingend, als Tafeleingänge die Parameter  $p_0$  und  $k$  zu verwenden. So benutzen die in Deutschland gebräuchlichen Tabellen von *Otto/Lardillon* als Tafeleingänge die Parameter  $\vartheta_0$  und  $2x_e^\circ = 2c_2 x_e$ . Das ist zulässig, da diese Größen eindeutige Funktionen von  $k$  und  $p_0$  sind.

Die Tabellen von *Otto/Lardillon* enthalten die Funktionen

$$\frac{c_2 v_0^2}{g_0} = \frac{c_2 u_0^2}{g_0} \cdot \frac{1}{\cos^2 \vartheta_0} = k(1 + p_0^2),$$

$$\frac{v_0^2}{2g_0 x_e} = \frac{c_2 v_0^2}{2g_0} \cdot \frac{1}{c_2 x_e} = \frac{k(1 + p_0^2)}{2x_e^\circ(k, p_0)},$$

$$|\vartheta_e| = \arctan |p_e| = \arctan f(k, p_0),$$

$$\frac{v_e}{v_0} = u_e^\circ \cdot \frac{\cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_e} = u_e^\circ \sqrt{\frac{1 + f(k, p_0)}{1 + p_0^2}},$$

$$t_e \sqrt{\frac{g_0}{x_e}} = \frac{t_e \sqrt{c_2 g_0}}{\sqrt{c_2 x_e}} = \frac{t_e^\circ(k, p_0)}{\sqrt{x_e^\circ(k, p_0)}},$$

$$\frac{y_g}{x_e} = \frac{c_2 y_g}{c_2 x_e} = \frac{y_g^\circ(k, p_0)}{x_e^\circ(k, p_0)}.$$

Ein Auszug aus den Tabellen von *Otto/Lardillon* ist im Anhang, Tafel IV, wiedergegeben.

Die Gipfelabszisse  $x_g$ , die Bahngeschwindigkeit im Flugbahngipfel  $v_g$  sowie die Flugzeit bis zum Gipfel  $t_g$  sind in den Tabellen von *Otto/Lardillon* nicht enthalten. Man kann sich die fehlenden Bahnelemente mit einer für die Praxis meist ausreichenden Genauigkeit durch eine Zusatzrechnung nach dem Verfahren *Piton-Bressant/Hélie* beschaffen.<sup>1)</sup> Auch die Anwendung der in Abschnitt 4.3.5. angegebenen Näherungsformeln ist möglich.

Ein Zahlenbeispiel für die Anwendung der Tabellen von *Otto/Lardillon* wird in Abschnitt 5.3.2.5. besprochen.

### 5.3.2.3. Die Integration der Bewegungsgleichungen

Nachdem in dem vorangegangenen Abschnitt gezeigt worden ist, von welchen Parametern die Lösung des Anfangswertproblems für die Flugbahn abhängt, soll nun die Integration der Bewegungsgleichungen selbst vorgenommen werden.

Trennung der Variablen in (5.59) und nachfolgende Integration vom Abgangspunkt  $O$  bis zu einem laufenden Flugbahnpunkt  $P$  ergibt

$$\begin{aligned} \frac{du^\circ}{u^{\circ 3}} &= k \sqrt{1 + p^2} dp, \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{u^{\circ 2}} - 1 \right) &= k \int_{p_0}^p \sqrt{1 + p^2} dp. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Das Integral auf der rechten Seite ist geschlossen auswertbar; es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^p \sqrt{1 + p^2} dp &= \frac{1}{2} (p \sqrt{1 + p^2} + \text{Arsh } p) \\ &= \frac{1}{2} [p \sqrt{1 + p^2} + \ln (p + \sqrt{1 + p^2})] \end{aligned} \quad (5.61)$$

bzw. mit  $p = \tan \vartheta$ :

$$\int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} + \ln \left( \frac{1 + \sin \vartheta}{\cos \vartheta} \right) \right]. \quad (5.61 a)$$

<sup>1)</sup> Zum Verfahren von *Piton-Bressant/Hélie* siehe Abschnitt 5.5.4.

Zur Vereinfachung der Formeln für die Bahnelemente werden die Integrale (5.61) bzw. (5.61 a) als neue Funktionen  $\eta(p)$  bzw.  $\xi(\vartheta)$  eingeführt:

$$\eta(p) := \int_0^p \sqrt{1+p^2} dp; \quad \xi(\vartheta) := \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta}, \quad (5.62)$$

wobei  $\eta(\tan \vartheta) \equiv \xi(\vartheta)$  für alle  $\vartheta$  gilt.

Für  $\xi(\vartheta)$  sind ausführliche Tabellen vorhanden.<sup>1)</sup> Der Verlauf der Funktion  $\xi(\vartheta)$  ist in Bild 5.7 dargestellt.

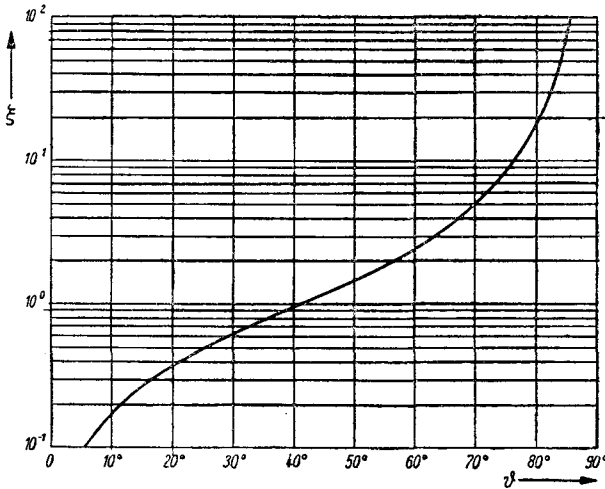


Bild 5.7 Verlauf der Funktion  $\xi(\vartheta)$  (halblogarithmische Darstellung)

Mit (5.62) geht (5.60) über in

$$\frac{1}{u^{0.2}} = 1 - 2k [\eta(p) - \eta(p_0)] = 2k \left[ \frac{1}{2k} + \eta(p_0) - \eta(p) \right].$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\eta(p_A) := \frac{1}{2k} + \eta(p_0), \quad (5.63)$$

<sup>1)</sup> Siehe etwa die siebenstellige Tabelle in: *Cranz* [22], Bd.4, 2. Aufl., Leipzig/Berlin 1918, Tabelle Nr.10b.

so lautet die Formel für die dimensionslose Horizontalgeschwindigkeit  $u^\circ$ :

$$u^{\circ 2} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{\eta(p_A) - \eta(p)}. \quad (5.64)$$

Nachdem  $u^\circ$  bekannt ist, sind die Gleichungen (5.56) bis (5.58) durch Quadraturen lösbar:

$$\begin{aligned} t^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_p^{p_0} \frac{dp}{\sqrt{\eta(p_A) - \eta(p)}}, & x^\circ &= \frac{1}{2} \int_p^{p_0} \frac{dp}{\eta(p_A) - \eta(p)}, \\ y^\circ &= \frac{1}{2} \int_p^{p_0} \frac{p dp}{\eta(p_A) - \eta(p)}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Die Auswertung dieser Integrale ist mit Hilfe eines numerischen Quadraturverfahrens rasch möglich.

Für die dimensionslose Bahngeschwindigkeit  $v^\circ = v/v_0$  folgt aus (5.64):

$$\begin{aligned} v^{\circ 2} &= \frac{v^2}{v_0^2} = \frac{u^2}{u_0^2} \cdot \frac{\cos^2 \vartheta_0}{\cos^2 \vartheta} = u^{\circ 2} \frac{1 + p^2}{1 + p_0^2}, \\ v^{\circ 2} &= \frac{1}{2k(1 + p_0^2)} \cdot \frac{1 + p^2}{\eta(p_A) - \eta(p)}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

#### \* 5.3.2.4. Die Flugbahnasymptoten

Die Flugbahnkurve hat (bei konstanter Atmosphäre, konstanter Fallbeschleunigung und quadratischem Widerstandsgesetz) zwei Asymptoten, die mit der Abszisse die Winkel  $\vartheta = \vartheta_A$  und  $\vartheta = -\pi/2$  bilden.

Den Nachweis dieser bemerkenswerten Flugbahneigenschaft erbringt man mit Hilfe der Beziehung zwischen der Bogenlänge  $s$  der Bahn und der Horizontalkomponente  $u$  der Bahngeschwindigkeit, die sich rasch aus der dritten Gleichung des  $t$ -Systems (4.9),

$$\dot{u} = -E u, \quad (5.67)$$

herleiten läßt. Mit  $E = c_2 v$ ,  $u = u^\circ u_0$ ,  $v = ds/dt$  geht (5.67) über in

$$\dot{u} = -c_2 v u, \quad \frac{du^\circ}{u^\circ} = -c_2 ds.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$u^\circ = e^{-c_2 s}, \quad s = -\frac{\ln u^\circ}{c_2}. \quad (5.68)$$

Dem Ursprung  $O$  des  $x^\circ, y^\circ$ -Systems entspricht die Bogenlänge  $s = s_0 = 0$ .

Die Horizontalkomponente der Bahngeschwindigkeit  $u = u(s)$  nimmt mit wachsendem Geschößweg  $s$  exponentiell ab.

Für  $s \rightarrow +\infty$  geht  $u^\circ \rightarrow 0$ ; man erhält die vertikale Asymptote, die bei allen Flugbahnen des klassischen Bahnmodells vorhanden ist.

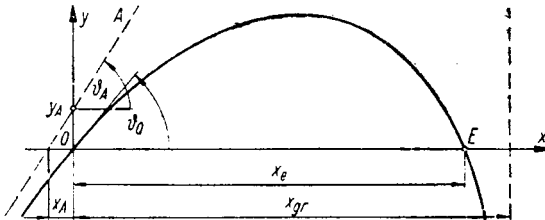


Bild 5.8  
Flugbahnasymptoten  
beim quadratischen  
Widerstandsgesetz und  
konstanter Atmosphäre

Denkt man sich die Flugbahnkurve nach negativen Werten der Bogenlänge  $s$  zu fortgesetzt, so strebt für  $s \rightarrow -\infty$  die Horizontalgeschwindigkeit  $u \rightarrow +\infty$ . Wie man (5.64) entnimmt, ist  $u^\circ \rightarrow \infty$  gleichbedeutend mit  $\eta(p) \rightarrow \eta(p_A)$  oder  $\vartheta \rightarrow \vartheta_A$ . Die Flugbahn hat also für  $s \rightarrow -\infty$  eine weitere Asymptote, die die  $x$ -Achse unter dem Winkel  $\vartheta = \vartheta_A$  schneidet. Damit ist zugleich die anschauliche Bedeutung der Hilfsgröße  $p_A = \tan \vartheta_A$  gezeigt.

Die Schnittpunkte der Asymptoten mit den Koordinatenachsen sind formelmäßig angebar; siehe Übungsaufgabe 5.9.

Der Verlauf der Flugbahnasymptoten ist in Bild 5.8 veranschaulicht.

### 5.3.2.5. Die Ermittlung des globalen Formkoeffizienten<sup>1)</sup>

In dem Formelsatz für das quadratische Widerstandsgesetz spielt  $c_2$  (5.52) die Rolle des Anpassungsfaktors, während die Anpassung beim klassischen Bahnmodell sonst mit Hilfe des (globalen) Formkoeffizienten  $i_g$  erfolgt (siehe Abschnitt 3.6.3.).

Um den Zusammenhang zwischen  $c_2$  und  $i_g^{(43)}$  herzustellen, setzt man in (5.52) den klassischen Ansatz für  $b'$  (3.109) ein und beachtet (3.114):

$$c_2 = \frac{E}{v} = \frac{\bar{c} H_{\tau 0} G_{43}(v_\tau)}{v} = \bar{c} B_{43} H_{\tau 0} \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_0}} = \bar{c} B_{43} \frac{\varrho_0}{\varrho_{0N}},$$

$$B_{43} = 7,454 \cdot 10^{-5} \text{ kp/m}^3 \quad (v_\tau \leq 265 \text{ m/s}). \quad (5.69)$$

Der Ballistische Koeffizient  $\bar{c}$  ist in (3.89) definiert.

<sup>1)</sup> Die Ausführungen dieses Abschnitts schließen sich eng an Abschnitt 3.5.2. an. Die Übertragung auf andere Standard-Luftwiderstandsgesetze bereitet jedoch keine Schwierigkeiten.



Zusammenfassen der Beziehungen für  $c_2$  und  $\bar{c}$  liefert für den globalen Formkoeffizienten

$$i = i_g^{(43)} = \frac{g_{0N}}{1000 \cdot B_{4,3}} \cdot \frac{\varrho_{0N}}{\varrho_0} \cdot \frac{m}{d^2} c_2. \quad (5.70)$$

Als mittlere Luftdichte  $\varrho_0$  verwendet man in erster Näherung die Luftdichte in zwei Drittel der Gipfelhöhe  $y_g$  (Abschnitt 2.8.4.3., Seite 61):

$$\varrho_0 = \varrho(\bar{h}), \quad \bar{h} = \frac{2}{3} y_g.$$

**Zahlenbeispiel:** Bei einem Schießversuch mit einem Granatwerfer ( $d = 120$  mm;  $m = 15,9$  kg;  $v_0 = 220$  m/s) ist bei einem Abgangswinkel  $\vartheta_0 = 62^\circ$  eine Schußweite  $x_e = 3500$  m erzielt worden. Zu bestimmen ist der globale Formkoeffizient  $i_g^{(43)}$  bezüglich des Luftwiderstandsgesetzes 1943.

a) Aus den für  $v_0$ ,  $x_e$  und  $\vartheta_0$  angegebenen Zahlenwerten errechnet man<sup>1)</sup>:

$$K := \frac{v_0^2}{2 g_0 x_e} = \frac{220^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 3500} = 0,7048.$$

b) Man ermittelt in den Tabellen für  $\vartheta_0 = 60^\circ$  und  $\vartheta_0 = 65^\circ$  (Tafel IV des Anhangs) die zu diesem  $K$ -Wert gehörenden Werte von  $2 c_2 x_e$  und  $y_g/x_e$ :

Tabelle 5.1

$\vartheta_0 = 60^\circ$			$\vartheta_0 = 65^\circ$		
$2 c_2 x_e$	$\frac{v_0^2}{2 g_0 x_e}$	$\frac{y_g}{x_e}$	$2 c_2 x_e$	$\frac{v_0^2}{2 g_0 x_e}$	$\frac{y_g}{x_e}$
0,35	0,691	0,466	0,10	0,689	0,548
<i>0,386</i>	<i>0,7048</i>	<i>0,4696</i>	<i>0,140</i>	<i>0,7048</i>	<i>0,5535</i>
0,40	0,710	0,471	0,15	0,709	0,555

c) Die kursiv gedruckten Zahlenwerte werden bezüglich des Winkels  $\vartheta_0$  interpoliert:

Tabelle 5.2

$\vartheta_0$	$2 c_2 x_e$	$\frac{y_g}{x_e}$
60°	0,386	0,4696
62°	<i>0,288</i>	<i>0,5032</i>
65°	0,140	0,5535

<sup>1)</sup> Für die nachfolgenden Rechnungen wird  $g_0 = 9,81$  m/s<sup>2</sup> gesetzt.

d) Aus Tabelle 5.2 folgt für  $\vartheta_0 = 62^\circ$ :

$$c_2 = \frac{0,288}{2 \cdot 3500} \text{ m}^{-1} = 4,114 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1},$$

$$y_g = 0,5032 \cdot 3500 \text{ m} = 1761 \text{ m}.$$

e) Der Tabelle der Standardatmosphäre SSA-64 (Tafel I des Anhangs) entnimmt man

$$\text{für } h = \frac{2}{3} \cdot 1761 \text{ m} = 1174 \text{ m:}$$

$$\frac{\varrho(1174)}{\varrho_{0N}} = 0,8921.$$

f) Einsetzen der erhaltenen Zahlenwerte in (5.70) liefert für den globalen Formkoeffizienten:

$$i_g^{(43)} = \frac{15,9 \cdot 4,114 \cdot 10^{-5}}{0,07454 \cdot 0,8921 \cdot 0,12^2} = 0,685.$$

Die Größenordnung dieses Zahlenwerts stimmt gut mit der Erfahrung überein.

## 5.4. Das Verfahren von *Siacci* für rasante Flugbahnen<sup>1)</sup>

### 5.4.1. Vorbemerkungen

Die Dynamik des modernen Gefechts fordert, die Rohrwaffen der Artillerie- und Schützeneinheiten in zunehmendem Maße im direkten Richten einzusetzen. Die Entwicklungstendenz dieser Waffen ist deshalb durch das Bemühen um ständige Erhöhung der Anfangsgeschwindigkeiten gekennzeichnet (siehe Abschnitt 2.9.2.). Die taktisch genutzten Flugbahnabschnitte, die im allgemeinen nur einen geringen Teil der gesamten Flugbahn umfassen, sind somit stark rasant ( $R \gg 1$ ).

Das Verfahren von *Siacci* ist das analytische Standardverfahren des praktisch tätigen Ballistikers zur Berechnung rasanter Flugbahnen.

Seit der Veröffentlichung dieses Näherungsverfahrens zur Integration der Bewegungsgleichungen des klassischen Bahnmodells im Jahr 1888 ist nahezu ein Jahrhundert vergangen. Daß das Verfahren von *Siacci* trotz der stürmischen Fortschritte, die die Rechentechnik in diesem Zeitraum erfahren hat, seine praktische Bedeutung bewahren konnte, verdankt es seiner Handlichkeit.

Die Flugbahnelemente rasanter Flugbahnabschnitte lassen sich nach

<sup>1)</sup> Unter *Verfahren von Siacci* wird in dem vorliegenden Buch das in der älteren Literatur als *Lösungsmethode Siacci II* bezeichnete Vorgehen verstanden; siehe *Cranz* [22], S.175 ff.

dem Verfahren von *Siacci* ohne besondere Hilfsmittel rasch formelmäßig ermitteln; die hierbei erzielbare Genauigkeit ist für die Lösung der in der Praxis auftretenden Aufgaben meist völlig ausreichend.

Im Gegensatz zu den numerischen Integrationsverfahren können mit dem Verfahren von *Siacci* auch inverse Aufgaben, wie das Anpassungsproblem von Flugbahnen, rasch und präzise gelöst werden.

Ein weiterer Vorzug des Verfahrens von *Siacci* ist darin zu sehen, daß der Aufbau des Formelapparats unabhängig von der Struktur des verwendeten Luftwiderstandsgesetzes erfolgt; die in den Formeln für die Bahnelemente auftretenden sogenannten *Primären* und *Sekundären Siacci-Funktionen* sind für beliebige Standard-Luftwiderstandsgesetze auf relativ einfachem Wege berechenbar.

Die aktuelle Bedeutung der Methoden zur Berechnung rasanter Flugbahnen rechtfertigt eine detaillierte Darstellung von Theorie und Anwendungen des *Siacci*-Verfahrens.

#### 5.4.2. Der *Siacci*-Ansatz für die Luftwiderstandsfunktion

Bei den in den vorangegangenen Abschnitten behandelten analytischen Näherungsverfahren zur Lösung der Bewegungsgleichungen des klassischen Bahnmodells war die Zurückführung der Integration des Anfangswertproblems für die Flugbahn auf Quadraturen dadurch erreicht worden, daß man die meteorologischen Elemente der Atmosphäre und die Fallbeschleunigung durch konstante Mittelwerte ersetzt und für die Verzögerung durch den Luftwiderstand ein Potenzgesetz  $b' \sim M^n$  angenommen hat.

Beim Verfahren von *Siacci* werden für die meteorologischen Elemente und die Fallbeschleunigung ebenfalls konstante Mittelwerte eingeführt und als vorgegebene Parameter behandelt.

Die Verzögerungsfunktion  $E = b'/v$  nimmt damit die Gestalt an

$$\begin{aligned}
 E &= k' G(v_\tau), & k' &:= c H_\tau(\bar{y}), \\
 v_\tau &= v \cdot a_{0N}/a_0, & a_0 &:= a(\bar{y}).
 \end{aligned}
 \tag{5.71}$$

Die vorhandenen Tabellen für die Primären und Sekundären *Siacci*-Funktionen des Standard-Luftwiderstandsgesetzes 1943 sind auf den klassischen Ansatz für die Verzögerungsfunktion zugeschnitten. Um schwerfällige Umrechnungen zu vermeiden, wird deshalb in dem Abschnitt 5.4. durchgängig der klassische Ansatz für die Verzögerungsfunktion benutzt.

Das Argument  $v_\tau$  der Widerstandsfunktion  $G(v_\tau)$  wird nun durch ein Vielfaches  $\kappa$  der Horizontalkomponente  $u$  der Bahngeschwindigkeit  $v$ , die sogenannte *Pseudogeswindigkeit*  $U$ , ersetzt:

$$G(v_\tau) = G(U), \quad U := \kappa u.$$

In einem festen Flugbahnpunkt  $P = P_1$  ist die Gleichung  $v_\tau = U$  durch geeignete Wahl von  $\kappa$  zu erfüllen. Mit  $v = v_1$ ,  $\vartheta = \vartheta_1$  folgt

$$v_\tau = v_1 \cdot a_{0N}/a_0 = \kappa_1 v_1 \cos \vartheta_1,$$

$$\kappa = \kappa_1 = \frac{a_{0N}/a_0}{\cos \vartheta_1}.$$

Der Zahlenwert von  $\kappa$  hängt somit über  $\vartheta_1$  von dem jeweils betrachteten Flugbahnpunkt ab.

Bei geradlinigen Bahnen (Abschnitt 5.2.) ist der Neigungswinkel der Flugbahntangente längs der gesamten Bahn konstant und gleich dem Abgangswinkel ( $\vartheta = \vartheta_0$ ), so daß auch  $\kappa$  längs der gesamten Flugbahn konstant ist:

$$\kappa = \kappa_0 = \frac{a_{0N}/a_0}{\cos \vartheta_0}. \quad (5.72)$$

Ist der betrachtete Flugbahnabschnitt *nicht* geradlinig, jedoch sehr gestreckt, so wird man längs dieses Flugbahnabschnitts in guter Näherung  $\vartheta \approx \text{const}$  und

$$G(v_\tau) \approx G(U), \quad v_\tau \approx U = \kappa u$$

setzen können, wobei  $\kappa$  jetzt als geeignet gewählter konstanter Mittelwert aufgefaßt wird. Mit der Substitution  $v_\tau = U$  folgt aus (5.71) der *Siacci-Ansatz für die Verzögerungsfunktion E*:

$$E = k'G(U), \quad U = \kappa u \quad (\kappa: \text{const}). \quad (5.73)$$

Mit (5.73) reduziert sich die Integration der Bewegungsgleichungen auf Quadraturen.

Die Annahme  $v \sim u$  ist nur bei stark rasanten Bahnabschnitten hinreichend gut erfüllt, wie aus den vorstehenden Ausführungen ersichtlich ist.

Eine weitere Einschränkung des Anwendungsbereichs der Annahme von *Siacci* resultiert aus der Voraussetzung konstanter meteorologischer Elemente.

Im Rahmen des Verfahrens von *Siacci* spielt der Koeffizient  $k'$  die Rolle des (globalen) Anpassungsfaktors. Da nach (5.71) in  $k'$  die Höhenfunktion  $H_r(\bar{y})$  eingeht, wird sich der Zahlenwert des Anpassungsfaktors  $k'$  mit wachsendem Abgangswinkel  $\vartheta_0$  relativ stark ändern. Der bei einer speziellen Flugbahn ermittelte  $k'$ -Wert ist also nur bedingt auf Flugbahnen mit anderen Abgangswinkeln übertragbar.

Um diese Schwierigkeit zu umgehen, kann man versuchen, von dem Anpassungsfaktor den höhenabhängigen Anteil abzuspalten. In der ballistischen Literatur findet man hierfür eine Anzahl spezieller Ansätze; einige dieser Zerlegungen, die ihre praktische Bedeutung bewahrt haben, werden in Abschnitt 5.4.9. besprochen.

Bei kleinen Abgangswinkeln ( $\vartheta_0 \leq 5^\circ$ ) kann die Anpassung der Näherungsflugbahn des *Siacci*-Verfahrens an die Ergebnisse von Versuchs-schießen unmittelbar über  $k'$  erfolgen.<sup>1)</sup>

### 5.4.3. Die Bewegungsgleichungen im $U$ -System

Mit dem *Siacci*-Ansatz (5.73) für  $E$  und  $g = g_0 = const$  vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen des  $U$ -Systems (4.30) zu:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dU} &= - \frac{1}{k'} \frac{1}{U G(U)}, & t(U_0) &= t_0; \\ \frac{dx}{dU} &= - \frac{1}{\kappa k'} \frac{1}{G(U)}, & x(U_0) &= x_0; \\ \frac{dy}{dU} &= - \frac{1}{\kappa k'} \frac{p}{G(U)}, & y(U_0) &= y_0; \\ \frac{dp}{dU} &= \frac{\kappa g_0}{k'} \frac{1}{U^2 G(U)}, & p(U_0) &= p_0. \end{aligned} \tag{5.74}$$

<sup>1)</sup> Approximationsgenauigkeit und Geltungsbereich des Verfahrens von *Siacci* bei Verwendung des Standard-Luftwiderstandsgesetzes 1943 wurden von *Große* [46] untersucht.

Bei Bahnen, die im Ursprung  $O$  des  $x, y$ -Systems beginnen, wird  $x_0 = y_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ . In diesem Spezialfall verwendet man als Mittelwerte der meteorologischen Elemente und der Fallbeschleunigung meist die momentanen Bodenwerte, die allerdings nicht mit den Bodenwerten der gültigen Normalatmosphäre übereinzustimmen brauchen. Durch Transformation der abhängigen Variablen in (5.74) läßt sich die Anzahl der Flugbahnparameter (wie beim quadratischen Widerstandsgesetz) von *drei* ( $c, v_0, \vartheta_0$ ) auf *zwei* ( $\lambda_0, U_0$ ) reduzieren. Mit den Substitutionen

$$\begin{aligned} x' &:= \kappa k' (x - x_0), & y' &:= (\kappa k' / p_0) (y - y_0); \\ t' &:= k' (t - t_0), & p' &:= p / p_0, & \lambda_0 &:= k' p_0 / x \end{aligned} \quad (5.75)$$

und  $g_0 = g_{0N}$  geht (5.74) über in:

$$\begin{aligned} \frac{dt'}{dU} &= - \frac{1}{U G(U)}, & t'(U_0) &= 0; \\ \frac{dx'}{dU} &= - \frac{1}{G(U)}, & x'(U_0) &= 0; \\ \frac{dy'}{dU} &= - \frac{p'}{G(U)}, & y'(U_0) &= 0; \\ \frac{dp'}{dU} &= \frac{g_{0N}}{\lambda_0} \frac{1}{U^2 G(U)}, & p'(U_0) &= 1. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Als Flugbahnparameter treten in diesem Anfangswertproblem  $\lambda_0$  und  $U_0$  auf. Die Fallbeschleunigung  $g_{0N}$  wird als universelle Konstante betrachtet. Diese Annahme erfolgt nicht aus mathematischen Gründen, sie wird lediglich getroffen, um den Anschluß an die in der Sowjetunion übliche Definition der Primären *Siacci*-Funktion  $J(U)$  zu erhalten. Da die ersten beiden Gleichungen (5.76) nicht mit den übrigen gekoppelt sind und  $\lambda_0$  in ihnen nicht enthalten ist, kann ihre Lösung symbolisch geschrieben werden

$$t' = \varphi_{t'}(U|U_0), \quad x' = \varphi_x(U|U_0). \quad (5.77)$$

Die Lösungen der letzten beiden Gleichungen von (5.76) hängen jedoch sowohl von  $\lambda_0$  wie von  $U_0$  ab:

$$y' = \varphi_{y'}(U|\lambda_0, U_0), \quad p' = \varphi_{p'}(U|\lambda_0, U_0). \quad (5.78)$$

Denkt man sich eine der Gleichungen (5.77) nach  $U$  aufgelöst und das Ergebnis in die übrigen Gleichungen (5.77), (5.78) eingesetzt, so erhält man Darstellungen für die Lösung des Anfangswertproblems (5.76), in denen der Verlauf der verallgemeinerten Flugbahnelemente durch Funktionen von  $t'$  (bzw. von  $x'$ ) beschrieben wird.

Die Tatsache, daß  $U$  durch  $x'$  und  $U_0$  ausgedrückt werden kann, wird bei der Definition der Sekundären *Siacci-Funktionen* (Abschnitt 5.4.8.) mit Vorteil verwendet.

Da dem Gipfelpunkt  $G$  die Bedingungsgleichung

$$p'_g = \varphi_{p'}(U_g | \lambda_0, U_0) = 0 \quad (5.79)$$

und dem Auftreffpunkt die Bedingungsgleichung

$$y'_e = \varphi_{y'}(U_e | \lambda_0, U_0) = 0 \quad (5.80)$$

entsprechen, sind  $t'_g, x'_g$  und  $t'_e, x'_e$  (im Gegensatz zu  $t', x'$  eines laufenden Flugbahnpunkts) Funktionen sowohl von  $U_0$  wie auch von  $\lambda_0$ .

Auflösen von (5.79) und (5.80) nach  $U_g$  bzw.  $U_e$  liefert

$$U_g = F_g(\lambda_0, U_0), \quad U_e = F_e(\lambda_0, U_0). \quad (5.81)$$

Für  $x'_g$  und  $x'_e$  erhält man damit

$$\begin{aligned} x'_g &= \varphi_{x'}(U_g | U_0) = \varphi_{x'}[F_g(\lambda_0, U_0) | U_0] =: \varphi_{x'}^{(g)}(\lambda_0, U_0), \\ x'_e &= \varphi_{x'}(U_e | U_0) = \varphi_{x'}[F_e(\lambda_0, U_0) | U_0] =: \varphi_{x'}^{(e)}(\lambda_0, U_0). \end{aligned}$$

Entsprechende Ausdrücke ergeben sich für  $t'_g$  und  $t'_e$ .

Die transformierten Bahnelemente im Flugbahngipfel  $U_g, t'_g, y'_g, p'_g$  und im Auftreffpunkt  $U_e, t'_e, x'_e, p'_e$  sind somit ganz allgemein als Funktionen der beiden Parameter  $\lambda_0$  und  $U_0$  darstellbar.

#### 5.4.4. Die Primären *Siacci-Funktionen*

In der ersten, zweiten und vierten Gleichung von (5.76) sind die Variablen trennbar. Nachdem aus der vierten Gleichung  $p' = \varphi_{p'}(U | \lambda_0, U_0)$  bekannt ist, kann auch die Lösung der dritten Gleichung durch Quadraturen gewonnen werden.

Um die Formeln für die Bahnelemente übersichtlich zu gestalten und ihre praktische Handhabung zu erleichtern, führt man vier neue Funktionen  $A(U)$ ,  $D(U)$ ,  $J(U)$  und  $T(U)$  ein, die sogenannten *Primären Siacci-Funktionen*; siehe Tabelle 5.3.

Tabelle 5.3 *Primäre Siacci-Funktionen*

$D(U) := - \int_{B'}^U \frac{dU}{G(U)};$	$T(U) := - \int_{B'}^U \frac{dU}{U G(U)};$
$J(U) := - 2 g_{0N} \int_{B'}^U \frac{dU}{U^2 G(U)};$	$A(U) := - \int_{B'}^U \frac{J(U) dU}{G(U)}.$

Die Primären *Siacci-Funktionen* liegen für eine Reihe von Standard-Luftwiderstandsgesetzen vertafelt vor.

Die untere Integrationsgrenze  $B'$  ist im Prinzip beliebig. Aus praktischen Erwägungen (Vermeidung von Vorzeichenwechseln) wählt man für  $B'$  jedoch einen Zahlenwert, der größer ist als alle in der Praxis auftretenden Werte der Pseudogeschwindigkeit  $U$ .

In den Tafeln der Primären *Siacci-Funktionen*, die auf dem Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 beruhen, ist  $B' = 2000$  m/s gesetzt worden;  $U$  läuft von 50 m/s bis 2000 m/s. Als Tafelzugang findet man jedoch nicht  $U$ , sondern  $D(U)$ . Ein Auszug aus den sowjetischen Originaltafeln ist im Anhang, Tafel V, enthalten.

Wie man leicht nachprüft, genügen die Primären *Siacci-Funktionen* dem Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dU} &= - \frac{1}{G(U)}, & D(B') &= 0; \\ \frac{dT}{dU} &= - \frac{1}{U G(U)}, & T(B') &= 0; \\ \frac{dJ}{dU} &= - \frac{2 g_{0N}}{U^2 G(U)}, & J(B') &= 0; \\ \frac{dA}{dU} &= - \frac{J}{G(U)}, & A(B') &= 0. \end{aligned} \tag{5.82}$$

Um die Primären *Siacci-Funktionen* für ein vorgegebenes Verzögerungsgesetz  $G(U)$  zu erhalten, hat man (5.82) lediglich *einmal* numerisch zu integrieren.



### 5.4.5. Die Integration der Bewegungsgleichungen

Unter Verwendung der Primären *Siacci*-Funktionen (Tabelle 5.3) sowie der Integralzerlegung

$$\int_{U_0}^U = - \left[ \left( - \int_{B'}^U \right) - \left( - \int_{B'}^{U_0} \right) \right]$$

liefert die Integration der Bewegungsgleichungen (5.76):

$$t' = T(U) - T(U_0), \quad (5.83)$$

$$x' = D(U) - D(U_0), \quad (5.84)$$

$$p' - 1 = - \frac{1}{2\lambda_0} [J(U) - J(U_0)]. \quad (5.85)$$

Setzt man  $p'$  aus (5.85) in die dritte Gleichung von (5.76) ein, so ergibt sich für  $y'$ :

$$y' = - \int_{U_0}^U \frac{p' dU}{G(U)} = - \int_{U_0}^U \left\{ 1 - \frac{1}{2\lambda_0} [J(U) - J(U_0)] \right\} \frac{dU}{G(U)}.$$

Diese Gleichung kann wie folgt umgeformt werden:

$$y' = - \int_{U_0}^U \frac{dU}{G(U)} + \frac{1}{2\lambda_0} \left[ \int_{U_0}^U \frac{J(U) dU}{G(U)} - J(U_0) \int_{U_0}^U \frac{dU}{G(U)} \right],$$

$$y' = D(U) - D(U_0) - \frac{1}{2\lambda_0} \{ A(U) - A(U_0) - J(U_0) [D(U) - D(U_0)] \} \quad (5.86)$$

$$= [D(U) - D(U_0)] \left\{ 1 - \frac{1}{2\lambda_0} \left[ \frac{A(U) - A(U_0)}{D(U) - D(U_0)} - J(U_0) \right] \right\},$$

$$y' = x' \left\{ 1 - \frac{1}{2\lambda_0} \left[ \frac{A(U) - A(U_0)}{D(U) - D(U_0)} - J(U_0) \right] \right\}. \quad (5.86a)$$

Rücktransformation auf die ursprünglichen Variablen gemäß (5.75) liefert für die Bahnelemente die in der Tabelle 5.4 angegebenen Formeln. Die Parameter  $\varkappa$  und  $k'$  werden als bekannt vorausgesetzt.

Tabelle 5.4 *Siacci-Formelsatz I: Bahnelemente eines beliebigen Flugbahnpunkts*

$$t = t_0 + \frac{1}{k'} [\Gamma(U) - \Gamma(U_0)], \quad (5.87)$$

$$x = x_0 + \frac{1}{\kappa k'} [D(U) - D(U_0)], \quad (5.88)$$

$$y = y_0 + p_0 (x - x_0) - \frac{\kappa (x - x_0)}{2 k'} \left[ \frac{A(U) - A(U_0)}{D(U) - D(U_0)} - J(U_0) \right], \quad (5.89)$$

$$p = p_0 - \frac{\kappa}{2 k'} [J(U) - J(U_0)], \quad (5.90)$$

$$v = \frac{U}{\kappa} \sqrt{1 + p^2}, \quad U_0 = \kappa v_0 \cos \vartheta_0. \quad (5.91)$$

#### 5.4.6. Die Bahnelemente im Flugbahngipfel

Die Bedingungsgleichung für die Bahnelemente im Flugbahngipfel lautet:

$$\vartheta = \vartheta_g = 0 \quad (p_g = 0).$$

Mit  $p$  wird auch  $p' = 0$ . Aus (5.85) folgt somit als Bestimmungsgleichung für die Pseudogeschwindigkeit  $U_g$  im Flugbahngipfel:

$$J(U_g) = 2\lambda_0 + J(U_0), \quad \lambda_0 = k' p_0 / \kappa. \quad (5.92)$$

Die Bahnelemente im Flugbahngipfel erhält man durch Einsetzen von  $U_g$  aus (5.92) in (5.87) bis (5.91); siehe Tabelle 5.5.

In Tabelle 5.5 wird die abkürzende Schreibweise  $D_g := D(U_g)$ ,  $D_0 := D(U_0)$  benutzt, entsprechende Kurzbezeichnungen werden für die anderen Primären *Siacci*-Funktionen verwendet.

Die Formel (5.95) für  $y_g$  kommt dadurch zustande, daß man (5.86) für den Gipfelpunkt anschreibt und  $\lambda_0$  mit Hilfe von (5.92) eliminiert. Mit

$$y' = (\kappa k' / p_0) (y - y_0) = (k'^2 / \lambda_0) (y - y_0)$$

und  $U = U_g$  geht (5.86) über in

$$2k'^2 (y_g - y_0) = 2\lambda_0 (D_g - D_0) - A_g + A_0 + J_0 (D_g - D_0),$$

bzw. wenn man gemäß (5.92)  $2\lambda_0 = J_g - J_0$  einsetzt,

$$\begin{aligned} 2k'^2 (y_g - y_0) &= (J_g - J_0) (D_g - D_0) - A_g + A_0 + J_0 (D_g - D_0) \\ &= J_g (D_g - D_0) - A_g + A_0. \end{aligned}$$

Tabelle 5.5 *Siacci-Formelsatz II: Bahnelemente im Flugbahngipfel*

$t_g = t_0 + \frac{1}{k'} (T_g - T_0),$	(5.93)
$x_g = x_0 + \frac{1}{\kappa k'} (D_g - D_0),$	(5.94)
$y_g = y_0 + \frac{1}{2k'^2} [J_g (D_g - D_0) - A_g + A_0],$	(5.95)
$v_g = U_g/\kappa; \quad U_0 = \kappa v_0 \cos \vartheta_0,$	(5.96)
$J_g = 2(k'/\kappa) \tan \vartheta_0 + J(\kappa v_0 \cos \vartheta_0).$	

#### 5.4.7. Die Flugbahnelemente im Auftreffpunkt

Im Auftreffpunkt in der Mündungsebene ist  $y_e = y_0$ ,  $y'_e = 0$ . Aus (5.86a) folgt damit als Bestimmungsgleichung für die Pseudogeswindigkeit  $U_e$  im Auftreffpunkt:

$$\frac{A(U_e) - A(U_0)}{D(U_e) - D(U_0)} - J(U_0) = 2\lambda_0 = 2k' p_0/\kappa. \quad (5.97)$$

Da  $U_e$  auf der linken Seite sowohl im Zähler wie auch im Nenner auftritt und die Primären *Siacci-Funktionen* tabellarisch gegeben sind, muß  $U_e$  aus (5.97) durch Iteration gewonnen werden.

Die iterative Auflösung von (5.97) nach  $U_e$  erübrigt sich, wenn Tabellen der sogenannten Sekundären *Siacci-Funktionen* vorhanden sind (siehe Abschnitt 5.4.8.).

Setzt man  $U_e$  aus (5.97) in (5.87) bis (5.91) ein und benutzt die Abkürzungen

$$D_e := D(U_e), \quad T_e := T(U_e), \quad A_e := A(U_e), \quad J_e := J(U_e),$$

so ergeben sich die in Tabelle 5.6 zusammengestellten Flugbahnelemente im Auftreffpunkt.

Tabelle 5.6 *Siacci-Formelsatz III: Flugbahnelemente im Auftreffpunkt*

$t_e = t_0 + \frac{1}{k'} (T_e - T_0),$	(5.98)
$x_e = x_0 + \frac{1}{\kappa k'} (D_e - D_0),$	(5.99)
$p_e = p_0 - \frac{\kappa}{2 k'} (J_e - J_0),$	(5.100)
$v_e = \frac{U_e}{\kappa} \sqrt{1 + p_e^2},$	(5.101)
$\frac{A_e - A_0}{D_e - D_0} = \frac{2 k'}{\kappa} \tan \vartheta_0 + J (\kappa v_0 \cos \vartheta_0).$	(5.102)

Für  $p_e$  ist noch eine andere Darstellung möglich, die sich ergibt, wenn man in (5.100)  $p_0$  mit Hilfe von (5.102) eliminiert:

$$\begin{aligned}
 p_e &= \frac{\kappa}{2 k'} \left[ \frac{2 k'}{\kappa} p_0 - (J_e - J_0) \right] \\
 &= \frac{\kappa}{2 k'} \left[ \frac{A_e - A_0}{D_e - D_0} - J_0 - (J_e - J_0) \right], \\
 p_e &= \frac{\kappa}{2 k'} \left( \frac{A_e - A_0}{D_e - D_0} - J_e \right).
 \end{aligned}
 \tag{5.103}$$

Für Zahlenrechnungen ist (5.100) günstiger als (5.103).

#### 5.4.8. Die Sekundären *Siacci-Funktionen*

Die Ermittlung von  $U_e$  aus der Bestimmungsgleichung (5.97) bereitet wenig Schwierigkeiten, wenn die linke Seite dieser Gleichung als Funktion der beiden Argumente  $U_e, U_0$  vertafelt vorliegt:

$$f(U, U_0) := \frac{A(U) - A(U_0)}{D(U) - D(U_0)} - J(U_0).
 \tag{5.104}$$

Das Auflösen der Gleichung  $f(U_e, U_0) = 2 \lambda_0$  reduziert dann auf eine doppelte Interpolation in der  $f$ -Tabelle. Diese Rechenoperation ist

wesentlich schneller auszuführen als die iterative Lösung einer nicht-linearen Gleichung des Typs (5.97).

Funktionen nach Art von (5.104), die aus Primären *Siacci-Funktionen* an zwei unterschiedlichen Argumentstellen zusammengesetzt sind, heißen *Sekundäre Siacci-Funktionen*.

Für die Behandlung der in der Praxis auftretenden Probleme erweist es sich nicht als zweckmäßig, die Sekundären *Siacci-Funktionen* – wie in (5.104) angegeben – als Funktion der Argumente  $U_e$  und  $U_0$  zu verfafeln. Es ist günstiger, an Stelle der Pseudogeschwindigkeit  $U$  die transformierte Abszisse  $x'$  zu verwenden.

Der Übergang von dem Argument  $(U, U_0)$  zu dem Argument  $(x', U_0)$  ist ohne weiteres möglich, da nach (5.77)  $x'$  eine Funktion von  $U$  und  $U_0$  ist.

Entsprechend kann man von dem Argument  $(U, U_0)$  zu dem Argument  $(t', U_0)$  übergehen. Diese Darstellung dürfte für die Ballistik von Fla-Waffen von Vorteil sein.

Als *Sekundäre Siacci-Funktion*  $f_0(x', U_0)$  kann somit definiert werden:

$$f_0(x', U_0) := \frac{A[U(x', U_0)] - A(U_0)}{D[U(x', U_0)] - D(U_0)} - J(U_0). \quad (5.105)$$

Die Bedingungsgleichung für den Auftreffpunkt in der Mündungsebene (5.104) nimmt damit die Gestalt an

$$f_0(x'_e, U_0) = 2\lambda_0 \quad (5.106)$$

bzw. ausführlich

$$f_0[\varkappa k' (x_e - x_0), \varkappa v_0 \cos \vartheta_0] = (2k'/\varkappa) \tan \vartheta_0. \quad (5.106a)$$

Unter Verwendung von (5.105) und (5.106) kann die Formel für die *Flugbahnordinate*  $y'$  (5.86a) auf die übersichtliche Form gebracht werden

$$y' = x' \left[ 1 - \frac{f_0(x', U_0)}{f_0(x'_e, U_0)} \right] \quad (5.107)$$

oder

$$y = y_0 + p_0 (x - x_0) \left\{ 1 - \frac{f_0[\varkappa k' (x - x_0), U_0]}{f_0[\varkappa k' (x_e - x_0), U_0]} \right\}. \quad (5.108)$$

Beschränkt man sich auf die Flugbahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt, so kann man die in Tabelle 5.7 zusammengestellten Sekundären *Siacci-Funktionen* einführen. Die Darstellung entspricht der in der sowjetischen Ballistik üblichen Definition. Ein Auszug aus den

Originaltafeln der Sekundären *Siacci-Funktionen* für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 ist im Anhang, Tafel VI, wiedergegeben.<sup>1)</sup>

Tabelle 5.7 *Sekundäre Siacci-Funktionen*

$f_0(x'_e, U_0) = 2 \lambda_0 = (2 k'/\kappa) \tan \vartheta_0,$	
$f_1(x'_e, U_0) = \frac{v_0^2 \sin 2 \vartheta_0}{x_e - x_0},$	$f_2(x'_e, U_0) = \frac{\tan  \vartheta_e }{\tan \vartheta_0},$
$f_3(x'_e, U_0) = \frac{v_0 \sin \vartheta_0}{t_e - t_0},$	$f_4(x'_e, U_0) = \frac{v_0 \cos \vartheta_0}{v_e \cos \vartheta_e},$
$f_5(x'_e, U_0) = \frac{x_g - x_0}{x_e - x_0},$	$f_6(x'_e, U_0) = \frac{y_g - y_0}{x_e - x_0} \cot \vartheta_0,$
$x'_e = \kappa k' (x_e - x_0),$	$U_0 = \kappa v_0 \cos \vartheta_0.$

Wie in Abschnitt 5.4.3. gezeigt, sind die verallgemeinerten Flugbahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt Funktionen der beiden Parameter  $\lambda_0$  und  $U_0$ , wobei es wieder freisteht, einen dieser Parameter durch ein Gipfel- oder Auftreffelement (also etwa  $x'_e$ ) zu ersetzen. Um die Zulässigkeit der Ansätze in Tabelle 5.7 zu zeigen, braucht man somit lediglich nachzuweisen, daß die rechten Seiten der Funktionen  $f_i$  durch  $\lambda_0$  und  $U_0$  bzw. verallgemeinerte Gipfel- und Auftreffelemente darstellbar sind:

$$f_1 = \frac{v_0^2 \sin 2 \vartheta_0}{x_e - x_0} = \frac{2 k' p_0}{\kappa} \cdot \frac{\kappa^2 u_0^2}{\kappa k' (x_e - x_0)} = \frac{2 \lambda_0 U_0^2}{x'_e};$$

$$f_2 = -\frac{\tan \vartheta_e}{\tan \vartheta_0} = -\frac{p_e}{p_0} = -p'_e;$$

$$f_3 = \frac{v_0 \sin \vartheta_0}{t_e - t_0} = \kappa u_0 \cdot \frac{k' p_0}{\kappa} \cdot \frac{1}{k' (t_e - t_0)} = \frac{\lambda_0 U_0}{t'_e};$$

$$f_4 = \frac{v_e \cos \vartheta_e}{v_0 \cos \vartheta_0} = \frac{\kappa u_e}{\kappa u_0} = \frac{U_e}{U_0};$$

$$f_5 = \frac{x_g - x_0}{x_e - x_0} = \frac{x'_g}{x'_e};$$

<sup>1)</sup> Die *Siacci-Funktion*  $f_{v_0}(x'_e, U_0)$  wird im Rahmen der linearen Störungstheorie behandelt, siehe Abschnitt 6.6.3.

$$f_6 = \frac{y_g - y_0}{x_e - x_0} \cot \vartheta_0 = \frac{(\varkappa k'/p_0)(y_g - y_0)}{\varkappa k'(x_e - x_0)} = \frac{y'_g}{x'_e}.$$

Unter Verwendung der Sekundären *Siacci-Funktionen* gemäß Tabelle 5.7 erhält man für die Bahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt die in Tabelle 5.8 zusammengestellten Beziehungen.

Für die Flugbahnelemente  $v_g$ ,  $t_g$  im Gipfelpunkt stehen keine entsprechenden Sekundären *Siacci-Funktionen* zur Verfügung.

Tabelle 5.8 *Siacci-Formelsatz IV: Darstellung der Flugbahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt durch Sekundäre Funktionen*

$$\begin{aligned} x_e &= x_0 + \frac{v_0^2 \sin 2 \vartheta_0}{f_1(x'_e, U_0)}, \\ \tan |\vartheta_e| &= \tan \vartheta_0 \cdot f_2(x'_e, U_0), \\ t_e &= t_0 + \frac{v_0 \sin \vartheta_0}{f_3(x'_e, U_0)}, \\ v_e &= \frac{v_0 \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_e \cdot f_4(x'_e, U_0)} = \frac{v_0 \cos \vartheta_0}{f_4(x'_e, U_0)} \sqrt{1 + \tan^2 \vartheta_e}, \\ x_g &= x_0 + (x_e - x_0) \cdot f_5(x'_e, U_0), \\ y_g &= y_0 + (x_e - x_0) \tan \vartheta_0 \cdot f_6(x'_e, U_0), \\ x'_e &= \varkappa k'(x_e - x_0), & U_0 &= \varkappa v_0 \cos \vartheta_0. \end{aligned}$$

## 5.4.9. Spezielle *Siacci-Ansätze*

### 5.4.9.1. Die Struktur des Anpassungsfaktors $k'$

In dem *Siacci-Ansatz* für die Verzögerungsfunktion  $E$ ,

$$E = k' G(U) = k' G(\varkappa u),$$

treten die beiden Parameter  $k'$  und  $\varkappa$  auf. Über  $\varkappa$  verfügt man durch die *Festlegung*<sup>1)</sup>:

$$\varkappa = \varkappa_0 = \frac{1}{\cos \vartheta_0} \frac{a_{0N}}{a_0}. \quad (5.109)$$

<sup>1)</sup> Siehe hierzu die Ausführungen in Abschnitt 5.4.2.

Für die folgenden Rechnungen ist es zweckmäßig,  $\kappa_0$  in der Form zu schreiben

$$\kappa_0 = v_0 \sec \vartheta_0; \quad v_0 := a_{0N}/a_0. \quad (5.109a)$$

Ist die mittlere Temperatur  $\tau_0$  ungefähr gleich der Bodentemperatur der Normalatmosphäre  $\tau_{0N}$ , so kann  $v_0 = 1$  angenommen werden. Zwischen der Bahngeschwindigkeit  $v$  und der Pseudogeswindigkeit  $U$  besteht in diesem Fall die Beziehung

$$U = \frac{u}{\cos \vartheta_0} = v \frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta_0},$$

die sich leicht geometrisch deuten läßt. Wie man Bild 5.9 entnimmt, ist  $U$  die Projektion der Bahngeschwindigkeit  $v$  auf die Abgangsrichtung durch eine Parallele zur  $y$ -Achse.

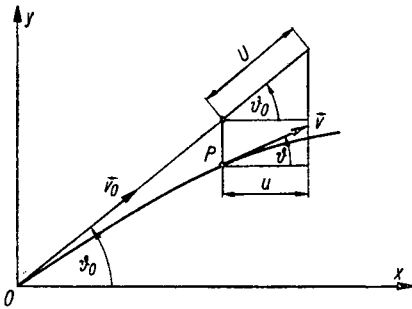


Bild 5.9  
Geometrische Deutung der Pseudogeswindigkeit  $U$  im Fall  $v_0 = 1$

Da über den Parameter  $\kappa$  bereits verfügt worden ist, muß die Anpassung der *Siacci*-Lösung an die Ergebnisse der Schießversuche somit durch geeignete Wahl des Zahlenwerts für den Parameter  $k'$  vorgenommen werden. Die Anpassung verfolgt hierbei das Ziel, sowohl die mathematischen Verfahrensfehler des *Siacci*-Ansatzes wie auch die Modellfehler des klassischen Bahnmodells zu kompensieren.

Die Fehler des Verfahrens von *Siacci* werden (bei konstanter Anfangsgeschwindigkeit) mit zunehmendem Abgangswinkel  $\vartheta_0$  rasch größer, was sich unter anderem darin äußert, daß der Anpassungskoeffizient  $k'$  bei Änderung des Abgangswinkels innerhalb relativ weiter Grenzen variiert. Dieser Effekt erweist sich für die praktische Anwendung des Verfahrens von *Siacci* als sehr störend, da für die Flugbahnanpassung



( $k'$ -Bestimmung) in der Regel nur einige wenige experimentell ermittelte Flugbahnen zur Verfügung stehen.

Um dieser Schwierigkeit zu begegnen und den Anpassungsfaktor über einen möglichst großen Bereich der Flugbahnschar konstant halten zu können, versucht man, von  $k'$  den  $\vartheta_0$ - (höhenabhängigen) Anteil abzuspalten. Für die Verringerung der Höhenabhängigkeit von  $k'$  gibt es kein universell anwendbares Rezept. Die im folgenden besprochenen speziellen *Siacci*-Ansätze sind deshalb jeweils auf eine begrenzte Klasse von Bahnen (rasante Bahnen der Klasse Boden – Boden, Fla-Bahnen bzw. Flugbahnen im geeigneten Gelände) zugeschnitten.

Durch Gleichsetzen des *Siacci*-Ansatzes (5.73) und des vollständigen klassischen Ansatzes (3.86) ergibt sich für  $k'$  die Beziehung

$$k' = c H_\tau(y) \frac{G(v_\tau)}{G(U)}$$

Nimmt man an, daß die Verzögerungsfunktion  $G(v_\tau)$  in dem in Frage kommenden Geschwindigkeitsintervall näherungsweise als homogene Funktion von  $v_\tau$  der Ordnung  $l$  dargestellt werden kann, dann gilt

$$\begin{aligned} G(v_\tau) &= B_l v_\tau^l, & G(U) &= B_l U^l, \\ k' &= c H_\tau(y) (v_\tau/U)^l. \end{aligned} \tag{5.110}$$

Unter Beachtung der Definitionsgleichungen für  $H_\tau(y)$  und  $v_\tau$ ,

$$H_\tau(y) := \frac{\varrho(y) a(y)}{\varrho_{0N} a_{0N}}, \quad v_\tau := v \frac{a_{0N}}{a(y)}$$

sowie  $\kappa_0$  aus (5.109) geht der Ausdruck für  $k'$  (5.110) über in

$$k' = c \frac{\varrho(y) a(y)}{\varrho_{0N} a_{0N}} \left[ \frac{a_0 \cos \vartheta_0}{a(y) \cos \vartheta} \right]^l. \tag{5.111}$$

Die in der Praxis üblichen *Siacci*-Ansätze folgen hieraus durch vereinfachende Annahmen. Man ersetzt  $a(y)$ ,  $\varrho(y)$  und  $\vartheta$  durch geeignet gewählte konstante Mittelwerte.

#### 5.4.9.2. Der *Siacci*-Ansatz A

Der *Siacci*-Ansatz A folgt aus dem Formelsatz I (Tabelle 5.4) unter der Annahme, daß  $G(\tau_*)$  in dem durchlaufenen Geschwindigkeitsbereich in ausreichender Genauigkeit als homogene *lineare* Funktion seines Arguments dargestellt werden kann; also  $l = 1$  ist.

Diese Annahme ist in weiten Geschwindigkeitsbereichen, mit Ausnahme des Bereichs in der Umgebung von  $M = 1$ , als Näherungsvoraussetzung brauchbar, wie ein Blick auf Bild 3.23 (Seite 154) zeigt. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß der Neigungswinkel der Bahntangente  $\vartheta$  auf dem betreffenden Flugbahnabschnitt im Mittel gleich

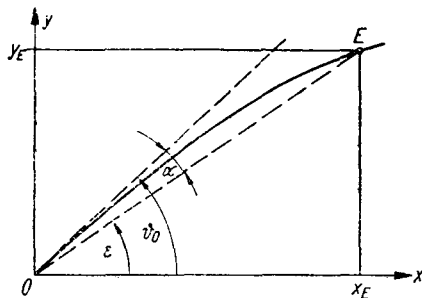


Bild 5.10  
Zur Erläuterung der Voraussetzungen des Siacci-Ansatzes A

Tabelle 5.9 *Siacci-Formelsatz V: Bahnelemente nach dem Verfahren von Siacci (Ansatz A)*

$k' = k_1 \cos \vartheta_0 / \cos \varepsilon; \quad k_1 = c H_{r0}; \quad x_0 = v_0 / \cos \vartheta_0$
$x = \frac{\cos \varepsilon}{v_0 k_1} [D(U) - D(v_0 v_0)], \quad t = \frac{\cos \varepsilon}{k_1 \cos \vartheta_0} [T(U) - T(v_0 v_0)];$
$p = \tan \vartheta_0 - \frac{v_0 \cos \varepsilon}{2 k_1 \cos^2 \vartheta_0} [J(U) - J(v_0 v_0)];$
$y = x \tan \vartheta_0 - \frac{v_0 x \cos \varepsilon}{2 k_1 \cos^2 \vartheta_0} \left[ \frac{A(U) - A(v_0 v_0)}{D(U) - D(v_0 v_0)} - J(v_0 v_0) \right];$
Bedingungsgleichung für den Gipfelpunkt:
$J(U_g) = \frac{2 k_1 \cos^2 \vartheta_0}{v_0 \cos \varepsilon} + J(v_0 v_0);$
Bedingungsgleichung für den Auftreffpunkt in der Mündungsebene:
$f_0(x'_e, U_0) = f_0\left(\frac{v_0 k_1}{\cos \varepsilon} x_e, v_0 v_0\right) = \frac{k_1 \sin 2\vartheta_0}{v_0 \cos \varepsilon}.$

dem Geländewinkel (Winkel zum Ziel)  $\varepsilon$  ist (siehe Bild 5.10). Da allgemein  $\vartheta_0 = \alpha + \varepsilon$  gilt, bedeutet die Annahme  $\vartheta_0 \approx \varepsilon$ , daß der Aufsatzwinkel  $\alpha$  klein ist.

Die höhenabhängigen meteorologischen Elemente der Atmosphäre seien durch konstante Mittelwerte ersetzbar:

$$\varrho(y) \approx \varrho(\bar{y}) =: \varrho_0, \quad a(y) \approx a(\bar{y}) =: a_0.$$

Unter den genannten Voraussetzungen vereinfacht sich (5.111) zu

$$k' = k_1 \frac{\cos \vartheta_0}{\cos \varepsilon}, \quad k_1 := c \frac{\varrho_0}{\varrho_{0N}} \frac{a_0}{a_{0N}} =: c H_{\tau 0}. \quad (5.112)$$

Der diesem Ansatz entsprechende Formelsatz für die Bahnelemente ist in Tabelle 5.9 wiedergegeben. Zur Vereinfachung der Darstellung ist (wie auch in den folgenden Tabellen) angenommen worden, daß die Flugbahn zur Zeit  $t = 0$  durch den Koordinatenursprung  $O$  verläuft ( $t_0 = 0, x_0 = y_0 = 0$ ). Der *Siacci-Formelsatz V* findet insbesondere Anwendung beim Schuß im geneigten Gelände.

#### 5.4.9.3. Der Siacci-Ansatz B

Der *Siacci-Ansatz B* ist auf Bahnen der Klasse Boden – Boden zugeschnitten; er folgt aus (5.112), wenn man dort  $\varepsilon = 0$  und  $k_1 = c' =: c\beta$  setzt:

$$k' = c' \cos \vartheta_0, \quad c' = c\beta. \quad (5.113)$$

Der Koeffizient  $\beta$ , der sogenannte *Ausgleichsfaktor*, dient dazu, die Näherungslösung des *Siacci-Verfahrens* an die exakte Lösung der ballistischen Bewegungsgleichungen anzupassen. Die Anpassung erfolgt hierbei in der Regel bezüglich der Horizontalschußweite  $x_e$ .

Die Anpassung der Lösung des klassischen Bahnmodells an die experimentell ermittelte Schußweite erfolgt in der üblichen Weise mit Hilfe des globalen Formkoeffizienten  $i_g$ , der in dem Ansatz für  $c$  enthalten ist (siehe Abschnitt 3.6.3.2.).

Für das sowjetische Luftwiderstandsgesetz 1943 und die Atmosphäre ANA liegt eine ausführliche Tabelle der Ausgleichsfaktoren  $\beta$  vor; als Tafeleingänge dienen  $c, v_0$  und  $\vartheta_0$ .

Einen Überblick über den Verlauf des Ausgleichsfaktors vermittelt Bild 5.11; die Formeln für die Bahnelemente beim Ansatz (5.113) sind in Tabelle 5.10 zusammengestellt.

Tabelle 5.10 *Siacci-Formelsatz VI: Bahnelemente nach dem Verfahren von Siacci (Ansatz B)*

$k' = c' \cos \vartheta_0; \quad c' = c \beta, \quad x_0 = v_0 / \cos \vartheta_0$
$x = \frac{1}{v_0 c'} [D(U) - D(v_0 v_0)], \quad t = \frac{1}{c' \cos \vartheta_0} [T(U) - T(v_0 v_0)];$
$p = \tan \vartheta_0 - \frac{v_0}{2 c' \cos^2 \vartheta_0} [J(U) - J(v_0 v_0)];$
$y = x \tan \vartheta_0 - \frac{v_0 x}{2 c' \cos^2 \vartheta_0} \left[ \frac{A(U) - A(v_0 v_0)}{D(U) - D(v_0 v_0)} - J(v_0 v_0) \right];$
<p>Bedingungsgleichung für den Gipfelpunkt:</p> $J(U_g) = \frac{2 c'}{v_0} \cos^2 \vartheta_0 + J(v_0 v_0);$
<p>Bedingungsgleichung für den Auftreffpunkt in der Mündungsebene:</p> $f_0(x'_e, U_0) = f_0(v_0 c' x_e; v_0 v_0) = \frac{c'}{v_0} \sin 2 \vartheta_0.$

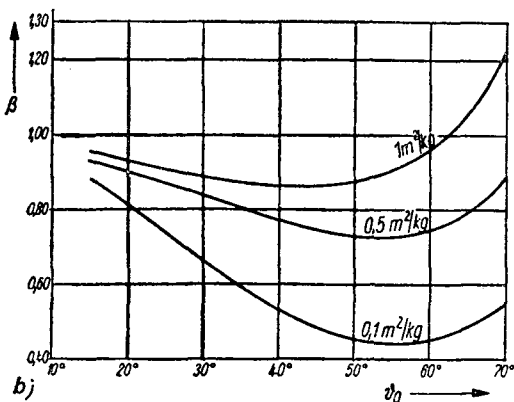
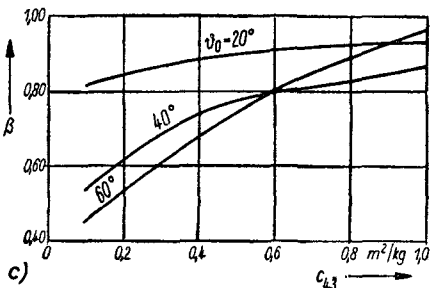
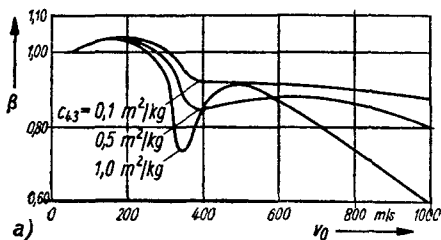


Bild 5.11  
Ausgleichsfaktoren  $\beta$  als  
Funktion

a - der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  ( $\vartheta_0 = 30^\circ$ ;  $c_{43} = 0,1$ ;  $0,5$ ;  $1,0 \text{ m}^2/\text{kg}$ ); b - des Abgangswinkels  $\vartheta_0$  ( $v_0 = 900 \text{ m/s}$ ;  $c_{43} = 0,1$ ;  $0,5$ ;  $1,0 \text{ m}^2/\text{kg}$ ); c - des Ballistischen Koeffizienten  $c_{43}$  ( $v_0 = 900 \text{ m/s}$ ;  $\vartheta_0 = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$ )

#### 5.4.9.4. Der Siacci-Ansatz C

Die Tabelle der Ausgleichsfaktoren  $\beta$  ermöglicht, auch für große Abgangswinkel die Horizontalschußweite relativ genau zu ermitteln. Bei den anderen Flugbahnelementen im Auftreffpunkt wird die Übereinstimmung zwischen der *Siacci*-Näherungslösung und der Lösung der exakten Bewegungsgleichungen jedoch mit wachsendem Abgangswinkel rasch schlechter. Es ist deshalb empfehlenswert, die *Siacci*-Lösung nur in dem Winkelbereich zu benutzen, in dem  $\beta = 1$  gesetzt werden kann: bei Bahnen der Klasse Boden – Boden für Abgangswinkel  $\vartheta_0 < 5^\circ$ .

Bei kleinen Abgangswinkeln hat die durchquerte Schicht der Atmosphäre eine geringe Höhenausdehnung, so daß man (mit einer meist ausreichenden Genauigkeit) die Mittelwerte der meteorologischen Elemente gleich den Bodenwerten der entsprechenden Normalatmosphäre setzen kann.

Der *Siacci*-Ansatz C lautet damit

$$\beta = 1, \quad \nu_0 = 1: \quad c' = c, \quad U = v \frac{\cos \hat{\vartheta}}{\cos \vartheta_0}. \quad (5.114)$$

Tabelle 5.11 *Siacci-Formelsatz VII: Bahnelemente nach dem Verfahren von Siacci (Ansatz C)*

$k' = c \cos \vartheta_0; \quad \nu_0 = 1; \quad \kappa_0 = 1/\cos \vartheta_0$
$x = \frac{1}{c} [D(U) - D(v_0)], \quad t = \frac{1}{c \cos \vartheta_0} [T(U) - T(v_0)];$
$p = \tan \vartheta_0 - \frac{1}{2 c \cos^2 \vartheta_0} [J(U) - J(v_0)];$
$y = x \tan \vartheta_0 - \frac{x}{2 c \cos^2 \vartheta_0} \left[ \frac{A(U) - A(v_0)}{D(U) - D(v_0)} - J(v_0) \right];$
<p>Bedingungsgleichung für den Gipfelpunkt:</p> $J(U_g) = 2 c \cos^2 \vartheta_0 + J(v_0);$
<p>Bedingungsgleichung für den Auftreffpunkt in der Mündungsebene:</p> $f_0(c x_e, v_0) = c \sin 2\vartheta_0.$

Diese Festlegungen sind insbesondere in der Schützenaffenballistik verbreitet.

Der Formelsatz für die Bahnelemente, der sich unter den Voraussetzungen (5.114) ergibt, ist in Tabelle 5.11 enthalten.

#### 5.4.9.5. Der Siacci-Ansatz D

Der vierte der hier zu besprechenden Ansätze ist auf die abschnittsweise (iterative) Berechnung von Fla-Bahnen zugeschnitten. Man setzt in (5.112):

$$\varepsilon = \vartheta_0; \quad \varrho(y) \approx \varrho(\bar{y}) =: \varrho_0; \quad a(y) \approx a(\bar{y}) = a_0,$$

wobei die Mittelwerte der meteorologischen Elemente jeweils auf den betrachteten, relativ kurzen Bahnabschnitt bezogen sind. Unter diesen Voraussetzungen wird  $k' = k_1$ , wobei  $k_1$  Gleichung (5.112) zu entnehmen ist.

Der entsprechende Formelsatz für die Bahnelemente ist in Tabelle 5.12 zusammengestellt.

Tabelle 5.12 *Siacci-Formelsatz VIII: Bahnelemente nach dem Verfahren von Siacci (Ansatz D)*

$k' = k_1; \quad k_1 = c H_{70}; \quad \alpha_0 = v_0 / \cos \vartheta_0$
$p = \tan \vartheta_0 - \frac{v_0}{2 k_1 \cos \vartheta_0} [J(U) - J(v_0 v_0)];$
$x = \frac{\cos \vartheta_0}{v_0 k_1} [D(U) - D(v_0 v_0)], \quad t = \frac{1}{k_1} [T(U) - T(v_0 v_0)];$
$y = x \tan \vartheta_0 - \frac{v_0 x}{2 k_1 \cos \vartheta_0} \left[ \frac{A(U) - A(v_0 v_0)}{D(U) - D(v_0 v_0)} - J(v_0 v_0) \right];$
<p>Bedingungsgleichung für den Gipfelpunkt:</p>
$J(U_g) = \frac{2 k_1}{v_0} \cos \vartheta_0 + J(v_0 v_0);$
<p>Bedingungsgleichung für den Auftreffpunkt in der Mündungsebene:</p>
$f_0(x'_e, U_0) = f_0\left(\frac{v_0 k_1}{\cos \vartheta_0} x_e, v_0 v_0\right) = \frac{2 k_1}{v_0} \sin \vartheta_0.$

Ermittelt man den  $k'$ -Wert durch die Anpassungsbedingung

*Schußweite nach dem Siacci-Verfahren = experimentell ermittelte Schußweite,*

so kompensiert  $k'$  global sowohl den Schußweitenfehler, der von den Idealisierungen des Bahnmodells herrührt, wie auch den Schußweitenfehler, der durch die genäherte Lösung der Bewegungsgleichungen entsteht. Der Schluß von dem  $k'$ -Wert auf den Ballistischen Koeffizienten (bzw. den globalen Formkoeffizienten) ist deshalb nicht eindeutig. Die für  $c$  (und  $i$ ) gefundenen Zahlenwerte unterscheiden sich, je nachdem, welche Darstellung für  $k'$  bei der Ermittlung von  $c$  bzw.  $c'$  aus  $k'$  zugrunde gelegt wird. Hierauf ist bei der praktischen Rechnung mit *Siacci-Formeln* zu achten.

#### 5.4.10. Einige Anwendungen der *Siacci-Formeln*

##### 5.4.10.1. Das Schwenken von *Siacci-Flugbahnen*

Nimmt man an, daß der Parameter  $k'$  des allgemeinen *Siacci-Ansatzes*  $E = k' G(U)$  nicht vom Abgangswinkel  $\vartheta_0$  abhängt, also  $\partial k' / \partial \vartheta_0 = 0$  ist, dann sind die Bahnen der Flugbahnschar mit variablem Abgangswinkel nach dem Verfahren des sogenannten Angerlutenschwenkens ineinander überführbar ( $v_0 = \text{const}$ ,  $k' = \text{const}$ ). Der Nachweis dieser für die Praxis bedeutungsvollen Eigenschaft läßt sich leicht erbringen, wenn man die in Abschnitt 4.2.9. eingeführten schiefwinkligen Koordinaten benutzt.

Das  $\{\xi, \eta, q, U\}$ -System (4.38) geht mit  $E = k' G(U)$ ,  $g = g_{0N}$ ,  $v = v_0$  über in:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{U}{v_0}, & \xi(0) &= 0; \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{qU}{v_0}, & \eta(0) &= 0; \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{v_0 g_{0N}}{U}, & q(0) &= 0; \\ \frac{dU}{dt} &= -k' G(U)U, & U(0) &= v_0 v_0. \end{aligned} \tag{5.115}$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems ist eine Funktion der Flugzeit  $t$  sowie der drei Parameter  $v_0$ ,  $k'$  und  $v_0$ , hängt also nicht von dem Abgangswinkel  $\vartheta_0$  ab.

Sind die Parameter  $v_0$ ,  $k'$ ,  $v_0$  konstant (vorgegeben), so haben alle Bahnen der Flugbahnschar mit variablem Abgangswinkel zur Zeit  $t = t^*$  die gleichen schiefwinkligen Koordinaten:

$$\xi = \xi^* = \xi(t^* | v_0, k', v_0), \quad \eta = \eta^* = \eta(t^* | v_0, k', v_0);$$

$$q = q^* = q(t^* | v_0, k', v_0), \quad U = U^* = U(t^* | v_0, k', v_0).$$

Unter Beachtung der Definition des schiefwinkligen  $\xi, \eta$ -Systems ist das aber gerade die Eigenschaft des Angelrutenschwenkens (siehe Bild 5.12).

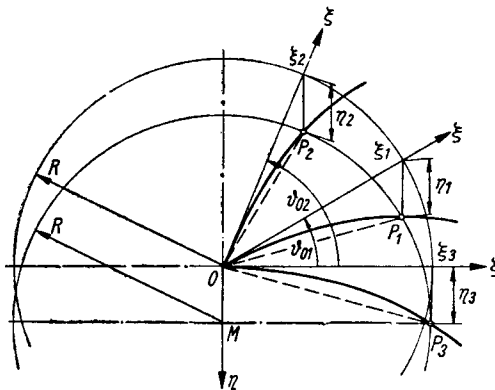


Bild 5.12  
Schwenken von Stacci-Flugbahnen im Fall eines  $\vartheta_0$ -unabhängigen Anpassungsfaktors  $k'$  ( $\partial k' / \partial \vartheta_0 = 0$ )

Die Vorgabe eines linearen Luftwiderstandsgesetzes führte auf  $E = E_0 = const$  (siehe Abschnitt 5.3.1.). Da die Festlegung  $E = const$  in dem allgemeinen Stacci-Ansatz  $E = k' G(U)$  für  $G(U) = const$  enthalten ist, sind die Formeln für die Bahnelemente beim linearen Widerstandsgesetz Spezialfälle der Stacci-Formeln in Tabelle 5.9. Hieraus ergibt sich unter anderem die Folgerung, daß das Angelrutenschwenken auch beim linearen Widerstandssatz zulässig ist. Damit ist der noch unerledigte Beweis aus Abschnitt 5.3.1.4. nachgeholt.

Die Isochronen der Flugbahnschar mit variablem Abgangswinkel sind Kreise. Die Mittelpunkte  $M$  dieser Kreise haben die Koordinaten  $(0, -\eta^*)$ , ihre Radien betragen  $R = \xi^*$ .



Um die Gleichung der Isochronen zu erhalten, hat man aus den Transformationsformeln

$$x^* = \xi^* \cos \vartheta_0, \quad y^* = \xi^* \sin \vartheta_0 - \eta^*$$

den Abgangswinkel  $\vartheta_0$  zu eliminieren:

$$\sin^2 \vartheta_0 + \cos^2 \vartheta_0 = \left( \frac{x^*}{\xi^*} \right)^2 + \left( \frac{y^* + \eta^*}{\xi^*} \right)^2 = 1.$$

Das ist die Gleichung eines Kreises mit den laufenden Koordinaten  $x^*$ ,  $y^*$ , dem Radius  $R = \xi^*$  und dem Mittelpunkt  $M = (0, -\eta^*)$ . Das Angelrutenschwenken von Flugbahnen liegt den Schwebekreisvisieren für kleinkalibrige Fla-Waffen zugrunde.

#### 5.4.10.2. Der Aufsatzwinkel beim Schießen mit Geländewinkel

Für das Schießen auf ein Ziel, das unter einem Geländewinkel  $\varepsilon \neq 0$  erscheint, war in Tabelle 5.9 der *Siacci*-Formelsatz V angegeben worden. Es soll nun gezeigt werden, daß bei Gültigkeit dieser Beziehungen die *Lendersche* Formel (2.115) auch im luftgefüllten Raum anwendbar ist.

Die Formel für die Flugbahnordinate  $y$  (Tabelle 5.9) kann mit Hilfe der Sekundären *Siacci*-Funktion  $f_0$  in der Form geschrieben werden

$$y = x \tan \vartheta_0 - \frac{v_0 x \cos \varepsilon}{2 k_1 \cos^2 \vartheta_0} f_0(x', U_0), \quad (5.116)$$

$$x' = \frac{v_0 k_1 x}{\cos \varepsilon}, \quad U_0 = v_0 v_0.$$

Drückt man die rechtwinkligen Koordinaten  $x, y$  durch Polarkoordinaten  $D, \varepsilon$  aus, so gilt (siehe Bild 2.12, Seite 39):

$$x = D \cos \varepsilon, \quad y = D \sin \varepsilon,$$

und (5.116) geht über in

$$\sin \varepsilon = \cos \varepsilon \tan \vartheta_0 - \frac{v_0 \cos^2 \varepsilon}{2 k_1 \cos^2 \vartheta_0} f_0(v_0 k_1 D, v_0 v_0). \quad (5.117)$$

Es sei nun  $\alpha_0$  derjenige Abgangswinkel, unter dem die Horizontalschußweite  $x_e = D$  erreicht wird. Mit  $\varepsilon = 0$ ,  $\vartheta_0 = \alpha_0$  erhält die Bedingungsgleichung für den Auftreffpunkt in der Mündungsebene (Tabelle 5.9) die Gestalt

$$f_0(v_0 k_1 D, v_0 v_0) = \frac{k_1}{v_0} \sin 2\alpha_0.$$

Einsetzen dieser Beziehung in (5.117) ergibt eine Beziehung zwischen den Winkeln  $\alpha_0$ ,  $\varepsilon$  und  $\vartheta_0$ :

$$\sin \varepsilon = \cos \varepsilon \tan \vartheta_0 - \frac{\sin 2\alpha_0 \cos^2 \varepsilon}{2 \cos^2 \vartheta_0}.$$

Durch die in Abschnitt 2.9.1. wiedergegebenen trigonometrischen Umformungen erhält man hieraus die *Lendersche Formel*:

$$\sin(2\alpha + \varepsilon) = \sin 2\alpha_0 \cos^2 \varepsilon + \sin \varepsilon,$$

die für kleine Aufsatzwinkel ( $\alpha, \alpha_0 \ll 1$ ) übergeht in

$$\alpha \approx \alpha_0 \cos \varepsilon.$$

Die Gültigkeit der *Lenderschen Formel* erleichtert die praktischen Berechnungen sehr, da mit ihrer Hilfe ein *außerhalb* der Mündungsebene liegendes Ziel durch ein fiktives Ziel in der Mündungsebene ersetzt werden kann (siehe das Zahlenbeispiel in Abschnitt 5.4.10.4.).

#### 5.4.10.3. Näherungsformeln für die vertikale Fallstrecke eines Geschosses<sup>1)</sup>

Ist die Flugbahn rasant und die Schußentfernung gering, so läßt sich die Flugbahn mit meist ausreichender Genauigkeit durch eine Gerade approximieren. Als Maß für die Zulässigkeit dieser Näherungsannahme kann die Fallstrecke  $\eta$  dienen, um die das Geschöß am Ende des betreffenden Flugbahnabschnitts unter die Abgangslinie abgesunken ist (siehe Bild 5.12). Unter der Voraussetzung eines Potenzgesetzes für die Widerstandsfunktion  $G(U)$ ,

$$G(U) = B_n U^{n-1},$$

lassen sich einfache geschlossene Formeln für  $\eta$  angeben.

<sup>1)</sup> Die Ausführungen dieses Abschnitts stellen eine Verallgemeinerung der in Abschnitt 5.3.1.5. durchgeführten Untersuchungen dar.

Für  $n = 1$  wird  $E = k' B_1 = : E_0$ ; es liegt der Fall des in Abschnitt 5.3.1. behandelten linearen Widerstandsgesetzes vor.

Aus (5.37) und (5.38) folgt für den horizontalen Abschub ( $\vartheta_0 = 0$ )<sup>1)</sup>:

$$\eta = \frac{g_0}{E_0^2} (e^{-E_0 t} - 1) + \frac{g_0}{E_0} t; \quad u = u_0 e^{-E_0 t}.$$

Die Kombination dieser beiden Beziehungen liefert

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} g_0 t^2 \left[ 2 \cdot \frac{e^{-E_0 t} - 1 + E_0 t}{(E_0 t)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} g_0 t^2 \left[ 2 \cdot \frac{(u/u_0) - 1 - \ln(u/u_0)}{\ln^2(u/u_0)} \right]. \end{aligned}$$

Für die Fallstrecke  $\eta$  kann man somit schreiben ( $u/u_0 = U/U_0$ ):

$$\eta = \eta_{\text{vak}} \Phi_1(U/U_0), \quad \eta_{\text{vak}} := \frac{1}{2} g_0 t^2; \quad (5.118)$$

$$\Phi_1(z) := 2 \cdot \frac{z - 1 - \ln z}{\ln^2 z}. \quad (5.119)$$

Die Fallstrecke  $\eta$  ist somit gleich der Fallstrecke im Vakuum  $\eta_{\text{vak}}$  nach der gleichen Flugzeit  $t$ , multipliziert mit einer Korrekturfunktion  $\Phi_1(U/U_0)$ .

Für die Potenzansätze mit  $n = 2$  und  $n = 3/2$  ergeben sich entsprechend die Korrekturfunktionen<sup>2)</sup>:

$$\Phi_{3/2}(z) := \frac{1}{3} (1 + \sqrt{z}), \quad (5.120)$$

$$\Phi_2(z) := \frac{1}{2} + \frac{z}{1-z} + \left( \frac{z}{1-z} \right)^2 \ln z. \quad (5.121)$$

Die Korrekturfunktionen  $\Phi_1$ ,  $\Phi_{3/2}$  und  $\Phi_2$  liefern trotz der unterschiedlichen Luftwiderstandsgesetze, die ihnen zugrunde liegen, nahezu gleiche Werte, wie ein Blick auf Tabelle 5.13 zeigt.

<sup>1)</sup> Wegen der Zulässigkeit des „Angelrutenschwenkens“ der Flugbahn kann man sich bei den Rechnungen auf den Spezialfall  $\vartheta_0 = 0$  beschränken.

<sup>2)</sup> Hinsichtlich der Herleitung dieser Beziehungen siehe Übungsaufgabe 5.15.

Tabelle 5.13 Korrekturfunktionen  $\Phi_i(z)$  für die Fallstrecke

$z = U/U_0$	$\Phi_1(z)$	$\Phi_{3/2}(z)$	$\Phi_2(z)$
1,0	1,0000	1,0000	1,0000
0,9	0,9673	0,9657	0,9650
0,8	0,9298	0,9295	0,9296
0,7	0,8911	0,8910	0,8914
0,6	0,8494	0,8496	0,8506
0,5	0,8040	0,8047	0,8069
0,4	0,7534	0,7549	0,7594
0,3	0,6953	0,6984	0,7074
0,2	0,6250	0,6314	0,6494
0,1	0,5291	0,5441	0,5827

Der Verlauf der Funktionen  $\Phi_i$  ist in Bild 5.13 veranschaulicht. Eine ausführliche Tabelle der Funktion  $\Phi_2(z)$  findet man im Anhang, Tafel VII.

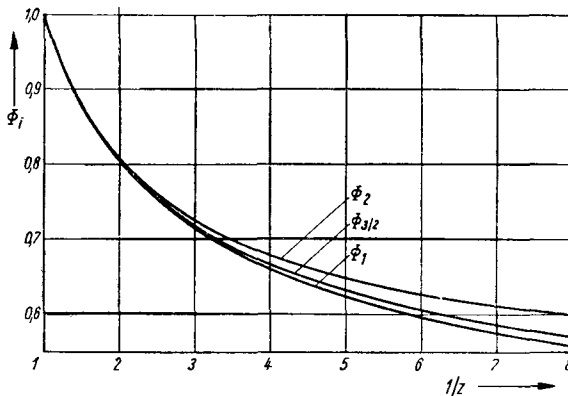


Bild 5.13  
Korrekturfunktionen  
für die Fallstrecke  
 $\Phi_i(z)$  als Funktion  
von  $1/z$

#### 5.4.10.4. Ein Zahlenbeispiel für die Anwendung der Siacci-Funktionen

Ein Infanteriegeschoss (Geschoßmasse  $m = 7,9$  g; Kaliber  $d = 7,62$  mm) erreicht bei der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 710$  m/s unter dem Abgangswinkel  $\vartheta_0 = 0^\circ 38'$  eine Horizontalschußweite  $x_e = 600$  m. Unter Verwendung des Siacci-Formelsatzes VII (Tabelle 5.9) und der Lenderschen Formel in der vereinfachten Form  $\alpha = \alpha_0 \cos \varepsilon$  seien zu berechnen:

- der Ballistische Koeffizient  $c_{43}$  und der globale Formkoeffizient  $i_{43}$ , bezogen auf das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943;
- der Abgangswinkel  $\vartheta_{0E}$ , der erforderlich ist, um ein Ziel mit den Koordinaten  $x_E = 300$  m,  $y_E = 50$  m zu treffen;
- die Flugbahnelemente im Auftreffpunkt  $E = (x_E, y_E)$ .

Zu a): Die Sekundäre *Siacci*-Funktion  $f_1$  hat mit den angegebenen Zahlenwerten und  $x'_e = c_{43} x_e$  den Wert

$$f_1(x'_e, v_0) = \frac{v_0^2 \sin 2 \vartheta_0}{x_e} = \frac{710^2 \cdot 0,022106}{600} = 18,57.$$

Da der Funktionswert  $f_1$  sowie  $v_0$  bekannt sind, ergibt sich  $x'_e$  durch doppelte Interpolation in der  $f_1$ -Tabelle (Anhang, Tafel VIb); siehe Tabelle 5.14<sup>1)</sup>.

Tabelle 5.14:  $f_1(x'_e, v_0)$

$x'_e \backslash v_0$	725	710	700
5000	18,14	18,24	18,31
5119,6		18,57	
5250	18,83	18,93	18,99

Hieraus folgt

$$c_{43} = \frac{x'_e}{x_e} = \frac{5119,6 \text{ m}^2}{600 \text{ kg}} = 8,5327 \text{ m}^2/\text{kg};$$

und für den globalen Formkoeffizienten  $i_{43}$  erhält man

$$i_{43} = \frac{c_{43} m}{d^2} \cdot 10^{-3} = \frac{8,5327 \text{ m}^2/\text{kg} \cdot 7,9 \text{ g} \cdot 10^{-3}}{(7,62 \text{ mm})^2} = 1,161.$$

Zu b): Um die *Lendersche* Formel anwenden zu können, benötigt man den Abgangswinkel  $\alpha_0$ , unter dem ein Ziel erreicht wird, das in der Mündungsebene in einer Entfernung liegt, die dem Betrag nach gleich der Schrägentfernung  $D_e$  der Aufgabenstellung ist:

$$D_e = \sqrt{x_E^2 + y_E^2} = \sqrt{9,25} \cdot 10^2 \text{ m} = 304,14 \text{ m}.$$

Den Funktionswert der Sekundären *Siacci*-Funktion  $f_0(x'_D, v_0)$  an der Stelle  $x'_D := c_{43} D_e = 2595,1 \text{ m}^3/\text{kg}$ ;  $v_0 = 710 \text{ m/s}$  erhält man wieder durch doppelte Interpolation, siehe Tabelle 5.15.

Tabelle 5.15:  $f_0(x'_D, v_0)$

$x' \backslash v_0$	720	710	700
2500	0,06214	0,06407	0,06600
2595,1		0,06730	
2600	0,06543	0,06747	0,06950

1) Interpolierte Zahlenwerte für Zwischenrechnungen sind kursiv gedruckt, desgleichen die Endergebnisse.

Unter Beachtung der Definitionsgleichung für  $f_0$  (Tabelle 5.7) erhält man somit

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{f_0(x'_D, v_0)}{c_{43}} = \frac{0,06730}{8,5327} = 0,007887;$$

$$\alpha_0 = 13,6'.$$

Der Geländewinkel zum Ziel  $\varepsilon$  ergibt sich aus

$$\tan \varepsilon = \frac{y_E}{x_E} = \frac{50}{300} = 0,16667; \quad \varepsilon = 9^\circ 27,8'.$$

Für den Aufsatzwinkel  $\alpha_E$ , der zu wählen ist, um das Ziel mit den Koordinaten  $x_E, y_E$  zu treffen, liefert die *Lendersche* Formel

$$\alpha_E = \alpha_0 \cos \varepsilon = 13,6' \cdot 0,98639 = 13,4';$$

der gesuchte Abgangswinkel  $\vartheta_{0E}$  lautet damit

$$\vartheta_{0E} = \alpha_E + \varepsilon = 9^\circ 41,2'.$$

Zu c): Die Bahnelemente  $t_E, \vartheta_E$  und  $v_E$  im Auftreffpunkt  $E = (x_E, y_E)$  erhält man mit Hilfe der Formeln

$$D(U_E) = c_{43} x_E + D(v_0),$$

$$t_E = \frac{1}{c_{43} \cos \vartheta_{0E}} [T(U_E) - T(v_0)],$$

$$\tan \vartheta_E = \tan \vartheta_{0E} - \frac{1}{2c_{43} \cos^2 \vartheta_{0E}} [J(U_E) - J(v_0)],$$

$$v_E = U_E \frac{\cos \vartheta_{0E}}{\cos \vartheta_E}.$$

Aus der Tabelle der Primären *Siacci*-Funktionen (Anhang, Tafel V) entnimmt man  $D(v_0) = 8091,0$ .<sup>1)</sup> Damit folgt aus der ersten Gleichung

$$D(U_E) = 8,5327 \cdot 300 + 8091,0 = 10650,8.$$

Die Zahlenwerte  $J(U_E), T(U_E), U_E$  ermittelt man durch Interpolation in der Tabelle der Primären *Siacci*-Funktionen, siehe Tabelle 5.16.

Tabelle 5.16

$D(U_E)$	$J(U_E)$	$T(U_E)$	$U_E$
10650	0,281962	11,4300	469,5
10650,8	0,282033	11,4317	469,4
10660	0,282853	11,4513	468,7

<sup>1)</sup> Die Maßeinheiten der Primären *Siacci*-Funktionen sind bei den folgenden Rechnungen weggelassen.

Mit  $\vartheta_0 = 0,98574$ ,  $\tan \vartheta_0 = 0,17069$ ,  $\sin 2\vartheta_0 = 0,33172$  ergibt sich für die Bahnelemente im Punkt E:

$$t_E = \frac{11,4317 - 6,99493}{8,5327 \cdot 0,98574} \text{ s} = 0,527 \text{ s};$$

$$\tan \vartheta_E = 0,17069 - \frac{0,282033 - 0,128999}{2 \cdot 8,5327 \cdot 0,98574^2} = 0,16146;$$

$$\vartheta_E = 9^\circ 10,1';$$

$$v_E = 469,4 \cdot \frac{0,98574}{0,98722} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 468,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Eine indirekte Bestätigung, daß im vorliegenden Fall die vereinfachte *Lendersche* Formel hinreichend genaue Werte liefert, ergibt sich, wenn man unter Verwendung des ermittelten  $c_{43}$ -Wertes  $y_E$  berechnet. Um die Formel für  $y_E$ ,

$$y_E = x_E \tan \vartheta_{0E} \left[ 1 - \frac{f_0(x'_E, v_0)}{c_{43} \sin 2\vartheta_{0E}} \right],$$

anwenden zu können, muß  $f_0(x'_E, v_0)$  durch doppelte Interpolation in der  $f_0$ -Tabelle ermittelt werden.

Mit  $x'_E = c_{43} x_E = 2559,8 \text{ m}^3/\text{kg}$ ;  $v_0 = 710 \text{ m/s}$  findet man  $f_0(x'_E, v_0) = 0,06610$ . Dies in die Formel für  $y_E$  eingesetzt, ergibt

$$y_E = 300 \cdot 0,17069 \cdot \left( 1 - \frac{0,06610}{8,5327 \cdot 0,33172} \right) \text{ m} = 50,01 \text{ m}.$$

Der berechnete  $y_E$ -Wert stimmt mit dem Ordinatenwert der Aufgabenstellung ( $y_E = 50 \text{ m}$ ) praktisch überein.

## 5.5. Lösung des Hauptproblems der Äußeren Ballistik durch Potenzreihenansätze

### 5.5.1. Mathematische Vorbemerkungen

Ein häufig angewandtes Verfahren zur Lösung von Anfangswertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen besteht darin, die gesuchte Lösung als Potenzreihe der unabhängigen Variablen – mit zunächst noch unbestimmten Koeffizienten – anzusetzen.<sup>1)</sup> Führt man diesen Ansatz in die Differentialgleichungen ein, so müssen die Summen der Koeffizienten gleich hoher Potenzen der unabhängigen Variablen jeweils Null ergeben. Diese Bedingungsgleichungen genügen zur sukzessiven Berechnung der Entwicklungskoeffizienten des Potenzreihenansatzes.

<sup>1)</sup> Auf die in der Ballistik wichtigen Entwicklungen nach Potenzen eines *Parameters* wird in den folgenden Abschnitten eingegangen.

Bei dem geschilderten Vorgehen ergeben sich insofern Schwierigkeiten, als die Konvergenz der erhaltenen Reihenentwicklungen nicht von vornherein feststeht. Hierzu sind besondere Untersuchungen erforderlich, die – im Falle der ballistischen Bewegungsgleichungen – allerdings noch zu keinem endgültigen Ergebnis geführt haben.

Die Methodik der Lösung von Anfangswertproblemen mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden.

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{z} = z, \quad z(0) = 1. \quad (5.122)$$

Um die Lösung  $z = \varphi(t)$  von (5.122) zu ermitteln, geht man mit dem Ansatz

$$z = \varphi(t) \equiv a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$$

in (5.122) ein. Hierbei ergibt sich

$$\dot{\varphi}(t) = \varphi(t), \quad \varphi(0) = 1$$

bzw. ausführlich

$$\begin{aligned} a_1 + 2 a_2 t + 3 a_3 t^2 + \dots + n a_n t^{n-1} + \dots \\ = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n + \dots; \\ a_0 = 1. \end{aligned}$$

Zusammenfassung der gleich hohen Potenzen von  $t$  liefert

$$\begin{aligned} (a_1 - 1) + (2 a_2 - a_1) t + (3 a_3 - a_2) t^2 + \dots \\ + (n a_n - a_{n-1}) t^{n-1} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für beliebige (endliche)  $t$  erfüllt, wenn man die Koeffizienten der Glieder mit  $t^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) gleich Null setzt:

$$\begin{aligned} a_1 - 1 = 0, \quad a_1 = 1 = \frac{1}{1!}; \\ 2 a_2 - a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}; \\ 3 a_3 - a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3} a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3!}; \\ \dots \quad \dots \\ n a_n - a_{n-1} = 0, \quad a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} = \frac{1}{n!}; \\ \dots \quad \dots \end{aligned}$$



Die Lösung des Anfangswertproblems (5.122) lautet damit

$$z = \varphi(t) \equiv 1 + \frac{1}{1!} t + \frac{1}{2!} t^2 + \dots + \frac{1}{n!} t^n + \dots$$

Diese Potenzreihe ist aber gerade die Reihendarstellung der Exponentialfunktion  $e^t$ , so daß man die Lösung auch  $z = e^t$  schreiben kann. Die Anfangsbedingung  $z(0) = 1$  ist erfüllt.

Das Anfangswertproblem (5.122) ist ein Spezialfall des Anfangswertproblems

$$\dot{z} = f(t, z), \quad z(t_0) = z_0. \quad (5.123)$$

Nimmt man an, daß die Lösung  $z = F(t; t_0, z_0)$  von (5.123) an der Stelle  $t = t_0$  in eine konvergente *Taylor-Reihe* entwickelbar ist,

$$\begin{aligned} z &= F(t_0; t_0, z_0) + \dot{F}(t_0; t_0, z_0) (t - t_0) \\ &+ \frac{1}{2!} \ddot{F}(t_0; t_0, z_0) (t - t_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} F^{(n)}(t_0; t_0, z_0) (t - t_0)^n + \dots, \end{aligned}$$

so können die *Taylor-Koeffizienten* durch die Anfangsbedingung  $z(t_0) = z_0$ , die rechte Seite  $f(t, z)$  von (5.123) und die Ableitungen von  $f(t, z)$  dargestellt werden.<sup>1)</sup> Wie man leicht nachprüft, muß gelten

$$F(t_0; t_0, z_0) = z_0; \quad \dot{F}(t_0; t_0, z_0) = f(t_0, z_0);$$

$$\begin{aligned} \ddot{F}(t_0; t_0, z_0) &= \left[ \frac{d}{dt} f(t, z) \right]_{t=t_0, z=z_0} \\ &= \left[ \frac{\partial f(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right]_{t=t_0, z=z_0} \\ &= \left[ \frac{\partial f(t, z)}{\partial t} + f(t, z) \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} \right]_{t=t_0, z=z_0}. \end{aligned}$$

Die Ableitungen  $F^{(n)}$  werden mit wachsendem  $n$  in der Regel immer komplizierter und unübersichtlicher. Man bricht die Reihenentwick-

<sup>1)</sup> Es wird vorausgesetzt, daß  $f(t, z)$  beliebig oft nach  $t$  und  $z$  differenzierbar ist.

lungen deshalb häufig bereits nach dem linearen (bzw. quadratischen) Glied ab. Die Genauigkeit der auf diesem Wege gewonnenen Näherungslösungen ist für viele Anwendungen ausreichend. In den folgenden Abschnitten soll ein Überblick über die in der Außenballistik gebräuchlichen Reihenentwicklungen gegeben werden.

### 5.5.2. Grundtypen außenballistischer Reihenentwicklungen

Bei den in der Außenballistik benutzten Potenzreihenentwicklungen können zwei Grundtypen unterschieden werden:

- Entwicklungen nach Potenzen einer Bahnvariablen (z. B.  $x, t$ );
- Entwicklungen nach Potenzen eines Bahnparameters (z. B.  $\vartheta_0, c, v_0$ ).

Diese beiden Typen von Entwicklungen unterscheiden sich ballistisch sehr wesentlich.

Die Integration der ballistischen Bewegungsgleichungen liefert die Flugbahnelemente als Funktion der unabhängigen Variablen des gewählten Systems der Bewegungsgleichungen sowie der drei Bahnparameter  $c, v_0, \vartheta_0$ . Im  $x$ -System  $\{x|t, y, u, p\}$  etwa kann man die Lösung des Hauptproblems symbolisch schreiben

$$\begin{aligned} t &= \varphi_t(x; x_0|c, v_0, \vartheta_0), & u &= \varphi_u(x; x_0|c, v_0, \vartheta_0), \\ y &= \varphi_y(x; x_0|c, v_0, \vartheta_0), & p &= \varphi_p(x; x_0|c, v_0, \vartheta_0). \end{aligned} \quad (5.124)$$

Wählt man für die Parameter  $c, v_0, \vartheta_0$  spezielle Zahlenwerte

$$c = \hat{c}, \quad v_0 = \hat{v}_0, \quad \vartheta_0 = \hat{\vartheta}_0,$$

so wird aus der dreiparametrischen Schar der Normalbahnen eine konkrete Bahn ausgesondert. Um die Gesamtheit der Bahnelemente dieser speziellen Bahn zu erhalten, läßt man  $x$  von  $x = 0$  (Abgangspunkt) bis  $x = x_e$  (Auftreffpunkt) wandern.

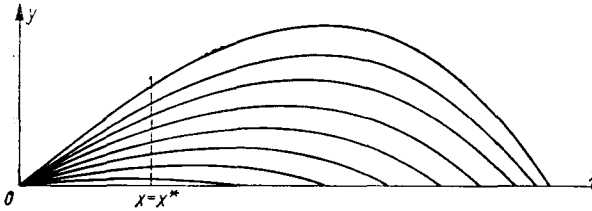
Gibt man nur für zwei der drei Bahnparameter  $c, v_0, \vartheta_0$  spezielle Zahlenwerte vor, so reduziert sich (5.124) auf die Parameterdarstellung einer einparametrischen Flugbahnschar. Bei

$$c = \hat{c} = \text{const}, \quad v = \hat{v}_0 = \text{const}; \quad \vartheta_0: \text{variabel}$$

ist dies die Gesamtheit der Flugbahnen, die mit dem speziellen Geschöß bei beliebigen Abgangswinkeln möglich ist.

Hält man außer dem Ballistischen Koeffizienten und der Anfangsgeschwindigkeit auch die unabhängige Variable  $x$  fest ( $x = x^* = \text{const}$ ), so hat dies die Wirkung, daß die Bahnen der Schar für variablen Abgangswinkel an einer vorgegebenen Stelle  $x = x^*$  miteinander verglichen werden (Bild 5.14).

Aus den durchgeführten Überlegungen ist ersichtlich: *Variierung der unabhängigen Variablen (bei  $c, v_0, \vartheta_0: \text{const}$ ) bewirkt Fortschreiten längs einer speziellen Flugbahn (Trajektorie); Variation eines Bahnparameters bedeutet Übergang zu einer anderen Bahn der Flugbahnschar.*



*Bild 5.14  
Vergleich der Bahn­  
schar mit variablem  
Abgangswinkel an der  
Stelle  $x = x^*$   
( $c = \text{const}; v_0 = \text{const}$ )*

Die Beträge, um die die Bahnelemente bei Änderung eines Bahnparameters variieren, werden nicht allein durch die Größe der Parameteränderung bestimmt; sie hängen ebenfalls davon ab, bezüglich welcher Vergleichsvariablen die wechselseitige Zuordnung der Bahnen der Flugbahnschar erfolgt. Es ist demnach keineswegs unerheblich, ob man bei Variation des Parameters  $\vartheta_0$  die Flugzeit  $t = t^* = \text{const}$  hält oder aber die Flugbahnabszisse  $x = x^* = \text{const}$  (siehe Bild 2.19, Seite 51).

Ein instruktives Beispiel für den Einfluß der Vergleichsvariablen auf Betrag und Vorzeichen der Änderung eines Flugbahnelements (Änderung der Vakuum-Schußweite unter der Voraussetzung  $t = \hat{t}_e = \text{const}$  bzw. der Voraussetzung  $y = \hat{y}_e = 0$ ) folgt in Abschnitt 5.5.5.

### 5.5.3. Potenzreihenentwicklung nach der Horizontalentfernung $x$

Das Ziel der folgenden Überlegungen besteht darin, die Lösung des Hauptproblems der Äußerer Ballistik durch eine Reihenentwicklung nach Potenzen von  $x$  darzustellen. Zu diesem Zweck setzt man die (zunächst noch unbekannt) Lösung des klassischen Bahnmodells als *Taylor-Entwicklung* um den Abgangspunkt  $O$  an.

Bezeichnet man die Ableitungen nach  $x$  mit einem Strich an dem betreffenden Funktionssymbol (z. B.  $dy/dx =: y'$ ), dann gilt

$$\begin{aligned} y &= \varphi_y(x) \equiv y_0 + y'_0 x + \frac{1}{2} y''_0 x^2 + \frac{1}{6} y'''_0 x^3 + \dots; \\ t &= \varphi_t(x) \equiv t_0 + t'_0 x + \frac{1}{2} t''_0 x^2 + \frac{1}{6} t'''_0 x^3 + \dots. \end{aligned} \quad (5.125)$$

Entsprechende Reihenansätze ergeben sich für  $v = \varphi_v(x)^1$  und  $\vartheta = \varphi_\vartheta(x)$ .

Die in (5.125) auftretenden unbekanntenen Ableitungen können mit Hilfe der ballistischen Bewegungsgleichungen durch bekannte Bahnvariable im Abgangspunkt ausgedrückt werden ( $g = g_0 = \text{const}$ )<sup>2</sup>):

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, & t_0 &= 0; \\ y'_0 &= p_0 = \tan \vartheta_0, & t'_0 &= 1/u_0; \\ y'' &= \frac{dp}{dx} = -\frac{g_0}{u^2}, & y''_0 &= -\frac{g_0}{u_0^2}; \\ y''' &= -g_0 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{u^2} \right) = -g_0 \frac{d}{du} \left( \frac{1}{u^2} \right) \cdot \frac{du}{dx} \\ &= -g_0 \left( -\frac{2}{u^3} \right) (-E) = -\frac{2g_0 E}{u^3}, \\ y'''_0 &= -2g_0 \frac{E_0}{u_0^3}; \\ t'' &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{u} \right) = \frac{d}{du} \left( \frac{1}{u} \right) \cdot \frac{du}{dx} = \frac{E}{u^2}, & t''_0 &= \frac{E_0}{u_0^2}. \end{aligned}$$

Verhältnismäßig kompliziert ist bereits die Berechnung der 3. Ableitung von  $t$  nach  $x$ :

$$\begin{aligned} t''' &= \frac{d}{dx} t'' = \frac{d}{dx} \left( \frac{E}{u^2} \right) = \frac{1}{u^2} \left( \frac{dE}{dt} - \frac{2E}{u} \frac{du}{dt} \right) \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{1}{u^3} \left( \frac{\partial E}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial E}{\partial v} \dot{v} + 2E^2 \right). \end{aligned} \quad (5.126)$$

<sup>1</sup>) Siehe Übungsaufgabe 5.17.

<sup>2</sup>) Die *Taylor-Entwicklungen* der Bahnelemente werden in der Regel nur auf Bahnabschnitte angewandt, die sich in unmittelbarer Nachbarschaft des Entwicklungspunktes befinden. In diesem Fall ist die Annahme einer konstanten Fallbeschleunigung gerechtfertigt.

Gemäß (3.95) und (3.96) gilt

$$\frac{\partial b'}{\partial M} = \frac{b'}{M} n(M), \quad \frac{\partial b'}{\partial y} = b' \chi.$$

Unter Beachtung von  $E = E(c, y, v)$ ,  $a = a(y)$  und  $M = v/a$  erhält man somit für die Ableitungen von  $E$  nach  $y$  und  $v$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{b'}{v} \right) = \frac{1}{v} \frac{\partial b'}{\partial y} = E \chi; \\ \frac{\partial E}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{b'}{v} \right) = \frac{1}{v} \frac{\partial b'}{\partial v} - \frac{b'}{v^2} = \frac{1}{v} \frac{\partial b'}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{b'}{v^2} \\ &= \frac{E}{v} [n(M) - 1]. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke für  $\partial E/\partial y$  und  $\partial E/\partial v$  in (5.126) ergibt sich

$$t''' = \frac{1}{u^3} \left[ E w \chi - \frac{E}{v} (n - 1) (b' + g_0 \sin \vartheta) + 2 E^2 \right].$$

Für die Ableitung an der Stelle  $t = t_0$  kann man damit auch schreiben

$$t_0''' = \frac{1}{u_0^3} \left[ E_0 w_0 \chi_0 - E_0 (n_0 - 1) \left( E_0 + \frac{g_0}{v_0} \sin \vartheta_0 \right) + 2 E_0^2 \right].$$

Bricht man die Reihenentwicklung für  $y(x)$  nach dem Glied mit  $x^3$ , die Reihe für  $t$  hingegen bereits nach dem in  $x$  quadratischen Glied ab, so ergeben sich für die Flugbahnordinate und die Flugzeit die *Näherungsformeln*

$$y = p_0 x - \frac{g_0}{2 u_0^2} x^2 - \frac{g_0 E_0}{3 u_0^3} x^3, \quad (5.127)$$

$$t = \frac{x}{u_0} + \frac{E_0}{2 u_0^2} x^2. \quad (5.128)$$

Diese Beziehungen können – nach einigen geringfügigen Modifikationen – zur Berechnung der Bahnelemente rasanter Flugbahnen benutzt werden (siehe [2], § 65).

Gleichung (5.127) kann auch in der Form geschrieben werden

$$y = p_0 x \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{g_0 x}{u_0^2 p_0} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{g_0 E_0}{u_0} x \right) \right]. \quad (5.129)$$

Diese Beziehung bildet den Ausgangspunkt für das Verfahren von *Piton-Bressant/Hélie*.

Nach dem gleichen Schema, nach dem die Potenzreihenentwicklung bezüglich der Abszisse  $x$  abgeleitet worden ist, lassen sich Potenzreihenentwicklungen für andere unabhängige Variable (z.B. die Flugzeit  $t$ ) gewinnen; siehe Übungsaufgabe 5.18.

#### 5.5.4. Das Verfahren von *Piton-Bressant/Hélie*

##### 5.5.4.1. Der Ansatz für die Flugbahngleichung

Der Grundgedanke des Verfahrens von *Piton-Bressant* und *Hélie* (im folgenden kurz als *Verfahren PBH* bezeichnet) besteht darin, die Flugbahn im luftgefüllten Raum durch eine kubische Parabel anzunähern, wobei der Ansatz für die Flugbahngleichung einen zunächst noch freien Koeffizienten enthält, über dessen Zahlenwert mit Hilfe einer geeignet gewählten Anpassungsbedingung verfügt wird.

Setzt man in (5.129):

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \frac{g_0 E_0}{u_0} &= : K, \\ \frac{2 u_0^2 p_0}{g_0} &= \frac{v_0^2}{g_0} \sin 2 \vartheta_0 = : \tilde{x}_e, \end{aligned} \quad (5.130)$$

so erhält man die Flugbahngleichung

$$y = p_0 x \left[ 1 - \frac{x}{\tilde{x}_e} (1 + K x) \right] \quad (5.131)$$

bzw. mit  $Z := 1 + K x$

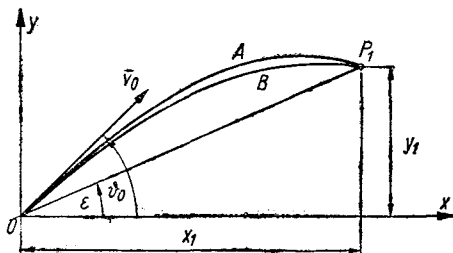
$$y = p_0 x \left( 1 - \frac{x}{\tilde{x}_e} Z \right). \quad (5.132)$$

$\tilde{x}_e$  ist die Vakuum-Schußseite des betreffenden Geschosses (bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit und gleichem Abgangswinkel). Die folgenden Betrachtungen gehen von dem Ansatz (5.131) bzw. (5.132) aus, wobei der Koeffizient  $K$  als (zunächst noch unbestimmter) Anpassungsfaktor interpretiert wird.

#### 5.5.4.2. Die Anpassungsbedingung

Über den Zahlenwert von  $K$ , der in dem Ansatz für die Flugbahn-gleichung (5.131) auftritt, verfügt man so, daß die nach dem Verfahren PBH berechnete Flugbahn „möglichst gut“ mit der realen Flugbahn übereinstimmt, die der Schießversuch (bzw. die Schußtafel) liefert.

Da  $K$  ein Skalar ist, kann man zur Festlegung des Zahlenwerts von  $K$  auch nur eine einzige skalare Bedingung stellen. Es liegt hier die gleiche Problematik vor wie bei der Bestimmung des Formkoeffizienten (siehe Abschnitt 3.6.3.).



**Bild 5.15**  
Zur Anpassungsbedingung beim Ver-fahren PBH  
A – reale Bahn im luftgefüllten Raum;  
B – Näherungsbahn des Ver-fahrens PBH;  $P_1$  – Anpassungspunkt

Wie die Anpassungsbedingung für  $K$  zweckmäßig zu wählen ist, hängt von der jeweils zu behandelnden Aufgabenstellung ab. Im allgemeinen wird gefordert, daß die PBH-Bahn durch einen vorgegebenen Punkt  $P_1 = (x_1, y_1)$  verläuft (Bild 5.15). Mit  $x = x_1$ ,  $y = y_1$  geht (5.132) in eine Bestimmungsgleichung für  $K$  über:

$$y_1 = p_0 x_1 \left( 1 - \frac{x_1}{\tilde{x}_e} Z_1 \right), \quad Z_1 = 1 + K x_1$$

bzw. nach  $Z_1$  aufgelöst:

$$Z_1 = \frac{\tilde{x}_e}{x_1} \left( 1 - \frac{y_1}{p_0 x_1} \right).$$

Mit  $\tan \varepsilon = y_1/x_1$ ,  $\tan \vartheta_0 = p_0$  kann man hierfür schreiben

$$Z_1 = \frac{\tilde{x}_e}{x_1} (1 - \tan \varepsilon \cot \vartheta_0). \quad (5.133)$$

Bei Bahnen der Klasse Boden – Boden ist die Horizontalschußweite  $x_e$  das wichtigste Bahnelement. *Die Anpassung wird deshalb in der Regel so vorgenommen, daß das Verfahren PBH die gleiche Horizontalschußweite liefert wie das Experiment (bzw. die Schußtafel).*

Liegt der Anpassungspunkt  $P_1$  in der Mündungsebene,  $P_1 = E = (x_e, 0)$ , so wird  $\varepsilon = 0$ , und (5.133) vereinfacht sich zu  $Z_1 = Z_e$ ,

$$Z_e = 1 + K x_e = \tilde{x}_e/x_e. \quad (5.134)$$

Für die nichtangepaßten Bahnelemente müssen mehr oder weniger große Abweichungen der PBH-Werte von den realen Flugbahnwerten in Kauf genommen werden. Die Aussagen des Verfahrens PBH sind hierbei um so besser, je parabelähnlicher die Flugbahn ist.

Für die *Vakuumbahn* ( $x_e = \tilde{x}_e$ ) wird  $Z_e = 1$ ,  $K = 0$ . Es gilt also allgemein

$$Z_e \geq 1, \quad K \geq 0.$$

Große  $Z_e$ - und  $K$ -Werte deuten darauf hin, daß die Flugbahn im luft-erfüllten Raum stark von einer Parabel abweicht.

#### 5.5.4.3. Die Formeln für die Bahnelemente

Differenziert man (5.131) nach  $x$ , so ergibt sich eine Formel für die Neigung der Flugbahntangente  $p$ :

$$p = \tan \vartheta = \tan \vartheta_0 \left[ 1 - \frac{x}{\tilde{x}_e} (2 + 3 K x) \right]. \quad (5.135)$$

Auf Grund der zweiten Gleichung des  $p$ -Systems (4.26) gilt

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{u^2}{g_0}; \quad u^2 = -\frac{g_0}{dp/dx}.$$

Mit  $dp/dx$  aus (5.135),

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\tan \vartheta_0}{\tilde{x}_e} (2 + 6 K x) = -\frac{1 + 3 K x}{u_0^2/g_0},$$



erhält man für die *Horizontalkomponente u der Bahngeschwindigkeit*

$$u = u_0 (1 + 3 K x)^{-1/2}. \quad (5.136)$$

Die Formel für die *Bahngeschwindigkeit v* ist eine Kombination der Beziehungen (5.135) und (5.136):

$$v = u \sqrt{1 + p^2}. \quad (5.137)$$

Unter Beachtung von  $dx/dt = u$  ist auch die *Flugzeit t* in geschlossener Form darstellbar. Aus

$$t = \int_0^x \frac{dx}{u} = \frac{1}{u_0} \int_0^x \sqrt{1 + 3 K x} dx,$$

folgt mit der Substitution  $1 + 3 K x =: \zeta$  zunächst

$$t = \frac{1}{3 K u_0} \int_1^\zeta \sqrt{\zeta'} d\zeta' = \frac{2}{9 K u_0} (\zeta^{3/2} - 1),$$

und nach Rücktransformation auf  $x$ :

$$t = \frac{2}{9 K u_0} [(1 + 3 K x)^{3/2} - 1]. \quad (5.138)$$

Damit ist der Verlauf aller Bahnelemente bekannt.

#### 5.5.4.4. Die Bahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt bei Anpassung der Schußweiten

Zur Berechnung der Bahnelemente im Auftreff- und Gipfelpunkt geht man von den Bedingungsgleichungen  $y_e = y_0 = 0$  und  $\vartheta_e = 0$  ( $p_e = 0$ ) aus.

Setzt man in (5.131)  $y = 0$ , so ergibt sich für die *Horizontalschußweite  $x_e$*  die quadratische Gleichung

$$K x_e^2 + x_e = \tilde{x}_e$$

mit der Lösung

$$x_e = \frac{1}{2K} (\sqrt{1 + 4 K \tilde{x}_e} - 1). \quad (5.139)$$

Die *Gipfelabszisse*  $x_g$  erhält man entsprechend aus

$$\begin{aligned} 3K x_g^2 + 2x_g &= \tilde{x}_e, \\ x_g &= \frac{1}{3K} \left( \sqrt{1 + 3K \tilde{x}_e} - 1 \right). \end{aligned} \quad (5.140)$$

Erfolgt die Anpassung der PBH-Bahn an die reale Bahn so, daß die Horizontalschußweiten übereinstimmen, dann ist  $K$  aus (5.134) zu entnehmen.

Für die praktische Rechnung empfiehlt es sich, in den Formeln für die Bahnelemente an Stelle von  $K$  den Parameter  $Z_e = 1 + K x_e$  zu verwenden. Sowohl die Flugbahnelemente des Auftreffpunkts in der Mündungsebene wie auch die Elemente des Flugbahngipfels lassen sich dann als Produkt des betreffenden Bahnelements nach der parabolischen Theorie und einer dimensionslosen Funktion von  $Z_e$  darstellen ( $v_0, \vartheta_0 = \text{const}$ ). Man kann somit symbolisch schreiben

$$\varphi = \tilde{\varphi} \cdot F_\varphi(Z_e), \quad (5.141)$$

wenn man mit  $\varphi$  das Flugbahnelement nach dem Verfahren PBH, mit  $\tilde{\varphi}$  das entsprechende Flugbahnelement nach der parabolischen Theorie<sup>1)</sup> sowie mit  $F_\varphi(Z_e)$  die *Korrekturfunktion* für den Übergang vom luftleeren zum luftgefüllten Raum bezeichnet.

Mit  $x = x_e$  und unter Berücksichtigung der Anpassungsbedingung (5.134) erhält man für die Bahnelemente im Auftreffpunkt

$$\begin{aligned} \tan \vartheta_e &= \tan \vartheta_0 \left[ 1 - \frac{x_e}{\tilde{x}_e} (2 + 3K x_e) \right] \\ &= \tan \vartheta_0 \left( 1 - \frac{3Z_e - 1}{Z_e} \right) = -\tan \vartheta_0 \left( 2 - \frac{1}{Z_e} \right); \\ u_e &= u_0 (1 + 3K x_e)^{-1/2} = u_0 (3Z_e - 2)^{-1/2}; \\ t_e &= \frac{2}{9K u_0} [(1 + 3K x_e)^{3/2} - 1] \\ &= \frac{\tilde{x}_e}{u_0} \cdot \frac{2}{9K x_e (\tilde{x}_e/x_e)} [(1 + 3K x_e)^{3/2} - 1] \\ &= \tilde{t}_e \cdot \frac{2}{9(Z_e - 1) Z_e} [(3Z_e - 2)^{3/2} - 1]. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Die Bahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt nach der parabolischen Theorie sind in Tabelle 2.1, Seite 35, zusammengestellt.

Für die *Abszisse  $x_g$  des Gipfelpunkts* folgt aus (5.140):

$$x_g = \frac{1}{3K} \left[ \sqrt{1 + 3 K x_e (\tilde{x}_e/x_e)} - 1 \right],$$

$$x_g = \tilde{x}_e \cdot \frac{2}{3} \frac{\sqrt{1 + 3 Z_e (Z_e - 1)} - 1}{Z_e (Z_e - 1)}. \quad (5.142)$$

Setzt man dies in (5.132), (5.136) und (5.138) ein, so erhält man die Gipfelhöhe  $y_g$  der Flugbahn, die Bahngeschwindigkeit  $v_g$  im Flugbahngipfel und die Flugzeit  $t_g$  bis zum Gipfel.

Mit den Funktionen

$$F_1(Z) := 2 - Z^{-1};$$

$$F_2(Z) := (3 Z - 2)^{-1/2};$$

$$F_3(Z) := \frac{2}{9} \cdot \frac{(3 Z - 2)^{3/2} - 1}{Z (Z - 1)};$$

$$F_4(Z) := \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + 3 Z (Z - 1)} - 1}{Z (Z - 1)};$$

$$F_5(Z) := F_4(Z) \{ 2 - F_4(Z) [1 + \frac{1}{2} Z (Z - 1) F_4(Z)] \};$$

$$F_6(Z) := [1 + 3 Z (Z - 1)]^{-1/4};$$

$$F_7(Z) := \frac{4}{9} \cdot \frac{[1 + 3 Z (Z - 1)]^{3/4} - 1}{Z (Z - 1)}$$

ergeben sich für die *Bahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt* die Darstellungen

$$\tan |\vartheta_e| = \tan \vartheta_0 \cdot F_1(Z_e);$$

$$v_e \cos \vartheta_e = v_0 \cos \vartheta_0 \cdot F_2(Z_e);$$

$$t_e = \tilde{t}_e \cdot F_3(Z_e);$$

$$x_g = \tilde{x}_g \cdot F_4(Z_e) = \frac{1}{2} \tilde{x}_e \cdot F_4(Z_e);$$

$$y_g = \tilde{y}_g \cdot F_5(Z_e);$$

$$v_g = v_0 \cos \vartheta_0 \cdot F_6(Z_e);$$

$$t_g = \tilde{t}_g \cdot F_7(Z_e) = \frac{1}{2} \tilde{t}_e \cdot F_7(Z_e).$$

Der Verlauf der Funktionen  $F_i(Z)$  ist in Bild 5.16 veranschaulicht. Um die Durchführung numerischer Rechnungen zu erleichtern, sind die Funktionen  $F_i(Z)$  vertafelt worden. Einen Auszug aus dieser Tabelle findet man im Anhang, Tafel VIII.

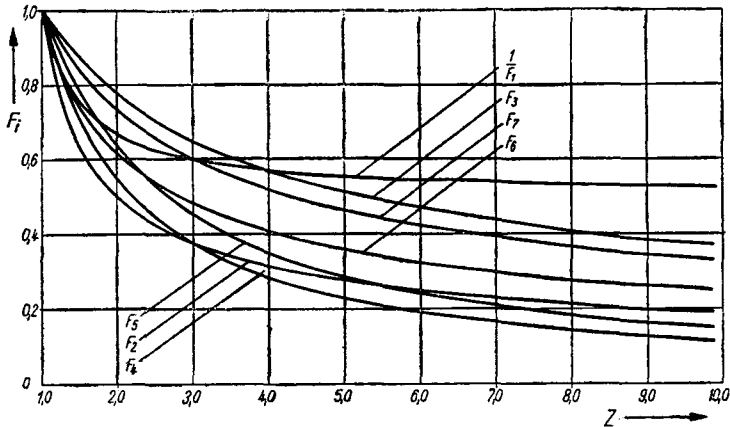


Bild 5.16 Korrekturfunktionen  $F_i(Z)$  des Verfahrens Piton-Bressant/Hélie

#### 5.5.4.5. Ein Zahlenbeispiel für die Anwendung des Verfahrens PBH

Das Hauptanwendungsgebiet des Verfahrens PBH besteht darin, die Bahnelemente von Geschossen mit relativ geringer Anfangsgeschwindigkeit (wie Granatwerfergeschossen) überschlägig zu ermitteln.

Bei einem Schießversuch mit einem Granatwerfer ( $v_0 = 200$  m/s) sei unter dem Abgangswinkel  $\vartheta_0 = 70^\circ$  eine Horizontalschußweite  $x_e = 2000$  m gemessen worden.

Um die übrigen Bahnelemente im Auftreffpunkt sowie die Bahnelemente im Flugbahngipfel zu ermitteln, berechnet man zunächst mit Hilfe der parabolischen Theorie die Bahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt, die dem Abgangswinkel und der Anfangsgeschwindigkeit des Schießversuchs entsprechen.

Nachdem die experimentelle Horizontalschußweite  $x_e$  vorliegt, bildet man  $Z_e = \bar{x}_e/x_e$  und entnimmt Tafel VIII des Anhangs die entsprechenden  $F_i(Z_e)$ -Werte.

Multiplikation der Bahnelemente nach der parabolischen Theorie mit den Korrekturwerten  $F_i(Z_e)$  liefert die Bahnelemente nach dem Verfahren PBH.

Die Ergebnisse der Zahlenrechnungen sind in Tabelle 5.17 zusammengestellt. Zum Vergleich sind die Zahlenwerte angeführt, die sich mit Hilfe des außenballistischen Tafelwerks<sup>1)</sup> (Abschnitt 5.7.2.) sowie des quadratischen Widerstandsgesetzes (Abschnitt 5.3.2.) ergeben.

<sup>1)</sup> Die Zahlenwerte des außenballistischen Tafelwerks sind durch numerische Integration der ballistischen Bewegungsgleichungen gewonnen.

Tabelle 5.17 Vergleich der Resultate verschiedener Berechnungsverfahren für die Flugbahnelemente im Auftreff- und Gipfelpunkt

$$(\vartheta_0 = 200 \text{ m/s}; \quad \hat{\vartheta}_0 = 70^\circ; \quad c_{43} = 1,4125 \text{ m}^2/\text{kg})$$

Spalte	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Flugbahnelement	Parabolische Theorie	Verfahren PBH ( $Z_e = 1,3110$ )		Tabelle Otto-Lardillon	Tafel UdSSR	Relat. Abweichung in ‰	
		$F_i(Z_e)$	Bahnelement			$\frac{(3) - (5)}{(5)}$	$\frac{(4) - (5)}{(5)}$
$x_e$ m	2621,9	1,0000	2000,0	2000,0	2000,0	0	0
$t_e$ s	38,33	0,9198	35,25	35,26	35,15	+2,8	+3,1
$v_e$ m/s	200,0	0,7193	174,6	166,6	165,8	+53,1	+4,8
$ \vartheta_e $ Grad	70°	1,2372	73°38'	73°31'	73°22'	+3,6	+2,0
$x_g$ m	1311,0	0,8029	1052,6	—	—	—	—
$y_g$ m	1800,9	0,8557	1541,0	1520,2	1514,1	+17,8	+4,0
$t_g$ s	19,16	0,8946	17,14	—	—	—	—
$v_g$ m/s	68,4	0,8190	56,02	—	—	—	—

Man erkennt, daß die Genauigkeit der PBH-Werte bei den Flugbahnelementen im Auftreffpunkt (mit Ausnahme der Auftreffgeschwindigkeit) hinreichend gut ist; bei der Gipfelhöhe hingegen muß man größere Abweichungen in Kauf nehmen.

Eine weitere Anwendung des Verfahrens PBH, die Berechnung der Aufsatzwinkelkorrektur bei Verlegung des Auftreffpunkts, wird in Übungsaufgabe 5.21. behandelt.

### 5.5.5. Parameterentwicklungen bezüglich des Abgangswinkels

Entwicklungen nach dem Abgangswinkel  $\vartheta_0$  (bzw. einer Funktion von  $\vartheta_0$ ) sind zur Berechnung der Flugbahnschar mit variablem Abgangswinkel geeignet.

Für unterschiedliche Vergleichsvariable ergeben sich unterschiedliche Parameterentwicklungen. Hierauf ist unbedingt zu achten, zumal man den Potenzreihen nicht ansieht, welche Vergleichsvariable zugrunde liegt. Um den Einfluß der Vergleichsvariablen auf die Gestalt der Parameterpotenzreihen zu zeigen, soll die Änderung der Abszisse  $x$  infolge einer Abgangswinkeländerung  $\Delta\vartheta_0$  in der Umgebung des Auftreffpunkts  $E = (x_e, 0)$  nach Potenzen von  $\Delta\vartheta_0$  entwickelt werden, wobei einmal die Vergleichsvariable  $y = \hat{y}_e = 0$  und im zweiten Fall die Vergleichsvariable  $t = \hat{t}_e = \text{const}$  zugrunde gelegt wird.

Der Einfachheit halber wird der Schußvorgang durch die Formeln der parabolischen Theorie beschrieben.

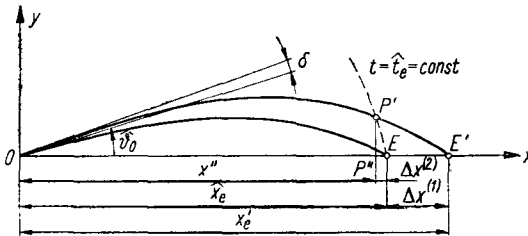
Ändert man den Abgangswinkel  $\vartheta_0$  um den kleinen Winkel  $\delta$  gemäß

$$\vartheta_0 = \vartheta_0 \rightarrow \vartheta_0 = \vartheta_0 + \delta,$$

so wandert der Punkt  $E$

- bei der Vergleichsvariablen  $y = \hat{y}_e = 0$  nach  $E' = (x'_e, 0)$ ;
- bei der Vergleichsvariablen  $t = \hat{t}_e = \text{const}$  nach  $P' = (x'', y'')$ .

Diesen Verschiebungen entsprechen die Abszissenänderungen  $\Delta x^{(1)} = \overline{EE'}$  bzw.  $\Delta x^{(2)} = \overline{EP''}$  (siehe Bild 5.17).



**Bild 5.17**

*Verschiebung des Punktes  $E$  bei einer Änderung des Abgangswinkels (Vergleichsvariable:  $t$  bzw.  $y$ )*

Die Aufgabe besteht jetzt darin, die Verschiebungen  $\Delta x^{(1)}/\hat{x}_e$  und  $\Delta x^{(2)}/\hat{x}_e$  zu berechnen.

a) *Ermittlung von  $\Delta x^{(1)}/\hat{x}_e$ :*

Nach den Formeln der parabolischen Theorie (siehe Tabelle 2.1, Seite 35) gilt

$$x'_e = \frac{v_0^2}{g_0} \sin 2(\vartheta_0 + \delta); \quad \hat{x}_e = \frac{v_0^2}{g_0} \sin 2\vartheta_0,$$

$$\frac{\Delta x^{(1)}}{\hat{x}_e} = \frac{x'_e - \hat{x}_e}{\hat{x}_e} = \frac{\sin 2(\vartheta_0 + \delta)}{\sin 2\vartheta_0} - 1.$$

Entwicklung der rechten Seite nach Potenzen von  $\delta$  liefert:

$$\frac{\Delta x^{(1)}}{\hat{x}_e} = 2 \cot 2\vartheta_0 \cdot \delta - 2\delta^2 - \frac{4}{3} \cot 2\vartheta_0 \cdot \delta^3 + \frac{2}{3} \delta^4 - \dots \quad (5.143)$$

b) *Ermittlung von  $\Delta x^{(2)}/\hat{x}_e$ :*

Im Vakuum besteht zwischen der Abszisse  $x$  und der Flugzeit  $t$  die Beziehung (siehe Tabelle 2.1, Seite 35):

$$x = u_0 t = v_0 \cos \vartheta_0 \cdot t.$$

Für die Änderung  $\Delta x^{(2)}/\hat{x}_e$  erhält man somit ( $t = \hat{t}_e = \text{const}$ ):

$$\frac{\Delta x^{(2)}}{\hat{x}_e} = \frac{x'' - \hat{x}_e}{\hat{x}_e} = \frac{\cos(\vartheta_0 + \delta)}{\cos \vartheta_0} - 1.$$

*Taylor*-Entwicklung der rechten Seite nach Potenzen von  $\delta$  liefert

$$\frac{\Delta x^{(2)}}{\hat{x}_e} = -\tan \vartheta_0 \cdot \delta - \frac{1}{2} \delta^2 + \frac{1}{6} \tan \vartheta_0 \cdot \delta^3 + \frac{1}{24} \delta^4 + \dots \quad (5.144)$$

Wie der Vergleich von (5.143) und (5.144) zeigt, haben die Änderungen  $\Delta x_e^{(1)}/\hat{x}_e$  und  $\Delta x_e^{(2)}/\hat{x}_e$  unterschiedliches Vorzeichen und unterschiedlichen Betrag. Das gilt bereits für die linearen Näherungen, die man erhält, wenn man die Potenzreihen nach den Gliedern mit  $\delta^1$  abbricht.

Die Methodik, die zur Berechnung der relativen Abweichungen  $\Delta x_e^{(i)}/\hat{x}_e$  benutzt worden ist, läßt sich nicht unmittelbar auf den luft erfüllten Raum übertragen, weil die Abhängigkeit der Flugbahnelemente von den Bahnparametern im luft erfüllten Raum – abgesehen von einigen Sonderfällen – nicht formelmäßig angebar ist.

Wie hier nicht gezeigt werden soll, genügen die Koeffizienten der ballistischen Parameterreihen einem (unendlichen) Differentialgleichungssystem, dessen Gleichungen sukzessiv durch Quadraturen gelöst werden können.

Eine detaillierte Darstellung der Berechnung der Entwicklungskoeffizienten findet man bei *Athen* [30], § 23, und *Popoff* [31].

Da die Differentialgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten mit wachsender Nummer des Koeffizienten immer komplizierter werden, hat sich zu deren Berechnung ein anderes Vorgehen eingebürgert: Man setzt die Parameterentwicklungen mit zunächst unbestimmten Koeffizienten an und ermittelt die Entwicklungskoeffizienten an Hand von numerisch integrierten Stützbahnen.

Die Genauigkeit, mit der die Flugbahnelemente zu berechnen sind, ist in der Regel vorgegeben. Um der gestellten Genauigkeitsforderung

nachzukommen, muß in den Reihenentwicklungen eine gewisse Mindestanzahl von Entwicklungsgliedern mitgeführt werden.

Der Verlauf ein und desselben Flugbahnelements kann in unterschiedlicher Weise durch Potenzreihen beschrieben werden. Vom Standpunkt der praktischen Anwendung ist eine Reihendarstellung um so besser, je weniger Glieder dieser Reihe explizit benötigt werden, um das vorgegebene Problem mit der geforderten Genauigkeit zu lösen. Bei der Auswahl einer problemadäquaten Reihendarstellung kommt es deshalb sehr auf die Erfahrung und Geschicklichkeit des Bearbeiters an.

Diese allgemeinen Überlegungen haben für die in Frage stehenden Parameterentwicklungen der Flugbahnelemente unmittelbare Bedeutung.

Wie spezielle Untersuchungen zeigen, konvergieren die Reihenentwicklungen der Bahnelemente  $x, y$  nach Potenzen von  $\delta := \Delta\vartheta_0$  verhältnismäßig schlecht. Man erhält jedoch außerordentlich rasch konvergierende Reihen, wenn man die Flugbahn in einem schiefwinkligen Koordinatensystem beschreibt und die Bahnelemente  $\xi, \eta$ ,

$$\xi = x \sec \vartheta_0, \quad \eta = x \tan \vartheta_0 - y \quad (5.145)$$

nach Potenzen von  $\lambda$ ,

$$\lambda := \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta_0}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 + \sin \vartheta_0), \quad (5.146)$$

entwickelt.<sup>1)</sup> Potenzreihen dieses Typs heißen *Popoffsche Parameterentwicklungen*; ihre Konvergenz ist meist so gut, daß man sie bereits nach dem in  $\lambda$  linearen Glied abbrechen kann.

Man benutzt die *Popoffschen* Parameterentwicklungen unter anderem dazu, eine gegebene Flugbahnschar zu verdichten (d. h. : in diese Flugbahnschar weitere Bahnen nachträglich einzufügen). Dieses Problem soll im folgenden näher betrachtet werden.

Die Ansätze für  $\xi(t)$  und  $\eta(t)$  lauten, wenn man die Entwicklungen nach dem in  $\lambda$  linearen Glied abbricht,

$$\xi = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \lambda, \quad \eta = \beta_0(t) + \beta_1(t) \lambda. \quad (5.147)$$

Die Koeffizientenfunktionen  $\alpha_i, \beta_j$  ( $i, j = 1, 2$ ) gelten jeweils für die gesamte Flugbahnschar mit variablem Abgangswinkel  $\vartheta_0$  ( $c, v_0 = \text{const}$ , vorgegeben).

<sup>1)</sup> Zur Definition des schiefwinkligen Koordinatensystems  $\{\xi, \eta\}$  siehe Abschnitt 4.2.9.



Es seien

$$x_1(t) = \varphi_x(t|c, v_0, \vartheta_{01}), \quad y_1(t) = \varphi_y(t|c, v_0, \vartheta_{01});$$

$$x_2(t) = \varphi_x(t|c, v_0, \vartheta_{02}), \quad y_2(t) = \varphi_y(t|c, v_0, \vartheta_{02})$$

die Koordinaten zweier Flugbahnen mit dem gleichen Ballistischen Koeffizienten  $c$  und der gleichen Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , jedoch unterschiedlichen Abgangswinkeln  $\vartheta_{01}$  und  $\vartheta_{02}$ ; die Flugbahnen mögen nach einem geeigneten (numerischen) Verfahren integriert worden sein. Diese beiden *Stützbahnen* haben im  $\xi, \eta$ -System die Koordinaten  $\xi_1(t), \eta_1(t)$  bzw.  $\xi_2(t), \eta_2(t)$ . Nach (5.145) bis (5.147) muß somit gelten

$$\xi_1(t) = x_1(t) \sec \vartheta_{01} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \lambda_1, \quad (5.148)$$

$$\xi_2(t) = x_2(t) \sec \vartheta_{02} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \lambda_2;$$

$$\eta_1(t) = x_1(t) \tan \vartheta_{01} - y_1(t) = \beta_0(t) + \beta_1(t) \lambda_1, \quad (5.149)$$

$$\eta_2(t) = x_2(t) \tan \vartheta_{02} - y_2(t) = \beta_0(t) + \beta_1(t) \lambda_2;$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (1 + \sin \vartheta_{01}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} (1 + \sin \vartheta_{02}).$$

Aus (5.148) können die Koeffizientenfunktionen  $\alpha_0(t), \alpha_1(t)$  berechnet werden. Man erhält

$$\alpha_0(t) = \frac{\lambda_1 \xi_2(t) - \lambda_2 \xi_1(t)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \alpha_1(t) = \frac{\xi_1(t) - \xi_2(t)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Entsprechend folgt aus (5.149):

$$\beta_0(t) = \frac{\lambda_1 \eta_2(t) - \lambda_2 \eta_1(t)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \beta_1(t) = \frac{\eta_1(t) - \eta_2(t)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Wenn die Entwicklungskoeffizienten  $\alpha_i, \beta_j$  bekannt sind, dann liefert (5.147) für beliebige  $\lambda$  (also beliebige Abgangswinkel  $\vartheta_0$ ) die Bahnelemente  $\xi(t), \eta(t)$  der Bahnen mit den Parametern  $c, v_0, \vartheta_0$ .

Die Rücktransformation der Bahnelemente  $\xi, \eta$  der auf diesem Wege neu ermittelten Flugbahnen auf kartesische Koordinaten erfolgt gemäß

$$x = \xi \cos \vartheta_0, \quad y = \xi \sin \vartheta_0 - \eta.$$

Zu (5.147) analoge Ansätze sind auch für die verallgemeinerten Geschwindigkeitskomponenten  $\dot{\xi}(t)$  und  $\dot{\eta}(t)$  möglich. Die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten erfolgt wie bei  $\xi(t)$  und  $\eta(t)$  aus den Bahnelementen der beiden Stützbahnen.

Die Linearität der Ansätze (5.147) hat zur Folge, daß in der Bahnschar bezüglich  $\lambda$  linear interpoliert werden darf. Geht man hierbei von der Bahn Nr. 1 aus, so lauten die Interpolationsformeln

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \xi_1(t) + \frac{\xi_2(t) - \xi_1(t)}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1); \\ \eta(t) &= \eta_1(t) + \frac{\eta_2(t) - \eta_1(t)}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1).\end{aligned}\tag{5.150}$$

Die Darstellungen (5.147) und (5.150) sind ineinander überführbar. Für  $\xi(t)$  zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \xi_1(t) + \frac{\xi_2(t) - \xi_1(t)}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) \\ &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \lambda_1 + \alpha_1(t) (\lambda - \lambda_1) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \lambda.\end{aligned}$$

Die Abgangswinkel  $\vartheta_{01}$  und  $\vartheta_{02}$  der zur Koeffizientenberechnung dienenden Stützbahnen sollten so gewählt werden, daß der Interpolationsfehler in dem in Frage kommenden  $\lambda$ -Intervall  $[\lambda_a, \lambda_e]$  möglichst klein ist. Wie *Stange* [32] gezeigt hat, wird der maximale Interpolationsfehler minimal, wenn  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  den Bedingungen genügen

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1 - \lambda_a}{\lambda_e - \lambda_a} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) = 0,1464; \\ \frac{\lambda_2 - \lambda_a}{\lambda_e - \lambda_a} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) = 0,8536;\end{aligned}$$

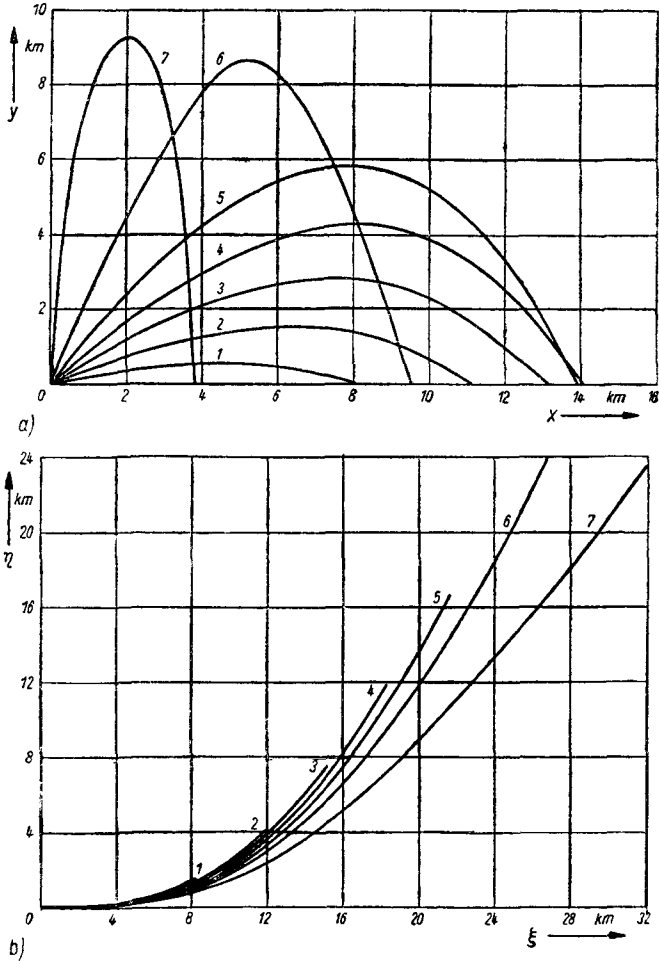
$$\lambda \in [\lambda_a, \lambda_e].$$

Bei Erdschußtafeln interessieren die Flugbahnen hauptsächlich im Intervall  $\vartheta_{0a} = 0^\circ$  bis  $\vartheta_{0e} = 45^\circ$ ; bei Flakschußtafeln erstreckt sich das Abgangswinkelintervall von  $\vartheta_{0a} = 0^\circ$  bis  $\vartheta_{0e} = 90^\circ$ . Die diesen Intervallen entsprechenden Abgangswinkel der Stützbahnen  $\vartheta_{01}, \vartheta_{02}$  können Tabelle 5.18 entnommen werden.

Tabelle 5.18 *Abgangswinkel der Stützbahnen für die lineare Interpolation in der Flugbahnschar mit variablem Abgangswinkel*

Schußtafel	$\vartheta_a$	$\vartheta_e$	$\lambda_1$	$\vartheta_{01}$	$\lambda_2$	$\vartheta_{02}$
Erdartillerie	$0^\circ$	$45^\circ$	0,5518	$5^\circ 56'$	0,6036	$37^\circ 7'$
Flak	$0^\circ$	$90^\circ$	0,5732	$8^\circ 25'$	0,9268	$58^\circ 36'$

Es war bereits darauf hingewiesen worden, daß die linearen Ansätze (5.147) so genau sind, daß sie selbst für Schußtafel-Berechnungen Verwendung finden können. Diese überraschend hohe Interpolationsgenauigkeit wird verständlich, wenn man sich die Transformation (5.145) geometrisch veranschaulicht.



**Bild 5.18** Transformation der Flugbahnschar mit variablem Abgangswinkel ( $0 \leq \vartheta_0 \leq \pi/2$ ;  $c, v_0: \text{const}$ )  
*a* – Darstellung in der  $x, y$ -Ebene; *b* – Darstellung in der  $\xi, \eta$ -Ebene

Durch die Abbildungsvorschrift (5.145) wird der Bahnschar der  $x, y$ -Ebene, deren Abgangswinkel das Intervall  $[0^\circ, 90^\circ]$  überdecken, eine Kurvenschar der  $\xi, \eta$ -Ebene zugeordnet, deren Kurven im Nullpunkt alle die gleiche Tangentenneigung und die gleiche Krümmung haben. Die Flugbahnschar wird durch die Abbildung „komprimiert“. Man kann deshalb im  $\xi, \eta$ -System relativ zuverlässig von einer gegebenen Bahn auf eine benachbarte Bahn schließen (Bild 5.18).

Die erwähnten geometrischen Eigenschaften der Transformation (5.145) lassen sich leicht mathematisch bestätigen; siehe Übungsaufgabe 5.24.

## 5.6. Die numerische Integration des Anfangswertproblems des klassischen Bahnmodells

Die Ausführungen dieses Abschnitts verfolgen das Ziel, einige mathematische Aspekte der numerischen Integration von Anfangswertproblemen bei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen zu erörtern, die für die Lösung der ballistischen Bewegungsdifferentialgleichungen von besonderer Bedeutung sind. Da die numerische Integration von Differentialgleichungen heute nahezu ausnahmslos mit Hilfe von elektronischen Datenverarbeitungsanlagen ausgeführt wird, soll auf die Wiedergabe detaillierter Rechenschemen für die Arbeit mit Tischrechenmaschinen verzichtet werden.

Grundlagenkenntnisse über die numerische Integration von Differentialgleichungen, die heute jedem Studenten mittlerer Semester einer technischen oder mathematisch-physikalischen Fachrichtung zur Verfügung stehen, werden im folgenden vorausgesetzt.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Lesern, die ihre Kenntnisse über die numerische Integration von Differentialgleichungen auffrischen wollen, wird die nachstehende Literatur empfohlen, die nach wachsendem Schwierigkeitsgrad geordnet ist:

Zurmühl, R.: *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*. 5. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1965.

Bräuning, G.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Leipzig 1965.

Demidowitsch, B. P., Maron, J. A., Schuwalowa, E. S.: *Numerische Methoden der Analysis*. Berlin 1968.

Henrici, P.: *Discrete variable methods in ordinary differential equations*. New York/London 1963.

### 5.6.1. Allgemeine Eigenschaften und Klassifikation der numerischen Integrationsverfahren

Die analytischen Näherungsverfahren zur Integration der ballistischen Bewegungsgleichungen, denen die vorangegangenen Abschnitte dieses Kapitels gewidmet sind, zeichnen sich durch eine Reihe von Eigenschaften aus, die für die praktische Behandlung von Flugbahnproblemen sehr vorteilhaft sind.<sup>1)</sup>

Bei gegebenen Flugbahnelementen im Abgangspunkt  $O$  ( $t = t_0$ ) können die Bahnelemente eines beliebigen Flugbahnpunkts  $P$  ( $t = t^* > t_0$ ) unmittelbar der entsprechenden Formel entnommen werden; die Kenntnis der Bahnelemente in den zwischen  $O$  und  $P$  liegenden Punkten ist hierfür nicht erforderlich.

Die Bahnelemente errechnen sich aus relativ einfach gebauten Formeln; die pro Flugbahnpunkt aufzuwendende Rechenzeit ist relativ gering und unabhängig von der speziellen Lage des Punktes zwischen Abgangspunkt  $O$  und Auftreffpunkt  $E$ .

Der Einfluß von Änderungen der Bahnparameter  $c, v_0, \vartheta_0$  auf die Zahlenwerte der Flugbahnelemente ist im allgemeinen leicht überschaubar.

Diesen Vorzügen der analytischen Näherungsverfahren stehen eine Anzahl einschneidender Nachteile gegenüber.

Die Annahmen über das Kräftesystem am Geschöß, die die Näherungslösungen ermöglichen und die Voraussetzungen des klassischen Bahnmodells weiter einschränken, sind jeweils nur für eine eng begrenzte Klasse von Flugbahnen oder ein kleines Geschwindigkeitsintervall (bzw. einen speziellen Geschößtyp) gültig.

Die Genauigkeit der analytischen Näherungsverfahren, die auf vereinfachenden Annahmen über die Struktur der Verzögerungsfunktion  $b'(y, v)$  beruhen, ist kaum beeinflussbar; sie kann nur sehr schwer quantitativ erfaßt werden.

Bei den Potenzreihenentwicklungen für die Bahnelemente läßt sich die Genauigkeit durch Hinzunahme höherer Entwicklungsglieder im Prinzip zwar beliebig steigern; die praktische Durchführung der Entwicklungen stößt jedoch auf nahezu unüberwindliche Schwierigkeiten:

- Die Struktur der Entwicklungskoeffizienten wird mit wachsender Ordnung der Reihenglieder immer komplizierter und unübersichtlicher.

<sup>1)</sup> Für die folgenden Betrachtungen wird (ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit) angenommen, daß die Bewegungsdifferentialgleichungen im  $t$ -System gegeben sind.

- Die wiederholte (numerische) Differentiation des tabellarisch gegebenen Standard-Luftwiderstandsgesetzes, die zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten erforderlich ist, führt mit wachsender Ordnung der Ableitung (meist bereits schon ab der 2. Ableitung) zu völlig unbrauchbaren Resultaten („Aufrauhung“ der Kurven infolge des Einflusses der Rundungsfehler).

Man wendet Reihenentwicklungen in der Praxis deshalb nur dort an, wo man sich mit den ersten zwei bis drei Entwicklungsgliedern begnügen kann.

Neben den analytischen Verfahren zur Lösung des Hauptproblems der Äußeren Ballistik sind in den letzten Jahrzehnten eine große Anzahl leistungsfähiger numerischer Integrationsverfahren zur punktweisen Berechnung der Flugbahnelemente entstanden. Diese numerischen Integrationsverfahren haben bei Schußtafel-Berechnungen (mit Ausnahme der Aufstellung von Schußtafeln für kleinkalibrige Schützenwaffen) die klassischen analytischen Verfahren völlig verdrängt.

Die numerischen Integrationsverfahren erfordern keine Voraussetzungen über die physikalische Struktur der Luftwiderstandsfunktion; sie sind weitgehend unabhängig von der speziellen Gestalt der ballistischen Bewegungsgleichungen.

Die Genauigkeit der Flugbahnberechnung ist bei den meisten numerischen Integrationsverfahren innerhalb weiter Grenzen wählbar; eine Erhöhung der Integrationsgenauigkeit bereitet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten.

Für die wichtigsten numerischen Integrationsverfahren sind erprobte Automatenprogramme vorhanden.

Die numerische Integration der ballistischen Bewegungsgleichungssysteme hat jedoch auch eine Reihe von Nachteilen.

Bei jeder Integration erhält man jeweils nur eine einzige, spezielle Lösung des Anfangswertproblems; der Einfluß der Flugbahnparameter  $c$ ,  $v_0$ ,  $\vartheta_0$  auf die Bahnelemente ist nicht unmittelbar zu erkennen.

Zur rationellen Ausführung der numerischen Bahnintegrationen werden auf Grund des hohen Rechenaufwands besondere technische Hilfsmittel benötigt (elektronische Datenverarbeitungsanlagen, mindestens jedoch Tischrechenmaschinen). Die numerischen Integrationsverfahren sind daher für Überschlagsrechnungen, insbesondere für inverse Aufgaben im Rahmen der Projektierung, nicht unmittelbar geeignet.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Die Anwendung der durch numerische Integration ermittelten außenballistischen Tafelwerke zur Lösung von inversen Aufgaben wird in Abschnitt 5.6. behandelt.

Ein weiterer Nachteil der numerischen Integrationsverfahren (insbesondere der Einschritt-Verfahren vom *Runge-Kutta*-Typ) ist das Fehlen wirksamer Rechenkontrollen. Im Falle eines nicht vollautomatisierten Integrationsablaufs müssen deshalb zusätzliche Kontrollrechnungen vorgesehen werden (etwa Wiederholung der gesamten Rechnung mit veränderter Schrittweite, Durchführung einer sogenannten „Schlußkontrolle“ oder ähnliches).

Die numerische Integration über ein Intervall  $[t_0, t_e]$  liefert die Näherungslösung nicht kontinuierlich für beliebige  $t \in [t_0, t_e]$ , sondern nur für eine Folge diskreter Stützstellen  $t = t_v$ .

Die numerischen Integrationsverfahren bauen die Flugbahn schrittweise vom Abgangspunkt her auf; von den bekannten Flugbahnelementen im Abgangspunkt kann deshalb nicht unmittelbar auf die Bahnelemente in einem beliebigen Flugbahnpunkt  $P (t > t_0)$  geschlossen werden.

Die Flugbahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt werden von dem Integrationsalgorithmus nicht automatisch geliefert. Zur Berechnung dieser Bahnelemente ist das Integrationsverfahren durch geeignete Iterationsvorschriften zu ergänzen.

Aus theoretischen wie auch aus praktischen Erwägungen empfiehlt es sich, zwischen *Einschritt-Verfahren* und *Mehrschritt-Verfahren* zu unterscheiden, obwohl die Einschritt-Verfahren formal als Sonderfälle der Mehrschritt-Verfahren aufgefaßt werden können.

Die *Einschritt-Verfahren* benötigen zum Fortschreiten von der Stützstelle  $t = t_v$  zur Stützstelle  $t = t_{v+1} = t_v + h_v$  lediglich die Bahnelemente und Funktionswerte im Anfangspunkt  $t = t_v$  des Integrations-schrittes.

Der Abstand  $h_v$  zweier aufeinanderfolgender Stützstellen heißt (*Integrations-*)*Schrittweite*:

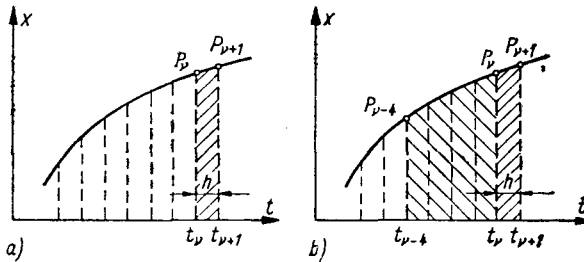
$$t_{v+1} = t_v + h_v.$$

Die Schrittweite  $h_v$  ist frei wählbar.

Die *Mehrschritt-Verfahren* benutzen – neben den im Anfangspunkt des Integrationsschrittes zur Verfügung stehenden Informationen – auch Funktionswerte (und Ableitungen) an zurückliegenden Stützstellen  $t = t_j < t_v$  (siehe Bild 5.19).

Die Mehrschritt-Verfahren verwenden umfassendere Informationen über den Verlauf der Integralkurve als die Einschritt-Verfahren. Bei gleicher Genauigkeit des Endresultats kommen die Mehrschritt-Ver-

fahren deshalb im allgemeinen mit einer geringeren Anzahl von Rechenoperationen je Integrationssschritt aus als die Einschritt-Verfahren. Durch den Rückgriff auf vorangegangene Integrationssschritte sind die Mehrschritt-Verfahren jedoch am Flugbahnanfang nicht anwendbar, so daß gesonderte Startverfahren benötigt werden.



**Bild 5.19**  
Schematische Darstellung der Informationsbereiche bei numerischen Integrationsverfahren  
a – Einschritt-Verfahren; b – Mehrschritt-Verfahren 4. Ordnung

Die überwiegende Anzahl der Mehrschritt-Verfahren ist auf eine konstante Schrittweite ( $h = \text{const}$ ) zugeschnitten:

$$t_\nu = t_0 + \nu h \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Die Änderung von  $h$  im Laufe des Integrationsprozesses (insbesondere die Schrittweitenverkleinerung) bereitet Schwierigkeiten; die Mehrschritt-Integrationsverfahren können deshalb verhältnismäßig schlecht an die Struktur des zu integrierenden Anfangswertproblems angepaßt werden.

Durch die Notwendigkeit von zusätzlichen Startverfahren und speziellen Algorithmen zur Interpolation der Funktionswerte bei Schrittweitenverringerung sind die Mehrschritt-Verfahren komplexer (und schwieriger zu programmieren) als die Einschritt-Verfahren.

In der Ballistik wird den Einschritt-Verfahren gegenüber den Mehrschritt-Verfahren der Vorzug gegeben, da sie ohne spezielle Startprozeduren für den Bahnanfang auskommen und die erforderlichen Rechenoperationen unkompliziert und leicht zu programmieren sind.

Von besonderer praktischer Bedeutung ist die hohe Flexibilität der Einschritt-Verfahren gegenüber Schrittweitenänderungen. Die Integrationssschrittweite  $h$  kann im Laufe des Integrationsprozesses (gegebenenfalls von Schritt zu Schritt) ohne Mühe sowohl vergrößert wie auch verkleinert werden. Hierdurch ist es möglich, die Integrationssschrittweite den Genauigkeitsforderungen sowie der lokalen Struktur des Flugbahn-Anfangswertproblems anzupassen.



Die Funktionswerte und Ableitungen der in den ballistischen Bewegungsgleichungen enthaltenen Verzögerungsfunktion  $E$  variieren in der Regel längs der Flugbahn innerhalb relativ weiter Grenzen. Hieraus resultiert die Notwendigkeit, am Bahnanfang und bei Bahngeschwindigkeiten im Transschallbereich kleine Integrationsschrittweiten zu wählen, während in Gipfelnähe im allgemeinen relativ große Integrationsschritte zugelassen sind.<sup>1)</sup>

Die Anpassung der Integrationsschrittweite an die Genauigkeitsforderungen und die lokale Struktur des Anfangswertproblems wird mathematisch dadurch erreicht, daß man den Algorithmus zur Erzeugung der Näherungslösung durch einen Algorithmus zur Schrittweitenbemessung ergänzt. Dieses Schrittweitenkriterium soll bewirken, daß die Lösung des zu integrierenden Anfangswertproblems – bei Einhaltung der vorgegebenen Genauigkeitsschranken – mit minimalem Rechenaufwand (einer minimalen Anzahl von Rechenoperationen) gewonnen wird.

Die folgenden Abschnitte beschäftigen sich ausschließlich mit numerischen Einschnitt-Verfahren. Hinsichtlich der Mehrschritt-Verfahren sei auf die Literatur über die numerische Integration von Anfangswertproblemen verwiesen.

### 5.6.2. Die mathematische Beschreibung von Einschnitt-Verfahren

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
 dx^1/dt &= f^1(t; x^1, \dots, x^n), & x^1(t_0) &= x_0^1, \\
 dx^2/dt &= f^2(t; x^1, \dots, x^n), & x^2(t_0) &= x_0^2, \\
 &\vdots & &\vdots \\
 dx^n/dt &= f^n(t; x^1, \dots, x^n), & x^n(t_0) &= x_0^n.
 \end{aligned}
 \tag{5.151}$$

Hochgestellte Indizes dienen zur Kennzeichnung der skalaren Variablen (Vektorkomponenten), tiefgestellte Indizes zur Numerierung der Stützstellen (Bahnpunkte).

Für die nachfolgenden Überlegungen ist es zweckmäßig, die in der

<sup>1)</sup> Siehe hierzu die Ausführungen in Abschnitt 5.6.5.3.

Matrizenrechnung übliche Vektorschreibweise zu benutzen.<sup>1)</sup> Das Anfangswertproblem (5.151) erhält darin die einfache Form

$$dx/dt = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (5.152)$$

Hierin bedeuten  $f$ ,  $x$  und  $x_0$  die Spaltenvektoren

$$f = \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix}.$$

Das Anfangswertproblem (5.152) habe für  $t \in [t_0, t_e]$  die eindeutige, stetige und stabile Lösung

$$x(t) = \varphi(t; t_0, x_0), \quad \varphi(t_0; t_0, x_0) = x_0,$$

die jedoch unbekannt ist und deshalb mit Hilfe eines Einschritt-Verfahrens numerisch approximiert werden soll.

Die Funktionen  $f(t, x)$  und  $\varphi(t; t_0, x_0)$  seien nach allen ihren Argumenten hinreichend oft differenzierbar.

Unter einem Einschritt-Verfahren zur numerischen Integration von Anfangswertproblemen versteht man, wie in Abschnitt 5.6.1. bereits angedeutet, einen Algorithmus, der

1. zu einer Folge diskreter Stützstellen  $t = t_1, t_2, \dots, t_v, \dots$  Vektoren  $x_1, x_2, \dots, x_v, \dots$  liefert, die als Näherungen für die exakten Funktionswerte  $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_v), \dots$  angesehen werden können, und
2. für das Fortschreiten vom Punkt  $(t_v, x_v)$  zum Punkt  $(t_{v+1}, x_{v+1})$ ,  $t_{v+1} = t_v + h_v$  lediglich die Funktionswerte und Ableitungen im Anfangspunkt  $(t_v, x_v)$  des Integrationsschrittes benutzt.

Einschritt-Verfahren zur Lösung von Anfangswertaufgaben des Typs (5.152) haben demnach die mathematische Struktur<sup>2)</sup>:

$$x_{v+1} = x_v + h_v \Phi(t_v, x_v; h_v), \quad x_0 = x(t_0) \quad (5.153)$$

$(v = 0, 1, \dots, n).$

Die vektorwertige Funktion  $\Phi(t, x; h)$  heißt *Zuwachsfunktion*.

<sup>1)</sup> Siehe etwa Zurmühl, R.: *Matrizen und ihre technischen Anwendungen*. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1964.

<sup>2)</sup> Bezeichnungswiese und Terminologie lehnen sich an Henrici, P.: *Discrete variable methods in ordinary differential equations*, New York 1963, an.

Analog zu (5.153) kann man die exakte Lösung des Anfangswertproblems (5.152) in der Form schreiben

$$\mathbf{x}(t_{v+1}) = \mathbf{x}(t_v) + h_v \mathcal{A}[t_v, \mathbf{x}(t_v); h_v], \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.154)$$

mit

$$\mathcal{A}(t, \mathbf{x}; h) := \begin{cases} \frac{1}{h} [\varphi(t+h; t_0, \mathbf{x}_0) - \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0)] & (h \neq 0), \\ \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) & (h = 0). \end{cases}$$

Man nennt  $\mathcal{A}(t, \mathbf{x}; h)$  *exakter relativer Zuwachs*.

Subtrahiert man (5.154) von (5.153), so erhält man für die Abweichung der Näherungslösung von der exakten Lösung an der Stelle  $t = t_v$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{v+1} - \mathbf{x}(t_{v+1}) &= \mathbf{x}_v - \mathbf{x}(t_v) \\ &\quad + h_v \{ \Phi[t_v, \mathbf{x}_v; h_v] - \mathcal{A}[t_v, \mathbf{x}(t_v); h_v] \}. \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung  $\xi_v := \mathbf{x}_v - \mathbf{x}(t_v)$  kann man hierfür auch schreiben:

$$\begin{aligned} \xi_{v+1} &= \xi_v + h_v \{ \Phi[t_v, \mathbf{x}(t_v) + \xi_v; h_v] - \Phi[t_v, \mathbf{x}(t_v); h_v] \} \\ &\quad + h_v \{ \Phi[t_v, \mathbf{x}(t_v); h_v] - \mathcal{A}[t_v, \mathbf{x}(t_v); h_v] \}. \end{aligned}$$

Der Term

$$h_v \{ \Phi[t_v, \mathbf{x}(t_v); h_v] - \mathcal{A}[t_v, \mathbf{x}(t_v); h_v] \}$$

ist der beim Fortschreiten von  $t = t_v$  nach  $t = t_{v+1} = t_v + h_v$  entstehende Verfahrensfehler, der sogenannte *lokale Abbrechfehler*.

Der Ausdruck

$$h_v \{ \Phi[t_v, \mathbf{x}(t_v) + \xi_v; h_v] - \Phi[t_v, \mathbf{x}(t_v); h_v] \}$$

gibt den Einfluß an, den der im Punkt  $t = t_v$  vorhandene Fehler auf die Näherungslösung im Punkt  $t = t_{v+1}$  ausübt (*fortgepflanzter Abbrechfehler*).

Die Zuwachsfunktion  $\Phi(t, \mathbf{x}; h)$  des numerischen Einschritt-Verfahrens wird so gewählt, daß sie den exakten relativen Zuwachs  $\mathcal{A}(t, \mathbf{x}; h)$  möglichst gut approximiert. Als Maß für die Güte der Approximation dient hierbei die Nummer des Gliedes, bis zu dem die *Taylor-Entwicklungen* von  $\Phi(t, \mathbf{x}; h)$  und  $\mathcal{A}(t, \mathbf{x}; h)$  nach Potenzen von  $h$  übereinstimmen.

Beide *Taylor*-Entwicklungen seien bis zu den Gliedern mit  $h^{p-1}$  von gleicher Gestalt. Das erste Glied, in dem sich beide Entwicklungen unterscheiden, enthalte den Faktor  $h^p$ . Man schreibt dies

$$\Phi(t, \mathbf{x}; h) - \mathcal{A}(t, \mathbf{x}; h) = O(h^p). \quad (5.155)$$

Das *Landau*-Symbol  $O(h^p)$  gibt an, daß die Differenz der Zuwachsfunktionen für  $h \rightarrow 0$  wie  $h^p$  gegen Null geht.<sup>1)</sup>

Man nennt die Zahl  $p$  (*exakte*) *Ordnung des Einschritt-Verfahrens*  $\Phi(t, \mathbf{x}; h)$ .

Haben sowohl  $\Phi(t, \mathbf{x}; h)$  wie auch  $\mathcal{A}(t, \mathbf{x}; h)$  stetige Ableitungen bis zur Ordnung  $p + 1$ , dann kann man (5.155) in der Form darstellen

$$\Phi(t, \mathbf{x}; h) - \mathcal{A}(t, \mathbf{x}; h) = h^p \mathbf{r}(t, \mathbf{x}) + O(h^{p+1}). \quad (5.156)$$

Die Funktion  $\mathbf{r}(t, \mathbf{x})$ , die sogenannte *Fehler-Hauptfunktion*, ist unter den getroffenen Voraussetzungen eine stetige Funktion von  $t$  und  $\mathbf{x}$  und verschwindet nicht identisch.

In Abschnitt 5.6.5.1. wird gezeigt, wie man relativ einfach zu numerischen Werten für die Größe der Fehler-Hauptfunktion gelangt.

Der Verlauf der Fehler-Hauptfunktion längs der Flugbahn, die Funktion  $\mathbf{r}(t) := \mathbf{r}[t; \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0)]$ , ist für die Schrittweitenbemessung von Bedeutung, da zahlreiche Verfahren zur automatischen Schrittweitenkontrolle von dem lokalen Abbrechfehler  $h^{p+1} \mathbf{r}(t)$  ausgehen.

Wie man aus (5.156) abliest, gibt es im Prinzip drei *Wege zur Reduzierung der lokalen mathematischen Verfahrensfehler*:

- Übergang von dem Integrationsverfahren der Ordnung  $p$  zu einem Algorithmus, der weitere Glieder der *Taylor*-Entwicklung erfaßt (*Taylor*-Abgleich bis zu den Gliedern  $q$ -ter Ordnung,  $q > p$ );
- Verwendung eines Integrationsverfahrens der gleichen Ordnung  $p$ , aber mit betragsmäßig kleinerer Fehler-Hauptfunktion  $\mathbf{r}(t, \mathbf{x})$ ;
- Verringerung der Schrittweite  $h$  (Unterteilung des Integrations-schrittes  $t = t_v \rightarrow t = t_v + h_v$  in mehrere Teilschritte).

Neben den Abbrechfehlern treten bei jedem Integrationsschritt Rundungsfehler auf, denn in allen Rechnungen kann jeweils nur eine endliche Anzahl geltender Ziffern mitgeführt werden. Bei umfangreichen

<sup>1)</sup> Zur Klassifizierung infinitesimaler Größen und der Definition der *Landau*-Symbole siehe etwa *Fichtenholz, G.M.: Differential- und Integralrechnung*. Bd.1; 2., berichtigte Aufl., Berlin 1966, Abschn. 60 bis 63.

Rechnungen, insbesondere bei der Aufeinanderfolge sehr vieler Integrationssschritte, können die resultierenden Rundungsfehler die Gesamtgenauigkeit der numerischen Integration unter Umständen erheblich beeinträchtigen.

Wie hier nicht gezeigt werden soll, ist der Einfluß der Rundungsfehler mathematisch in ähnlicher Weise zu erfassen wie die Auswirkung der Abbrechfehler.<sup>1)</sup>

Einige qualitative Überlegungen zum Einfluß der Rundungsfehler auf die Wahl der Schrittweite folgen in Abschnitt 5.6.6.

### **5.6.3. Schrittweitenbemessung bei Einschritt-Integrationsverfahren**

Bei der Festlegung des Schrittweitenverlaufs für die numerische Einschritt-Integration eines Anfangswertproblems steht man vor zwei sich widersprechenden Forderungen.

Um die Integrationsfehler (die lokalen und fortgepflanzten Abbrechfehler) klein zu halten, sollten die Integrationsschritte möglichst kurz sein. Bei vorgegebener Länge des Integrationsintervalls wäre der Integrationsprozeß also in eine möglichst große Anzahl von Einzelschritten zu unterteilen.

Ökonomische Erwägungen hingegen lassen eine geringe Anzahl von Integrationsschritten wünschenswert erscheinen: Da die Gesamtdauer der Einschritt-Integration eines Anfangswertproblems proportional zur Anzahl der Integrationsschritte ist, wäre unter diesem Gesichtspunkt eine möglichst große Schrittweite anzustreben.

Der Schrittweitenverlauf ist dann optimal gewählt, wenn die Lösung des zu integrierenden Anfangswertproblems – unter Einhaltung der geforderten Genauigkeit an den Stützstellen – mit einer minimalen Anzahl von Integrationsschritten erfolgt.

Die mathematisch exakte Ermittlung des optimalen Schrittweitenverlaufs ist sehr aufwendig und nur unter einer Reihe von einschränkenden Annahmen möglich.<sup>2)</sup>

Für die routinemäßige Integration von Anfangswertproblemen kommen nur relativ einfach aufgebaute Schrittweite-Bemessungsverfahren in Be-

<sup>1)</sup> Siehe etwa *Henrici, P.: Discrete variable methods in ordinary differential equations.* New York/London 1963.

<sup>2)</sup> Siehe *Hauck, G.: Zur Bewertung der Wirksamkeit von Schrittweite-Bemessungsverfahren.* *Wiss. Z. TH Magdeburg*, **12** (1968) 5/6, S.647 bis 653.

tracht, die den Gesamtprozeß der Integration nicht wesentlich komplizieren und verlängern. Man wird deshalb in Kauf nehmen müssen, daß die Schrittweitenverläufe, die von den in der Praxis üblichen Bemessungsverfahren geliefert werden, (unter Umständen erheblich) von dem optimalen Schrittweitenverlauf abweichen, ihr „Wirkungsgrad“  $\eta$  also kleiner als eins ist.

Das Prinzip der in der Praxis benutzten Verfahren zur Schrittweitenbemessung ist relativ einfach.

Aus den während des Integrationsprozesses anfallenden Funktionswerten und Zuwachsgrößen wird eine skalare (positive) Kontrollfunktion  $g(t, \mathbf{x})$  gebildet, deren Zahlenwerte Aufschluß über den Fehler der numerisch approximierten Lösung des Anfangswertproblems geben. Nach jeweils  $j$  Integrationsschritten ( $j \geq 1$ ) wird der Zahlenwert  $g_v := g(t_v, \mathbf{x}_v)$  der Kontrollfunktion an der Stelle  $t = t_v$  ermittelt. Je nach der Größe von  $g_v$  wird eine der drei folgenden Entscheidungen gefällt:

1. Liegt  $g_v$  innerhalb gewisser vorgegebener Schranken  $\varepsilon_v^*$ ,  $\varepsilon_v^{**}$ ,

$$\varepsilon_v^* \leq g_v \leq \varepsilon_v^{**},$$

dann wird die für den Integrationsschritt  $(t_{v-1}, \mathbf{x}_{v-1}) \rightarrow (t_v, \mathbf{x}_v)$  verwendete Schrittweite  $h_{v-1} = t_v - t_{v-1}$  beibehalten:  $h_v = h_{v-1}$ .

2. Ist  $g_v < \varepsilon_v^*$ , wird die Schrittweite verdoppelt:  $h_v = 2h_{v-1}$ .

3. Falls  $g_v > \varepsilon_v^{**}$  gilt, wird die Schrittweite halbiert:  $h_v = \frac{1}{2}h_{v-1}$ .

Ihrer Struktur nach können drei *Typen von Kontrollfunktionen*  $g(t, \mathbf{x})$  unterschieden werden:

- A. Die Kontrollfunktion ist ein Maß für den lokalen Abbrechfehler bzw. die Größe der Fehler-Hauptfunktion.
- B. Die Kontrollfunktion mißt die Stärke der Fehlerfortpflanzung.
- C. Die Kontrollfunktion berücksichtigt sowohl den lokalen wie den fortgepflanzten Abbrechfehler.

Man darf erwarten, daß Kontrollfunktionen des Typs C realistischere Aussagen über die zweckmäßige Schrittweite liefern als die Verfahren der Typen A und B. Ungeachtet dessen gibt man in der Praxis meist den Verfahren des Typs A den Vorzug, da die lokalen Kriterien einfach aufgebaut und sehr leicht zu programmieren sind.

Beispiele für die einzelnen Typen von Schrittweite-Kontrollverfahren folgen in Abschnitt 5.6.5.

#### 5.6.4. Das Verfahren *Runge-Kutta*

Das bekannteste und auch am häufigsten angewandte Einschritt-Integrationsverfahren ist das Verfahren *Runge-Kutta*. Man bezeichnet die Einschritt-Verfahren deshalb häufig auch als *Verfahren vom Runge-Kutta-Typ*.

Für das skalare Anfangswertproblem

$$dx/dt = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

lautet die Zuwachsfunktion  $\Phi(t, x; h)$  in ihrer klassischen Form

$$\Phi(t, x; h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (5.157)$$

$$k_1 = f(t, x), \quad k_2 = f(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}hk_1),$$

$$k_3 = f(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}hk_2), \quad k_4 = f(t + h, x + hk_3).$$

Die Zuwachsfunktion des Verfahrens *Runge-Kutta* ist ein gewichtetes Mittel aus vier Funktionswerten  $k_1$  bis  $k_4$ , die sukzessiv in der Reihenfolge  $k_1 \rightarrow k_4$  berechnet werden, da das Argument von  $k_j$  ( $j \geq 2$ ) von dem Funktionswert  $k_{j-1}$  ( $j = 2, 3, 4$ ) abhängt.

Das durch die Zuwachsfunktion (5.157) definierte Verfahren ist ein Verfahren 4. Ordnung; es gilt also

$$x(t_{v+1}) = x_v + h_v \Phi_v + B h^5. \quad (5.158)$$

Der Term  $B h^5$  ist als Restglied der *Taylor*-Entwicklung der exakten Zuwachsfunktion an der Stelle  $(t_v, x_v)$  anzusehen. Man kann deshalb auch schreiben

$$\Delta(t, x; h) = \Phi(t, x; h) + O(h^4).$$

Der mathematische Beweis von (5.158) ist umständlich, da hierfür die *Taylor*-Entwicklung der Zuwachsfunktionen explizit ausgeführt werden muß.<sup>1)</sup>

Bild 5.20 zeigt ein vereinfachtes Flußdiagramm für das Durchlaufen eines Integrationsschrittes nach dem Verfahren *Runge-Kutta*.

Die Rechenschemen, die bei der *Runge-Kutta*-Integration der Bahngleichungen mit Hilfe einer Tischrechenmaschine verwendet werden, sind gemäß Bild 5.20 aufgebaut. Der Zeitbedarf zur Ausführung eines Integrationsschrittes beträgt etwa 30 Minuten.

<sup>1)</sup> Man findet den Beweis etwa in dem auf Seite 294 zitierten Buch von *Demidowitsch, Maron, Schuwalowa*.

Da das Verfahren *Runge-Kutta* ohne interne Rechenkontrollen arbeitet, schleichen sich bei der Bahnintegration „von Hand“ gern Rechenfehler ein. Es empfiehlt sich deshalb, bei dieser Art der Durchführung der Bahnintegration die Bahnrechnung zur Kontrolle durch einen anderen Mitarbeiter wiederholen zu lassen. Hierbei kann die gleiche oder auch die doppelt so große Schrittweite verwendet werden.<sup>1)</sup>

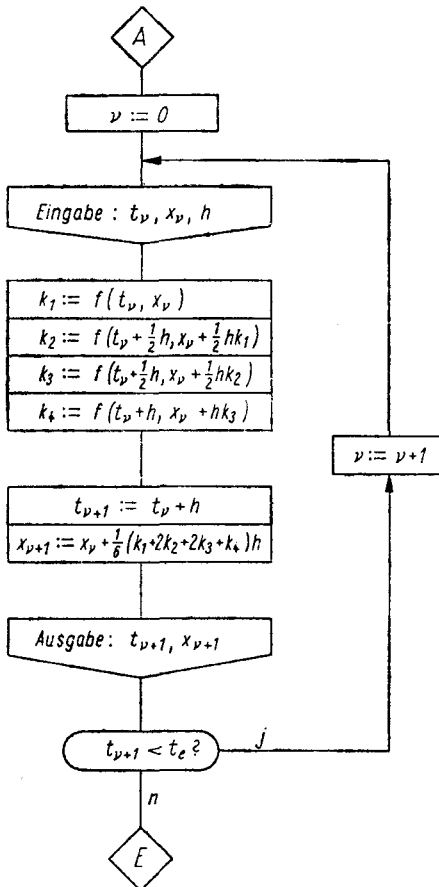


Bild 5.20  
Flußdiagramm für das Verfahren  
*Runge-Kutta* (Form 1)

<sup>1)</sup> Die Ergebnisse der Grob- und Feinrechnung können zugleich zur näherungsweise Berechnung des Abbrechfehlers und zur Schrittweitenbemessung benutzt werden; siehe Abschnitt 5.6.5.1.



Für die Durchführung des *Runge-Kutta*-Verfahrens auf einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage ist es zweckmäßig, die Berechnung der Zuwachsfunktion  $\Phi$  als zyklischen Prozeß darzustellen. Zu diesem Zweck schreibt man  $\Phi(t, x; h)$  in der Form<sup>1)</sup>:

$$\Phi(t_v, x_v; h) = \sum_{i=1}^4 a_i k_i, \quad k_i = f(T_i, X_i),$$

$$T_1 = t_v, \quad T_i = t_v + h p_i, \quad (i = 2, 3, 4).$$

$$X_1 = x_v, \quad X_i = x_v + h p_i k_{i-1}.$$

Die Konstanten  $a_i, p_i$  haben die Werte:

$i$	1	2	3	4
$a_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$p_i$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Das Flußdiagramm des Verfahrens *Runge-Kutta*, das dieser Darstellung der Zuwachsfunktion entspricht, ist in Bild 5.21 wiedergegeben.

Die Erweiterung der bis hierher durchgeführten Überlegungen auf die Integration einer Anfangswertaufgabe für eine Vektordifferentialgleichung des Typs (5.152) bereitet keine Schwierigkeiten. Man hat lediglich die skalare Zuwachsfunktion (5.157) durch die vektorwertige Zuwachsfunktion  $\Phi$  zu ersetzen:

$$\Phi(t, x; h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (5.159)$$

$$k_1 = f(t, x), \quad k_2 = f(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}h k_1),$$

$$k_3 = f(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}h k_2), \quad k_4 = f(t + h, x + h k_3).$$

Für die Integration von Differentialgleichungssystemen sind die Flußdiagramme Bild 5.20 und 5.21 entsprechend zu erweitern.

Das *Runge-Kutta*-Verfahren kann auf ein beliebiges System der ballistischen Bewegungsgleichungen angewandt werden; die Variablen  $(t; x^1; \dots, x^n)$  stehen stellvertretend für die speziellen Bahnelemente des betreffenden Flugbahnanfangswertproblems.

In diesem Zusammenhang soll auf zwei grundsätzliche Schwierigkeiten hingewiesen werden, die bei der numerischen Integration der ballistischen Bewegungsgleichungen auf Rechenautomaten auftreten.

<sup>1)</sup> Die Darstellung folgt dem bereits mehrfach zitierten Buch von *Henrici*.

Um die Bewegungsgleichungen integrieren zu können, ist das Standard-Luftwiderstandsgesetz in den Automaten einzugeben, das aber in der Regel nur tabellarisch vorliegt.

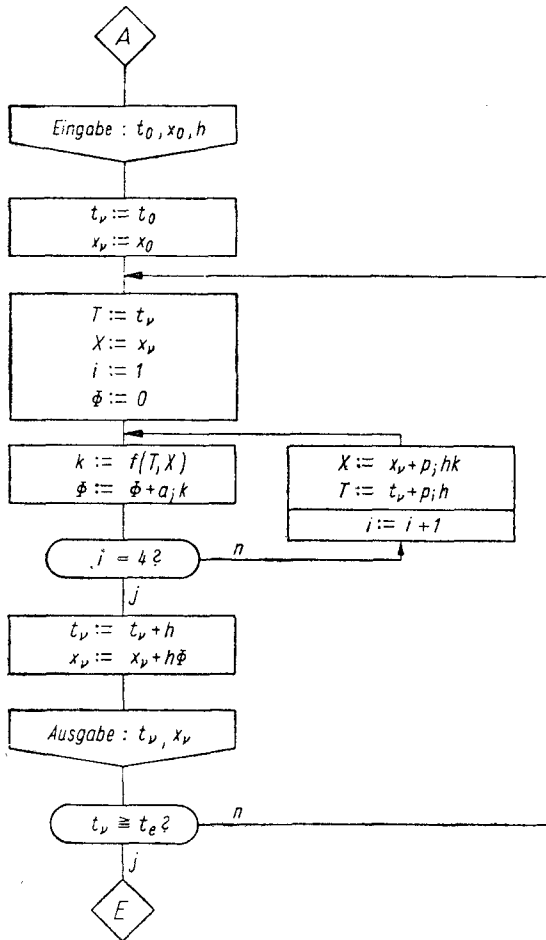


Bild 5.21  
Flußdiagramm für das  
Verfahren Runge-  
Kutta (Form 2)

Hat man hinreichend Speicherkapazität zur Verfügung, so könnte man die  $G(v_r)$ - oder  $c_w(M)$ -Tabelle vollständig speichern. Es ist jedoch rationeller, den Verlauf der Verzögerungsfunktion abschnittsweise durch geeignete Funktionen (etwa Polynome) zu approximieren. Durch diesen

Kunstgriff verringert sich der Bedarf an Speicherplätzen durchgreifend, da man jetzt nur noch die Koeffizienten der Approximationspolynome, die Grenzen der Approximationsintervalle sowie die Prozedur zur Berechnung der Funktionswerte zu speichern hat.

Für die Widerstandsfunktion  $F_{4,3}(v_\tau)$  ist ein einfacher Approximationsansatz bereits in Abschnitt 3.5.2., Gleichung (3.115), angegeben worden.

Die *Flugbahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt* fallen bei der numerischen Integration der ballistischen Bewegungsgleichungen nach dem Verfahren *Runge-Kutta* nicht unmittelbar an. Man kann sich diese Bahnelemente wie folgt beschaffen: Unter Benutzung der Beziehungen  $\dot{y}_g = 0$  und  $y_e = y_0$  schätzt man zunächst die Flugzeit bis zum Gipfel  $t = t_g$  sowie die Flugzeit bis zum Auftreffpunkt  $t = t_e$  und führt danach von der gipfelnächsten Stützstelle  $t = t_j$  und der dem Auftreffpunkt am nächsten liegenden Stützstelle  $t = t_k$  zusätzliche Integrations-schritte mit den Schrittweiten  $h_g = t_g - t_j$  bzw.  $h_e = t_e - t_k$  aus. Diese Prozedur wird so lange wiederholt, bis die Bedingungsgleichungen für den Gipfel- und Auftreffpunkt exakt erfüllt sind (siehe hierzu Übungsaufgabe 5.25.).

### **\*5.6.5. Spezielle Schrittweite-Bemessungsverfahren**

Im folgenden sollen einige Schrittweite-Bemessungsverfahren besprochen werden, die in Verbindung mit dem Verfahren *Runge-Kutta* Bedeutung erlangt haben. Die Darstellung beschränkt sich hierbei auf die mathematisch und ballistisch wesentlichen Gesichtspunkte; die rechen-technische Gestaltung der Bemessungskriterien und ihr Einbau in die Integrationsprozedur bleiben unberücksichtigt. Man findet bei Bedarf hierüber Näheres in der einschlägigen mathematischen Fachliteratur.

#### *5.6.5.1. Schrittweitenkriterien unter Verwendung des lokalen Abbrechfehlers*

Die überwiegende Anzahl der in der Praxis routinemäßig angewandten Verfahren zur automatischen Kontrolle der Schrittweite prüft, ob die Norm (der Betrag) des lokalen Abbrechfehlers innerhalb gewisser vorgegebener Schranken liegt.

Die Beliebtheit der lokalen Bemessungsverfahren dieses Typs ist darauf

zurückzuführen, daß der lokale Abbrechfehler relativ leicht numerisch ermittelt werden kann. Hierfür bieten sich drei unterschiedliche Wege an:

- das nochmalige Durchlaufen des Integrations schritts mit der halben Schrittweite;
- die Vor- und Rückwärtsintegration jedes Schrittes (bei Verfahren ungerader Ordnung);
- die Herleitung eines Fehlerterms aus den Funktions- und Zuwachswerten, die bei der Durchführung des Einsc hritt-Verfahrens anfallen.

a) *Ermittlung des lokalen Abbrechfehlers durch Zweitintegration mit halber Schrittweite*

Der Integrations schritt  $t_v \rightarrow t_v + h$  werde zweimal durchlaufen: das erste Mal mit der Schrittweite  $h$ , das zweite Mal mit der Schrittweite  $h/2$ .

Es seien  $\Phi(t, \mathbf{x}; h)$  die Zuwachsfunktion des verwendeten Einsc hritt-Verfahrens und  $\delta_1, \delta_2$  die mit den Schrittweiten  $h$  bzw.  $h/2$  berechneten Zuwächse der Lösung des Anfangswertproblems. Dann gilt symbolisch

$$\delta_1 = h \Phi(t_v, \mathbf{x}_v; h),$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2} h \{ \Phi(t_v, \mathbf{x}_v; \frac{1}{2} h) + \Phi[t_v + \frac{1}{2} h, \mathbf{x}_v + \frac{1}{2} h \Phi(t_v, \mathbf{x}_v; \frac{1}{2} h); \frac{1}{2} h] \}.$$

Durch *Taylor*-Entwicklung der rechten Seiten an der Stelle  $(t_v, \mathbf{x}_v)$  nach Potenzen von  $h$  läßt sich zeigen, daß zwischen  $\delta_1, \delta_2$  und der Fehler-Hauptfunktion  $r(t_v, \mathbf{x}_v)$  die Beziehung besteht<sup>1)</sup>:

$$r(t_v, \mathbf{x}_v) = \frac{h^{-p-1}}{1 - 2^{-p}} (\delta_1 - \delta_2) + O(h) \quad (5.160)$$

( $p$ : Ordnung des Einsc hritt-Verfahrens).

Für den Fehler  $\varrho$  der Feinrechnung (Schrittweite:  $h/2$ ) beim Fortschreiten von  $t_v \rightarrow t_v + \frac{1}{2} h \rightarrow t_v + h$  gilt somit näherungsweise

$$\varrho \approx 2 \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^{p+1} r(t_v, \mathbf{x}_v) = \frac{2^{-p}}{1 - 2^{-p}} (\delta_1 - \delta_2),$$

$$\varrho = \frac{1}{2^p - 1} (\delta_1 - \delta_2). \quad (5.161)$$

<sup>1)</sup> Siehe etwa *Henrici*, a. a. O.

Das Verfahren *Runge-Kutta* hat die Ordnung  $p = 4$ , so daß der Fehler der Feinrechnung (im Punkt  $t = t_v + h$ ) etwa  $\frac{1}{15}$  der Differenz der Lösungen bei Grob- und Feinrechnung beträgt:

$$\varrho_{\text{RK}} \approx \frac{1}{15} (\delta_1 - \delta_2).$$

Als *Kontrollfunktion*  $g(t)$  dient in der Regel die betragsmäßig größte Komponente des lokalen Abbrechfehlers

$$g_v = g(t_v) = \max_i |\varrho^i(t_v, \mathbf{x}_v)| \quad (i = 1, \dots, n).$$

Der gemäß (5.161) berechnete Fehler kann zur Korrektur des Ergebnisses der Feinintegration benutzt werden. Die effektive Ordnung des benutzten Einschritt-Verfahrens erhöht sich damit um eins (von  $p$  auf  $p + 1$ ).

b) *Ermittlung des lokalen Abbrechfehlers durch Rückintegration mit der gleichen Schrittweite*

Ist das Einschritt-Verfahren von ungerader Ordnung ( $p = 2m + 1$ ), dann kann die Fehler-Hauptfunktion dadurch ermittelt werden, daß man an den Integrationsschritt  $t = t_v \rightarrow t = t_v + h$  den Schritt  $t = t_v + h \rightarrow t = t_v$  anschließt, wobei die Endwerte des ersten Schrittes als Anfangswerte des zweiten Schrittes dienen. Man gelangt bei dieser *Rückintegration* wieder zur Stelle  $t = t_v$ ; der Funktionswert  $\mathbf{x}_v^*$ , der sich hierbei ergibt, wird sich jedoch von dem Ausgangswert  $\mathbf{x}_v$  des ersten Schrittes um  $\delta_R$  unterscheiden:

$$\delta_R = \mathbf{x}_v^* - \mathbf{x}_v.$$

Schreibt man die linearen Störungsgleichungen für den fortgepflanzten Abbrechfehler auf, so läßt sich leicht zeigen, daß zwischen der Abweichung  $\delta_R$  und der Fehler-Hauptfunktion  $r(t, \mathbf{x})$  die einfache Beziehung besteht<sup>1)</sup>:

$$\mathbf{r}_v = r(t_v, \mathbf{x}_v) = \frac{1}{2} h^{-2m} \delta_R + O(h). \quad (5.162)$$

Wird ein Anfangswertproblem nach einem Einschritt-Verfahren ungerader Ordnung integriert, so sollte die Ermittlung des Verlaufs der entsprechenden Fehler-Hauptfunktion nicht nach (5.160), sondern

<sup>1)</sup> Siehe *Ceschino, F., Kuntzmann, I.*: Remarques sur l'erreur dans la résolution approchée de conditions initiales. *Chiffres* 2 (1959), S. 249 bis 252.

nach (5.162) erfolgen: Bei gleicher Schrittweite  $h$  der Hauptrechnung erfordert die Berechnung der Fehler-Hauptfunktion an Hand von (5.160) drei Integrationsschritte, bei Verwendung von (5.162) hingegen nur zwei.

c) *Ermittlung der Fehler-Hauptfunktion aus den Zuwachsgrößen des Einschnitt-Verfahrens*

Bei der Berechnung des lokalen Abbrechfehlers mit Hilfe der unter a) und b) besprochenen Verfahren sind zwei bzw. drei zusätzliche Integrationsschritte (je Integrationsschritt der Hauptrechnung) erforderlich. Man hat deshalb – mit Erfolg – nach Wegen gesucht, den lokalen Abbrechfehler an Hand der Funktionswerte und Zuwachsgrößen zu schätzen, die bei der Integration des betreffenden Anfangswertproblems ohnehin berechnet werden müssen.

So sind spezielle Einschnitt-Verfahren konstruiert worden, deren Zuwachsgrößen  $k_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) in einfacher Weise mit der Fehler-Hauptfunktion zusammenhängen.

Als Beispiel sei ein Einschnitt-Verfahren angeführt, das mit 4 Stützstellen und 5 Funktionswerten je Schritt arbeitet<sup>1)</sup>:

$$x_{v+1} = x_v + h_v \Phi(t_v, x_v; h_v),$$

$$\Phi(t_v, x_v; h_v) = \frac{1}{2} (k_1 + 4 k_4 + k_5);$$

$$k_1 = \frac{1}{3} f(t_v, x_v),$$

$$k_2 = \frac{1}{3} f(t_v + \frac{1}{3} h_v, x_v + h_v k_1),$$

$$k_3 = \frac{1}{3} f(t_v + \frac{2}{3} h_v, x_v + \frac{1}{2} h_v k_1 + \frac{1}{2} h_v k_2),$$

$$k_4 = \frac{1}{3} f(t_v + \frac{1}{2} h_v, x_v + \frac{3}{8} h_v k_1 + \frac{9}{8} h_v k_3),$$

$$k_5 = \frac{1}{3} f(t_v + h_v, x_v + \frac{3}{2} h_v k_1 - \frac{9}{2} h_v k_3 + 6 h_v k_4).$$

Als Schrittweite-Kontrollfunktion  $g(t)$  wird verwendet

$$g_{v+1} = \frac{1}{3} (k_1 - \frac{9}{2} k_3 + 4 k_4 - \frac{1}{2} k_5).$$

In der mathematischen Literatur findet man eine Vielzahl ähnlicher Verfahren.

<sup>1)</sup> *Lance, G.N.: Numerical methods for high-speed computers. London 1960. (Russ. Übers.: Ланс, Дж. Н.: Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. Москва 1962.)*

### 5.6.5.2. Schrittweitenkriterien unter Berücksichtigung des fortgepflanzten Abbrechfehlers

Der lokale Abbrechfehler, zu dessen Berechnung in Abschnitt 5.6.5.1. mehrere Wege angegeben worden sind, ist der mathematische Verfahrensfehler, der bei der Ausführung des in Frage stehenden Integrations-schrittes  $t = t_v \rightarrow t = t_v + h_v$  neu entsteht. Sein Betrag gestattet keine Rückschlüsse darauf, wie groß der Einfluß der Verfahrensfehler der vorangegangenen Integrations-schritte auf die Genauigkeit der Lösung an der Stelle  $t = t_v + h_v$  ist.

Sollen bei der Schrittweitenbemessung sowohl der lokale Abbrechfehler wie auch die von den vorangegangenen Integrations-schritten fortgepflanzten Abbrechfehler berücksichtigt werden, so ist man gezwungen, parallel zu dem zu lösenden Anfangswertproblem die zugeordneten Störungsdifferentialgleichungen<sup>1)</sup> zu integrieren.

Die Berechnung des lokalen Abbrechfehlers und die Ermittlung des fortgepflanzten Abbrechfehlers sind bei dem *Verfahren von Shintani*<sup>2)</sup> elegant gelöst.

Das Verfahren von *Shintani* faßt die Integrations-schritte zu Blöcken von  $n$  Schritten ( $n \geq 4$ ) zusammen; innerhalb dieser Blöcke wird die Schrittweite konstant gehalten. Eine Änderung der Schrittweite ist damit nur jeweils zu Beginn eines neuen Blockes möglich.

Die Abbrechfehler, die innerhalb eines Blockes entstehen, sind aus den  $(n + 1)$  Funktionswerten  $f(t_v, \mathbf{x}_v)$  ( $v = 0, 1, \dots, n$ ) sowie den  $n$  Zuwachsfunktionen  $\Phi(t_v, \mathbf{x}_v)$  ( $v = 0, 1, \dots, n - 1$ ) berechenbar.

Der resultierende Verfahrensfehler  $\xi(t)$  – die Summe aus fortgepflanztem Abbrechfehler und neu entstandenem lokalem Abbrechfehler – ergibt sich als Lösung der Fehlerdifferentialgleichung

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= f[t, v(t)] - f[t, v(t) - \xi - d(t)], \\ \xi(t_0) &= d_0, \end{aligned} \tag{5.163}$$

worin  $v(t)$  und  $d(t)$  stetige Funktionen bedeuten, die an den Stützstellen mit der numerisch ermittelten Lösung des Anfangswertproblems

<sup>1)</sup> Man nennt die Störungsdifferentialgleichungen im vorliegenden Fall auch kurz „Fehlergleichungen“.

<sup>2)</sup> Siehe *Shintani, H.*: Approximate computation of errors in numerical integration of ordinary differential equations by one-step methods. *J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A I*, 29 (1965), S.97 bis 120.

bzw. dem lokalen Abbrechfehler übereinstimmen:

$$v(t_v) = x_v, \quad d(t_v) = \varrho_v, \quad (v = 0, 1, 2, \dots).$$

Die Fehlergleichungen können nach einem beliebigen Einschritt-Verfahren integriert werden. Man benutzt jedoch zweckmäßigerweise die gleichen Stützstellen wie bei der Blockintegration des zu lösenden Anfangswertproblems.

Das Verfahren von *Shintani* liefert sehr zuverlässige Informationen über die Größe des fortgepflanzten Abbrechfehlers; es ist deshalb insbesondere für Grundlagenuntersuchungen geeignet. Hinsichtlich der Einzelheiten sei auf die zitierte Originalarbeit verwiesen.

### 5.6.5.3. Die natürliche Schrittweite nach Collatz

Bei vielen Aufgabenstellungen interessiert ausschließlich die Lösung im Endpunkt  $t_e$  des Integrationsintervalls  $[t_0, t_e]$ . Man legt in diesem Fall keinen besonderen Wert auf die absolute Genauigkeit der Lösung in den Zwischenpunkten  $t \in [t_0, t_e]$ , sondern achtet vielmehr darauf, daß sich die lokalen Abbrechfehler möglichst schwach auf die folgenden Integrationsschritte fortpflanzen. Zur Schrittweitenbemessung wird deshalb ein Maß für die Stärke der Fehlerfortpflanzung benötigt.

Wie *Collatz*<sup>1)</sup> gezeigt hat, hängt die Stärke der Fehlerfortpflanzung wesentlich von der Größe der sogenannten *Schrittkennzahl*  $K^*$  ab: Die Fehlerfortpflanzung ist um so schwächer, je kleinere Zahlenwerte  $K^*$  hat.

Zwischen der Schrittkennzahl  $K^*$  und der Schrittweite  $h(t)$  besteht die Beziehung

$$K^* = \Lambda(t) h(t). \quad (5.164)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\Lambda(t)$ , der sogenannte *Schrittfaktor*, ist eine Funktion der rechten Seite des zu integrierenden Anfangswertproblems (5.152) und an jeder Stelle  $t$  des Integrationsintervalls  $[t_0, t_e]$  definiert. Gibt man den Zahlenwert der Schrittkennzahl  $K^*$  vor, dann ist (5.164) als Definitionsgleichung der (lokalen) Schrittweite  $h(t)$  zu lesen:

$$h(t) = \frac{K^*}{\Lambda(t)}. \quad (5.165)$$

<sup>1)</sup> Siehe *Collatz, L.*: Natürliche Schrittweite bei numerischer Integration von Differentialgleichungssystemen. *Z. Angew. Mathem. Mech.*, 22 (1942), S.216 bis 225.



Die Zahlenwerte von  $K^*$  liegen (bei mittleren Genauigkeitsansprüchen) in der Größenordnung  $K^* = 0,2 \dots 0,3$ .

Ein gemäß (5.165) gewählter Schrittweitenverlauf heißt nach *Collatz natürliche Schrittweite*.

Der Schrittfaktor  $\lambda(t)$  ist die Maximalwurzel des charakteristischen Polynoms

$$\det [\bar{B}(t) - \lambda I] = 0, \quad (5.166)$$

worin  $\bar{B}(t)$  die  $n \times n$ -Matrix mit den Elementen

$$\bar{B}^{ik}[t, \mathbf{x}(t)] = \left. \frac{\partial f^i(t, \mathbf{x})}{\partial x^k} \right|_{\mathbf{x}=\varphi(t)} \quad (i, k = 1(1)n)$$

und  $I_n$  die Einheitsmatrix  $n$ -ter Ordnung bedeuten.

Unter Verwendung der Abkürzung

$$f_{ik} := \left. \frac{\partial f^i(t, \mathbf{x})}{\partial x^k} \right|_{\mathbf{x}=\varphi(t)}$$

lautet die Determinante (5.166) ausführlich

$$\begin{vmatrix} f_{1|1} - \lambda & f_{1|2} & \cdots & f_{1|n} \\ f_{2|1} & f_{2|2} - \lambda & \cdots & f_{2|n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n|1} & f_{n|2} & \cdots & f_{n|n} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5.167)$$

Besteht das zu integrierende Differentialgleichungssystem nur aus einer einzigen skalaren Gleichung,

$$dx/dt = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

so reduziert sich die Determinante (5.167) auf

$$f_{1|1} - \lambda = 0, \quad \lambda(t) = \lambda(t) = \left. \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}=\varphi(t)} = 0.$$

Die partielle Ableitung  $\partial f/\partial x$  kann näherungsweise aus den Zuwachsgrößen  $k_j$  des *Runge-Kutta*-Verfahrens gebildet werden.

Ist die Zuwachsfunktion  $\Phi$  etwa in der Form (5.157) gegeben, dann gilt

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{t^*} &\approx \frac{f(t_v + \frac{1}{2}h, x_v + \frac{1}{2}h k_0) - f(t_v + \frac{1}{2}h, x_v + \frac{1}{2}h k_1)}{(x_v + \frac{1}{2}h k_0) - (x_v + \frac{1}{2}h k_1)}, \\ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{t^*} &\approx \frac{2(k_2 - k_3)}{h(k_0 - k_1)}, \quad t^* = t_v + \frac{1}{2}h. \end{aligned} \quad (5.168)$$

### 5.6.6. Einige Bemerkungen zur Gesamtgenauigkeit der numerischen Integration der Bewegungsgleichungen

Bei der Behandlung der Integrationsalgorithmen und Schrittweitenbemessungsverfahren sind Hinweise auf die Anzahl der mitzuführenden Stellen sowie die verbürgte Genauigkeit der Bahnelemente, die durch numerische Integration ermittelt worden sind, zunächst unterblieben. In diesem Abschnitt sollen deshalb einige Bemerkungen zur Genauigkeit der numerischen Bahnintegration nachgetragen werden.

Die Genauigkeit, mit der man die Bahnelemente (numerisch) erhält, wird (bei vorgegebenem Einschnitt-Verfahren) nicht ausschließlich durch die mitgeführte Stellenanzahl und den Schrittweitenverlauf bestimmt. Um verbindliche Aussagen über die Genauigkeit der numerisch ermittelten Lösung treffen zu können, darf sich die Fehleranalyse nicht nur auf den Integrationsalgorithmus beschränken, sondern muß sich auch auf die Prozeduren erstrecken, die den Integrationsalgorithmus rechentechnisch realisieren. Besonderes Augenmerk ist hierbei auf diejenigen Programme zu richten, mit denen die Funktionen berechnet (approximiert) werden, die in die rechten Seiten des zu integrierenden Differentialgleichungssystems eingehen.

Eine zu ungenaue Approximation der empirischen Luftwiderstandsfunktion zum Beispiel kann die Lösung des Vorhersageproblems völlig verfälschen. Die Versäumnisse bei der numerischen Approximation des Luftwiderstandsgesetzes lassen sich auch durch eine extrem kleine Integrationsschrittweite und eine große Anzahl mitgeführter geltender Ziffern nicht mehr kompensieren.

Allgemeingültige Genauigkeitsforderungen für die Bahnintegration (und daraus abgeleitete Regeln, wie viele geltende Ziffern bei der Integration mitzuführen sind) lassen sich leider nicht angeben; die Genauigkeitsansprüche der ballistischen Praxis reichen von der Überschlagsrechnung bis zur Schußtafelpräzision.

Bei der Flugbahnberechnung für Schußtafeln der Erdartillerie ermittelt man die Bahnkoordinaten in der Regel auf 0,1 m genau, die Flugzeiten auf 0,01 s genau. Diese Zahlen sagen nichts über die tatsächliche (physikalische) Gesamtgenauigkeit der Schußtafelangaben aus; siehe hierzu die Ausführungen in Kapitel 7.

Die zweite Bemerkung betrifft den *Einfluß der Rundungsfehler auf die Integrationsergebnisse*.

Die Fehlertheorie, die den Kriterien zur Schrittweitenbemessung zugrunde liegt, erfaßt ausschließlich die mathematischen Verfahrens-

fehler, die sogenannten *Abbrechfehler*. Die Rundungsfehler waren (im Vergleich zur Größe der Abbrechfehler) als vernachlässigbar klein angenommen worden.

Diese Annahme ist nicht immer zutreffend, insbesondere dann nicht, wenn eine große Anzahl von (numerischen) Integrationsschritten nacheinander auszuführen ist. Haben aber Rundungs- und Abbrechfehler die gleiche Größenordnung, so ergibt sich für die günstigste Wahl des Schrittweitenverlaufs eine völlig andere Situation.

Um dies zu erläutern, werde angenommen, ein skalares Anfangswertproblem des Typs

$$dx/dt = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

sei nach einem vorgegebenen Einschnitt-Verfahren über das Intervall  $[t_0, t_n]$  zu integrieren, und zwar mit der konstanten Schrittweite  $h$ .

Ist  $h$  groß, so wird das Integrationsintervall in wenigen Schritten durchlaufen. Da hierzu relativ wenig Rechenschritte auszuführen sind, wird der Einfluß der Rundungsfehler gering sein; es ist jedoch mit großen Abbrechfehlern zu rechnen.

Verkleinert man die Schrittweite  $h$  kontinuierlich ( $h \rightarrow 0$ ), so nimmt die Anzahl der Integrationsschritte – und damit auch der Einfluß der Rundungsfehler – ständig zu; die Abbrechfehler werden jedoch kleiner.

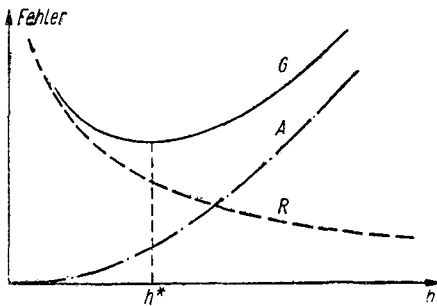


Bild 5.23

Überlagerung von Rundungs- und Abbrechfehlern (schematische Darstellung)

$A$  – Betrag des Abbrechfehlers;

$R$  – Betrag des Rundungsfehlers;

$G$  – Summe der Fehlerbeträge

( $G = A + R$ )

Aus dem gegenläufigen Verhalten von Abbrech- und Rundungsfehlern kann gefolgert werden, daß es einen optimalen Schrittweitenverlauf  $h = h^*$  gibt, für den die Summe der Beträge von resultierendem Abbrechfehler und resultierendem Rundungsfehler minimal wird (siehe Bild 5.23).

Der Verlauf der Kurve  $G$  in Bild 5.23 läßt erkennen, wie wichtig es ist, die Schrittweite überlegt und zweckentsprechend zu wählen.

Um den Einfluß der Rundungsfehler quantitativ zu erfassen, müssen wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle der Fehlerfortpflanzung benutzt werden. Hierzu sind eine Reihe von relativ einschneidenden Annahmen über die statistische Unabhängigkeit der Fehler aufeinanderfolgender Rechenoperationen und Integrationssschritte notwendig.

Die rechentechnische Auswertung der Rundungsfehler-Modelle erfolgt in der Regel mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode.

## **5.7. Ballistische Tafelwerke für die Flugbahnelemente**

### **5.7.1. Inhalt und Aufstellung der Tafeln für die Flugbahnelemente**

Bei der Aufstellung von Schußtafeln, der Vorbereitung und Auswertung von Versuchsschießen, der Konstruktion von Artilleriewaffen und Geschossen sowie bei der Behandlung vieler anderer theoretischer und praktischer Probleme der Außenballistik benötigt man die Bahnelemente einer großen Anzahl von Flugbahnen. Es ist deshalb zweckmäßig, Tabellen anzulegen, die die Bahnelemente als Funktion der drei Flugbahnparameter  $c$ ,  $v_0$ ,  $\vartheta_0$  enthalten.

Für konventionelle Geschosse sind zwei Arten von Tafeln gebräuchlich:

#### *a) Tafeln der Bahnelemente im Auftreff- und Gipfelpunkt*

Sie enthalten  $x_e$ ,  $t_e$ ,  $v_e$ ,  $|\vartheta_e|$  und  $y_g$  als Funktion der drei Flugbahnparameter  $c$ ,  $v_0$ ,  $\vartheta_0$ .

#### *b) Tafeln der laufenden Flugbahnelemente*

Sie enthalten die Flugbahnkoordinaten  $x$  und  $y$ , die Bahngeschwindigkeit  $v$  und den Neigungswinkel der Flugbahntangente  $\vartheta$  als Funktion der Flugzeit  $t$  und der Bahnparameter  $c$ ,  $v_0$  und  $\vartheta_0$ .

Die Tafeln der ersten Art sind für das Aufschlagschießen der Erdartillerie (Bahnen der Klasse Boden – Boden) bestimmt; die Tafeln der zweiten Art dienen zur Berechnung der Bahnen von Fla-Geschossen und Geschossen der Erdartillerie mit (nicht automatischen) Abstandszündern.

Die Tafeln der Flugbahnelemente werden durch Tafeln der Störungskoeffizienten ergänzt (siehe Abschnitt 6.5.).

Für die Berechnung von Flugbahnvarianten im Rahmen der ballistischen Projektierung von Rohraffen, Geschossen und Zündern ist eine verhältnismäßig geringe Genauigkeit der in den Tafeln angegebenen Bahnelemente ausreichend. Soll das Tafelwerk jedoch zur Aufstellung von Schußtafeln benutzt werden, so müssen sehr hohe Genauigkeitsforderungen erhoben werden.

Systematische Fehler der Schußtafelangaben haben beim Einsatz der Waffe zur Folge, daß zur Erfüllung der vorgegebenen Gefechtsaufgaben ein erhöhter Munitionsverbrauch (und damit auch eine längere Feuerdauer) erforderlich ist. Das ist jedoch sowohl taktisch wie auch nachschubmäßig außerordentlich unerwünscht: Mit zunehmender Feuerdauer wächst die Wahrscheinlichkeit rasch an, daß der Gegner die feuernde Waffe aufklärt und außer Gefecht setzt. Zum anderen belastet ein erhöhter Munitionsbedarf die Nachschubwege und -transportmittel in ungerechtfertigter Weise.

Die Stützflugbahnen, auf denen die modernen ballistischen Tafelwerke für die Bahnelemente und Störungskoeffizienten aufbauen, werden ausschließlich durch wiederholte numerische Integration der Bewegungsgleichungen des klassischen Bahnmodells ermittelt. Die Tafelangaben für die übrigen Flugbahnen können aus den Daten dieser Stützbahnen durch Interpolation höherer Ordnung gewonnen werden.

Es ist unumgänglich, die durch die numerischen Integrationen und die hierauf aufbauenden Interpolationen ermittelten Tafelangaben sehr sorgfältig auszugleichen.

Die außenballistischen Tafelwerke für die Flugbahnelemente berücksichtigen im allgemeinen nur Abgangswinkel  $\vartheta_0 \geq 5^\circ$ . Bei rasanten Flugbahnen ( $\vartheta_0 < 5^\circ$ ) hat man in Gestalt des Verfahrens von *Siacci* ein Hilfsmittel zur Verfügung, mit dem rasch und genau sowohl direkte wie auch inverse Aufgaben gelöst werden können.

Die außenballistischen Tafelwerke und die Tafeln der *Siacci*-Funktionen befreien den praktisch tätigen Ballistiker weitgehend von der Notwendigkeit, Flugbahnrechnungen durch Rechenzentren ausführen zu lassen. Die mit den Tafelwerken bei sorgfältiger Arbeit erreichbare Genauigkeit reicht für die meisten angewandten Aufgaben (mit Ausnahme der Schußtafelberechnung) völlig aus.

### 5.7.2. Das außenballistische Tafelwerk für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943

Eines der besten außenballistischen Tafelwerke für die Bahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt ist das Tafelwerk [6], das auf dem 1946 veröffentlichten Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 aufbaut.<sup>1)</sup>

Die Tafeleingänge sind so gewählt, daß bei linearer Interpolation der Horizontalschußweiten der Interpolationsfehler kleiner als 0,2% der Schußweite ist.

Wie das folgende Zahlenbeispiel (1) zeigt, können bei linearer Interpolation in dem Tafelwerk die Interpolationsfehler die Fehler der Tafelangaben um ein vielfaches übersteigen.

Dem Tafelwerk liegt eine Schar von Stützbahnen zugrunde, die im  $t$ -System (4.9) nach dem *Verfahren von S. A. Kazakov* berechnet worden ist.<sup>2)</sup>

Das Verfahren von *Kazakov* ist ein modifiziertes Mehrschritt-Verfahren, dessen wesentliche Besonderheit darin besteht, daß die Extrapolation der Funktionswerte über die Verzögerungsfunktion  $E = c H_{\tau}(y) G(v_{\tau})$  erfolgt. Der Betrag dieser Funktion variiert längs der Flugbahn (ausgenommen die Bereiche mit  $M \approx 1$ ) verhältnismäßig langsam. Hierdurch sind beim Verfahren von *Kazakov* wesentlich weniger Integrationschritte erforderlich als beim Verfahren *Adams-Störmer*<sup>3)</sup>, dem klassischen Mehrschritt-Verfahren zur Integration von Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Ein kurzer Auszug aus den Tafeln der Bahnelemente ist im Anhang, Tafel IX, enthalten.

### 5.7.3. Zahlenbeispiele für die Interpolation in den Tafeln der Bahnelemente

In diesem Abschnitt werden zwei einfache direkte Aufgaben mit Hilfe des außenballistischen Tafelwerkes gelöst.

<sup>1)</sup> Hinsichtlich des Standard-Luftwiderstandsgesetzes 1943 siehe Abschnitt 3.5.2.

<sup>2)</sup> Eine ausführliche Darstellung des Verfahrens von *Kazakov* gibt *Raykov* in dem einleitenden Kapitel von [33].

<sup>3)</sup> Siehe etwa *Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*. 5. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1965.

**Beispiel 1:** Ermittlung der Horizontalschußweite  $x_e$  einer Flugbahn mit den Bahnparametern  $c_{43} = 0,30 \text{ m}^2/\text{kg}$ ;  $v_0 = 775 \text{ m/s}$ ;  $\vartheta_0 = 35^\circ$ .

a) *Lösung mit linearer Interpolation*

Man entnimmt Tafel IXa des Anhangs

$$x_e^{(1)} = \frac{1}{2} (25068 + 27462) \text{ m} = 26\,265 \text{ m}.$$

b) *Lösung mit quadratischer Interpolation*

Zur Interpolation wird die *Besselsche* Interpolationsformel benutzt (in der Form<sup>1)</sup>):

$$z\left(\frac{1}{2}\right) = \bar{z}_{1/2} - \frac{1}{8} \bar{\delta}^2 z_{1/2} + \dots \quad (5.172)$$

$$\bar{z}_{1/2} = \frac{1}{2} (z_0 + z_1);$$

$$\bar{\delta} z_0 = \frac{1}{2} (\delta z_{-1/2} + \delta z_{1/2});$$

$$\bar{\delta}^2 z_{1/2} = \frac{1}{2} (\delta^2 z_0 + \delta^2 z_1).$$

Das Differenzenschema, aus dem die zentralen Differenzen  $\delta z$ ,  $\delta^2 z$  entnommen werden, lautet:

$\nu$	$(x_e)_\nu$	$\delta x_\nu$	$\delta^2 x_\nu$
-1	22804		
0	25068	2264	130
+1	27462	2394	155
+2	30011	2549	

*Tabelle 5.19*

Somit ist

$$\bar{\delta}^2 x_{1/2} = \frac{1}{2} (130 + 155) \text{ m} = 142,5 \text{ m},$$

und man erhält für die Horizontalschußweite  $x_e$  gemäß (5.172):

$$x_e^{(q)} = 26265 \text{ m} - \frac{1}{8} \cdot 142,5 \text{ m} = 26265 \text{ m} - 18 \text{ m} = 26\,247 \text{ m}.$$

Der Schußweitenfehler durch die lineare Interpolation in der Tafel beträgt

$$18 \text{ m} \cong 0,7 \text{ ‰}.$$

In gleicher Weise lassen sich auch die anderen Flugbahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt berechnen (siehe Übungsaufgabe 5.27.).

<sup>1)</sup> Siehe etwa das auf Seite 322 zitierte Buch von *Zurmühl*, in dem auch die verwendete Differenzensymbolik erklärt ist.

**Beispiel 2:** Ermittlung der Horizontalschußweite  $x_e$  einer Flugbahn mit den Bahnparametern  $c_{4,3} = 0,35 \text{ m}^2/\text{kg}$ ;  $v_0 = 775 \text{ m/s}$ ;  $\vartheta_0 = 32,5^\circ$ .

An Hand der im Anhang, Tafel IX a, angegebenen Schußweitenwerte findet man durch dreifache lineare Interpolation:  $x_e = 23414 \text{ m}$ ; siehe die Interpolationsschemen Tabelle 5.20 und 5.21.<sup>1)</sup>

*Tabelle 5.20*

$\vartheta_0 = 30^\circ$			
$c \backslash v_0$	750	775	800
0,34	22078	23059,5	24041
0,35		22708,5	
0,36	21432	22357,5	23283
$\vartheta_0 = 35^\circ$			
$c \backslash v_0$	750	775	800
0,34	23455	24502,0	25549
0,35		24119,3	
0,36	22754	23736,5	24719

*Tabelle 5.21*

$\vartheta_0$	30°	32,5°	35°
$x_e$	22708,5	23413,9	24119,3

$$x_e = 23413,9 \text{ m}$$

Die Lösung dieser Aufgabe unter Verwendung der quadratischen Interpolation sei dem Leser überlassen.

Die Lösung inverser Aufgaben, wie die Ermittlung des erforderlichen Abgangswinkels bei gegebenem  $c, v_0, x_e$ , erfolgt analog.

<sup>1)</sup> In den Interpolationsschemen sind Anfangsgeschwindigkeiten in m/s, Ballistische Koeffizienten in  $\text{m}^2/\text{kg}$  und Schußweiten in m angeführt.



## Kontrollfragen zu Kapitel 5

- 5.1. Welche Verfahren kennen Sie zur Lösung des 1. Hauptproblems der Äußeren Ballistik für das klassische Bahnmodell? Erläutern Sie Besonderheiten und Anwendungsbereiche dieser Verfahren!
- 5.2. Welche prinzipiellen Unterschiede bestehen zwischen der Klasse der analytischen und der Klasse der numerischen Integrationsverfahren für die ballistischen Bewegungsdifferentialgleichungen?
- 5.3. Welcher Grundsatz gilt für die Genauigkeitsforderungen, die an ein Verfahren zur Lösung des Hauptproblems der Äußeren Ballistik zu stellen sind?
- 5.4. Unter welchen Voraussetzungen darf eine Flugbahn durch eine Gerade approximiert werden? Wie kann man den Fehler dieser Näherung abschätzen?
- 5.5. Wie ist vorzugehen, um aus Bahngeschwindigkeitsmessungen die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  zu ermitteln (Reduktion der Geschwindigkeitsmessungen auf die Mündung der Waffe)?
- 5.6. Welchen qualitativen Verlauf haben die Weg-Zeit-, Geschwindigkeit-Weg- und Geschwindigkeit-Zeit-Kurven
  - beim linearen Widerstandsgesetz,
  - beim quadratischen Widerstandsgesetzund konstanten meteorologischen Elementen?
- 5.7. Wie sind die Tafeln von *Otto/Lardillon* aufgebaut? Schildern Sie das Vorgehen zur Lösung des Anpassungsproblems (Anpassung der Horizontalschußweiten)!
- 5.8. Worin besteht das Wesen des *Siacci*-Ansatzes für die Verzögerungsfunktion? Auf welche Bahntypen ist die Zulässigkeit dieses Ansatzes beschränkt?
- 5.9. Nennen Sie Beispiele für spezielle *Siacci*-Ansätze, die aus dem allgemeinen *Siacci*-Ansatz hergeleitet werden können! Worin besteht die praktische Bedeutung dieser Ansätze?
- 5.10. Von welchen Parametern hängt der Verlauf der Flugbahnelemente beim Näherungsverfahren von *Siacci* ab? Welche Konsequenzen ergeben sich hieraus für die Vertafelung der Bahnelemente?
- 5.11. Was verstehen Sie unter *Primären Siacci-Funktionen* und *Sekundären Siacci-Funktionen*? In welcher Form werden diese Funktionen vertafelt?
- 5.12. Erläutern Sie die Ihnen bekannten allgemeinen Eigenschaften von *Siacci*-Flugbahnen!
- 5.13. Nennen Sie einige angewandte Aufgaben der Außenballistik, die mit Hilfe der *Siacci*-Formeln für die Bahnelemente gelöst werden können!
- 5.14. Welche Grundtypen außenballistischer Reihenentwicklungen der Flugbahnelemente kennen Sie?
- 5.15. Erläutern Sie die Anwendungsgebiete der außenballistischen Variablen- und Parameterreihen! Welche praktische Bedeutung kommt den *Popoffschen* Parameterentwicklungen zu?
- 5.16. Worin besteht der Grundgedanke des Verfahrens von *Piton-Bressant* und *Hélie* (Verfahren PBH)?
- 5.17. Wie wird beim Verfahren PBH das Anpassungsproblem gelöst?
- 5.18. Was läßt sich über die Genauigkeit und den Anwendungsbereich des Verfahrens PBH sagen? Man vergleiche das Verfahren PBH mit dem Verfahren von *Otto/Lardillon* (Näherungsansatz: Quadratisches Widerstandsgesetz und konstante meteorologische Elemente)!

- 5.19. Nennen Sie einige Probleme, die mit Hilfe des Verfahrens PBH gelöst werden können!
- 5.20. Welche Vor- und Nachteile haben die numerischen Integrationsverfahren gegenüber den analytischen Verfahren?
- 5.21. Worin unterscheiden sich Einschritt- und Mehrschritt-Verfahren zur Bahnintegration prinzipiell? Warum gibt man bei der numerischen Integration der ballistischen Bewegungsgleichungen den Einschritt-Verfahren den Vorzug vor den Mehrschritt-Verfahren?
- 5.22. Welche mathematische Struktur haben die numerischen Einschritt-Verfahren? Was verstehen Sie unter dem Begriff *Ordnung eines numerischen Integrationsverfahrens*? (Beispiel: Verfahren *Runge-Kutta*.)
- 5.23. Welche Möglichkeiten gibt es, bei der Integration eines vorgegebenen Anfangswertproblems die lokalen mathematischen Verfahrensfehler (Abbrechfehler) zu verringern?
- 5.24. Welche Struktur haben die in der Praxis benutzten Verfahren zur automatischen Schrittweitenkontrolle bei der numerischen Einschritt-Integration von Anfangswertproblemen? Nennen Sie einige spezielle Schrittweitenkriterien!
- 5.25. Welche Wege zur Berechnung des lokalen Abbrechfehlers (bzw. der Fehler-Hauptfunktion) eines numerischen Einschritt-Integrationsverfahrens sind Ihnen bekannt?
- 5.26. Diskutieren Sie den in Bild 5.22, Seite 317, wiedergegebenen Verlauf der Anfangsschrittweite  $h_0$  für die Integration des  $t$ -Systems der ballistischen Bewegungsgleichungen!
- 5.27. Welche Wechselwirkung besteht zwischen der Größe der Integrationsschrittweite sowie den Beträgen der resultierenden Rundungsfehler und der resultierenden Abbrechfehler, wenn ein Anfangswertproblem für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen über ein Intervall vorgegebener Länge zu integrieren ist?
- 5.28. Erläutern Sie Zweckbestimmung, Aufbau und praktische Anwendung der ballistischen Tafelwerke für die Flugbahnelemente!

### Übungsaufgaben zu Kapitel 5

- 5.1. Man ermittle die Flugbahnelemente für den schwerefreien Schuß in konstanter Atmosphäre bei Gültigkeit des *Chapelschen* Widerstandsansatzes:  $\Phi(M) = A_0 + A_1 M$ ! Wie kann die Anpassung der Formeln für die Bahnelemente an eine experimentell ermittelte Horizontalschußweite erfolgen?
- 5.2. Zu welchem geometrischen Kurventyp gehört der Weg-Zeit-Verlauf beim schwerefreien Schuß und quadratischem Widerstandsansatz?
- 5.3. Die in Abschnitt 5.2.1.5. wiedergegebenen Versuchswerte seien unter den meteorologischen Bedingungen: Luftdruck  $p_0 = 750$  Torr; Lufttemperatur  $\tau_0 = -20^\circ\text{C}$  ermittelt worden. Welcher Wert für die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  würde sich unter den Bodenbedingungen der Normalatmosphäre SSA-64 ergeben?
- 5.4. Wie lauten die Formeln für die Bahnelemente des Abschnitts 5.2., wenn man nicht von dem Widerstandsansatz  $b' = C_0 H(y) \Phi(M)$ , sondern von dem klassischen Ansatz  $b' = c H_\tau(y) G(v_\tau) v$  ausgeht? Wie ist in diesem Fall die Definition der Funktionen  $D^*$ ,  $T^*$ ,  $P_\pm$ ,  $Q_\pm$  zweckmäßigerweise abzuändern?

- 5.5. In welche Funktionen gehen die Funktionen  $P_{\pm}$ ,  $Q_{\pm}$  (Abschnitt 5.2.2.) über, wenn man  $g_0 = 0$  setzt?
- 5.6. Man ermittle die Flugbahnelemente für den senkrechten Schuß in konstanter Atmosphäre
- bei dem linearen Widerstandsansatz  $\Phi(M) = A_1 M$ ,
  - bei dem quadratischen Widerstandsansatz  $\Phi(M) = A_2 M^2$ !
- 5.7. Man zeige die allgemeinen Flugbahneigenschaften (Abschnitt 4.3.) für Flugbahnen in einer konstanten Atmosphäre bei Gültigkeit eines Potenzansatzes für die Verzögerungsfunktion  $\Phi(M) = A_n M^n$  ( $n = 1, 2$ )!
- 5.8. Die Formeln für die Bahnelemente beim linearen Widerstandsansatz (Abschnitt 5.3.1.) entwickle man in Potenzreihen nach  $E_0$  (bis zu den Gliedern mit  $E_0^2$ ) und führe anschließend den Grenzübergang  $E_0 \rightarrow 0$  durch!
- 5.9. Man berechne beim quadratischen Widerstandsansatz die Schnittpunkte der Asymptoten (Abschnitt 5.3.2.4.) mit den Koordinatenachsen!
- 5.10. Wie groß ist die „Fallschirmgeschwindigkeit“  $v_{gr}$  ( $t \rightarrow \infty$ ) für ein Potenzgesetz  $\Phi(M) = A_n M^n$  unter der Voraussetzung, daß die meteorologischen Elemente der Atmosphäre und die Fallbeschleunigung längs der Flugbahn konstant sind?
- 5.11. Man zeige, daß sich die Flugbahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt  $x_e, y_e, t_e$ ;  $x_e, t_e, \vartheta_e$  in der Form darstellen lassen:

- beim quadratischen Widerstandsgesetz (Abschnitt 5.3.2.):

$$\varphi = \bar{\varphi} \cdot F_{\bar{\varphi}}^*(k, p_0);$$

- beim Verfahren von *Siacci* (Abschnitt 5.4.):

$$\varphi = \bar{\varphi} \cdot F_{\bar{\varphi}}^{**}(\lambda_0, U_0),$$

wenn man mit  $\varphi$  das Bahnelement nach dem betreffenden Näherungsverfahren und mit  $\bar{\varphi}$  das entsprechende Bahnelement nach der parabolischen Theorie bezeichnet.

- 5.12. Man wiederhole die Rechnungen in Abschnitt 5.4.10.4. unter Verwendung der *Siacci*-Formelsätze I, V, VI, VIII! Es gelte die Normalatmosphäre SSA-64, die Mittelwerte des Luftdrucks und der Lufttemperatur seien  $p_0 = 770$  Torr,  $\tau_0 = -15^\circ\text{C}$ .
- 5.13. a) Man führe in dem *Siacci*-Formelsatz I den Grenzübergang  $k' \rightarrow 0$  aus und interpretiere die hierbei entstehenden Formeln!
- b) Welchen Grenzwerten streben die Sekundären *Siacci*-Funktionen (Tabelle 5.7) für  $k' \rightarrow 0$  zu?
- 5.14. Man berechne die Primären *Siacci*-Funktionen für den Fall, daß die Widerstandsfunktion  $G(U)$  durch einen Potenzansatz  $G(U) = B_n U^{n-1}$  darstellbar ist! Welche Gestalt nehmen in diesem Fall die *Siacci*-Formelsätze I bis III an?
- 5.15. Man beweise die Formeln für die vertikale Fallstrecke (5.120) und (5.121)!
- 5.16. Gilt die *Lendersche* Formel auch bei dem allgemeinen *Siacci*-Ansatz für die Verzögerungsfunktion mit  $k' = \text{const}$ ,  $\partial k' / \partial \vartheta_0 = 0$ ?
- 5.17. a) Man entwickle die Bahngeschwindigkeit  $v = v(x)$  an der Stelle  $x = x_1$  in eine *Taylor*-Reihe bis zu den Gliedern 2. Ordnung!
- b) Wie kann diese Reihendarstellung benutzt werden, um Geschößgeschwindigkeitsmessungen auf die Mündung der Waffe zu reduzieren?

*Zahlenbeispiel:*  $x_1 = 50$  m;  $v_1 = 700$  m;  $c_{43} = 8,5$  m<sup>2</sup>/kg;  $\vartheta \approx \vartheta_0 = 0$ .

- 5.18. Man entwickle die Bahnelemente  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $v(t)$ ,  $\vartheta(t)$  um den Abgangspunkt  $O$  nach Potenzen von  $t$ !
- 5.19. Man zeige: Beim Verfahren PBH sind die Bahnelemente eines laufenden Flugbahnpunkts  $(y, p, t, u)$  in der Form

$$\varphi = \bar{\varphi} \cdot F_{\varphi}(Z_e, \xi), \quad \xi := x/x_e$$

darstellbar, wenn man mit  $\varphi$  das Bahnelement nach dem Verfahren PBH und mit  $\bar{\varphi}$  das entsprechende Bahnelement nach der parabolischen Theorie bezeichnet. (Die Anpassung der Flugbahnen erfolge bezüglich der Horizontalschußweite  $x_e$ .)

- 5.20. Welche Darstellung ergibt sich für die Verzögerung durch den Luftwiderstand  $b'$ , wenn man annimmt, daß die Bahnkurve  $y = y(x)$  des Verfahrens PBH eine Lösung der Bewegungsgleichungen des klassischen Bahnmodells ist?
- 5.21. Man prüfe nach, ob die Flugbahneigenschaft 12 (Abschnitt 4.3.4.) für die Näherungslösung  $y = y(x)$  des Verfahrens PBH zutrifft!
- 5.22. Wie kann der Anpassungsfaktor  $Z_e$  des Verfahrens PBH aus den Angaben der Tabelle von *Otto Lardillon* bzw. den Tafeln der Sekundären *Siacci-Funktionen* ermittelt werden?
- 5.23. Es bestehe die Forderung, bei dem in Abschnitt 5.5.4.5. geschilderten Schießversuch den Auftreffpunkt in der Mündungsebene um  $|\Delta x_e| = 300$  m zu verlegen. Man ermittle mit Hilfe des Verfahrens PBH die den neuen Schußweiten entsprechenden Aufsatzwinkel sowie die Flugzeitänderungen! (Der Anpassungsfaktor  $K$  sei in dem Schußweitenbereich von 1700 m bis 2300 m in erster Näherung konstant.)
- 5.24. Man zeige: Alle Flugbahnen der Flugbahnschar mit variablem Abgangswinkel  $\vartheta_0$  ( $c, v_0 = \text{const}$ ) besitzen im Nullpunkt der  $\xi, \eta$ -Ebene die gleiche Tangentenrichtung und die gleiche Krümmung.
- 5.25. Man gebe ein Schema an, nach dem bei der numerischen Einschnitt-Integration der ballistischen Bewegungsgleichungen die Bahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt ermittelt werden können!
- 5.26. a) Man stelle die charakteristischen Polynome (5.166) für die in Abschnitt 4.2. angegebenen Systeme der ballistischen Bewegungsgleichungen auf!  
 b) Unter der Voraussetzung  $\vartheta_0 = 0$  ermittle man die Schrittfaktoren im Abgangspunkt  $A_0$ !  
 c) In welchem Variablensystem ist die größte Anfangsschrittweite zulässig? (Man setze  $K^* = \text{const}$  und sehe die Anfangsschrittweiten als infinitesimal kleine Zuwächse an.)
- 5.27. a) Man wiederhole die in Abschnitt 5.7.3. durchgeführten Rechnungen für die Bahnelemente  $t_e, v_e, |\vartheta_e|, y_g$  (Anhang, Tafeln IXb bis e)!  
 b) Welchen relativen Fehlern des Ballistischen Koeffizienten  $c$  entsprechen die Abweichungen der Bahnelemente bei linearer und quadratischer Interpolation? (Man stelle sich auf den Standpunkt der linearen Störungstheorie.)

## **6. Außenballistische Störungstheorie**

In diesem Kapitel werden Hauptaufgaben, Lösungsverfahren und praktische Anwendungen der außenballistischen Störungstheorie dargelegt.<sup>1)</sup>

### **6.1. Gegenstand und Methoden der außenballistischen Störungstheorie**

#### **6.1.1. Gegenstand der Störungstheorie**

Um ein (nicht lenkbares) Geschöß in ein vorgegebenes Ziel zu bringen, muß das Rohr (der Lauf) der betreffenden Waffe vor der Schußabgabe in eine definierte räumliche Lage gebracht werden. Die für das Treffen des Zieles erforderlichen Höhen- und Seitenwinkel des Rohres werden der Schußtafel der Waffe entnommen.

Da die Schußtafeln Zusammenstellungen von vorausberechneten Flugbahnelementen darstellen, hängt die Möglichkeit, treffsichere Schüsse abzugeben, wesentlich davon ab, wie zuverlässig der Flugbahnverlauf vorhergesagt werden kann.

Die Vorausberechnung des Flugbahnverlaufs erfolgt an Hand eines physikalischen Bahnmodells, das seinerseits durch ein Anfangswertproblem für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen beschrieben wird. Die Lösung dieses Anfangswertproblems liefert die Bahnelemente der vorhergesagten Bahn.

Da der Schußvorgang nahezu immer unter Bedingungen abläuft, die sich mehr oder weniger stark von den idealisierten Bedingungen unterscheiden, die dem Bahnmodell zugrunde liegen, werden die realen Flugbahnen und ihre Elemente in der Regel von den Normalbahnelementen der Schußtafel abweichen.

<sup>1)</sup> Weitere wichtige Anwendungen der außenballistischen Störungstheorie werden im Zusammenhang mit der Aufstellung von Schußtafeln (Kapitel 7) behandelt.

Die Abweichungen der tatsächlichen Bedingungen des Schießens von den Normalbedingungen der Schußtafeln können nach Betrag und Richtung bekannt sein, also systematische Störungen darstellen; sie können jedoch auch zufälligen (stochastischen) Charakter haben.

Neben den systematischen (ihrer Größe und Richtung nach bekannten) Störungen unterliegt das Geschoß während seiner Bewegung einer großen Anzahl im voraus nicht bekannter zufälliger Störungen. Unter den Bedingungen des praktischen Schießens sind selbst die Anfangsbedingungen der Flugbahn (die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und der Abgangswinkel  $\vartheta_0$ ) Zufallsgrößen; sie weichen infolge von technologischen Schwankungen der Geschoß- und Ladungseigenschaften sowie der unvermeidbaren Richt- und Justierfehler von Schuß zu Schuß in zufälliger Weise (mehr oder weniger stark) von ihren schußtafelmäßigen Sollwerten ab.

Die zufälligen Störungen bewirken, daß bei wiederholter Schußabgabe unter (makroskopisch) gleichen Bedingungen die Bahnelemente der betreffenden Flugbahnen um gewisse Mittelwerte streuen. Ein Bahnelement, wie etwa die Horizontalschußweite, wird dann nicht mehr durch *eine einzige Zahl* vollständig charakterisiert, sondern durch *eine statistische Verteilungsdichte* (im einfachsten Fall durch die Dichte einer mehrdimensionalen Normalverteilung).

Die Theorie der zufälligen (wahrscheinlichen) Streuungen der Bahnelemente bildet das Fundament der praktischen Schießverfahren.

Die außenballistische Störungstheorie beschäftigt sich ausschließlich mit den systematischen Abweichungen von den Voraussetzungen des Bahnmodells. Der Einfluß der zufälligen Abweichungen der Bedingungen des Schießens von den Normalbedingungen auf die Treffgenauigkeit ist Gegenstand der *Schießlehre*.<sup>1)</sup>

Für die ballistische Störungstheorie als Theorie der systematischen Flugbahnstörungen erwachsen die Aufgaben,

- die physikalischen Störursachen zu analysieren, die zu systematischen Abweichungen von den Voraussetzungen des Bahnmodells führen,
- den Einfluß systematischer Störungen auf die Flugbahnelemente einer bekannten Normalbahn quantitativ zu ermitteln,
- Verfahren zu entwickeln, die es ermöglichen, die systematischen Störeinflüsse durch Änderung der Anfangsbedingungen des Schießens zu kompensieren, sowie

<sup>1)</sup> Eine der besten Darstellungen der modernen Artillerieschießlehre ist [34]; an einführenden Werken können *Stutz* [35] und *Wolff* [36] empfohlen werden.

- experimentell ermittelte Flugbahnelemente auf Normalbedingungen (Schußtafelbedingungen) zu reduzieren.

Für die militärische Praxis ist das dritte Problem, die Kompensation von Störungen durch Änderung der Anfangsbedingungen, von besonderer Bedeutung. Man nennt die Störungstheorie deshalb in den Artilleriewissenschaften *Theorie der Verbesserungen*. Die Mittelwerte zufälliger Störungen werden in der Theorie der Verbesserungen als systematische Abweichungen behandelt.

Auf das vierte Problem – die Reduktion von experimentell ermittelten Daten auf Normalbedingungen – trifft man vor allem bei der Auswertung von Schußtafelschießen, die im Rahmen der Erprobung eines neuen Waffensystems vorgenommen werden (siehe Kapitel 7).

Der Weg, der zur Berechnung der Störeinflüsse auf eine Flugbahn (und gegebenenfalls zur Korrektur der Anfangsbedingungen des Schießens) einzuschlagen ist, hängt wesentlich von Art und mathematischer Struktur der betreffenden Störung ab. Es ist deshalb ratsam, zunächst einige Besonderheiten der außenballistischen Störungen zusammenzustellen, die als Klassifikationsmerkmale für die Störungsursachen geeignet sind.

### **6.1.2. Klassifizierung der systematischen Flugbahnstörungen**

Im folgenden werden fünf Gesichtspunkte erläutert, nach denen die außenballistischen Störungen unterschieden werden können.

#### *6.1.2.1. Einfluß der Störungen auf die Gültigkeit des Bahnmodells*

Es liegt nahe zu fragen, ob eine spezielle Störung von dem gewählten Bahnmodell erfaßt wird oder die Störung zu einer Änderung der Voraussetzungen des Bahnmodells führt.

Das klassische Bahnmodell enthält drei frei wählbare (beliebig vorgebbare) Bahnparameter: den Ballistischen Koeffizienten  $c$ , die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und den Abgangswinkel  $\vartheta_0$ . Die Gesamtheit der Normalbahnen bildet somit eine dreiparametrische Schar. Eine Änderung der Flugbahnparameter  $c, v_0, \vartheta_0$  (etwa die Störung  $c^* \rightarrow c^* + \Delta c$ ) beeinträchtigt die Gültigkeit des Bahnmodells nicht; die Parameteränderung bewirkt lediglich den Übergang von einer Normalbahn zu einer anderen.

Die Mehrzahl der ballistisch relevanten Störeinflüsse bringt eine Änderung der Voraussetzungen des Bahnmodells mit sich.<sup>1)</sup> In diesem Zusammenhang seien genannt:

- die Änderung der Bodenwerte und der Parameter (z.B. des Temperaturgradienten) der Normalatmosphäre,
- die Abweichung des Luftwiderstandes des Geschosses von dem Standard-Luftwiderstandsgesetz des Bahnmodells,
- die Berücksichtigung der Krümmung der Erdoberfläche,
- die Berücksichtigung der Trägheitskräfte, die durch die Rotation des erdfesten Koordinatensystems entstehen,
- das Auftreten atmosphärischer Strömungen (Wind),
- der Gehalt der Atmosphäre an festen und flüssigen Bestandteilen (Staub, Schnee, Regentropfen).

Der Ballistiker ist bestrebt, die Neuaufstellung von speziellen Bahnmodellen für die genannten Effekte nach Möglichkeit zu vermeiden, indem er versucht, die Abweichungen von den Voraussetzungen des Bahnmodells durch Übergänge innerhalb der Schar der Normalbahnen zu kompensieren (siehe Abschnitt 6.3.1.).

#### 6.1.2.2. *Konstante und variable Störungen*

*Konstante Störungen*, auch *Parameterstörungen* genannt, haben längs der gesamten Flugbahn konstanten Betrag und konstante Richtung; sie können deshalb durch Angabe ihrer Größe im Abgangspunkt vollständig charakterisiert werden. Als Beispiele seien aufgeführt:

- konstante Änderungen  $\Delta c$ ,  $\Delta v_0$ ,  $\Delta \vartheta_0$  der Flugbahnparameter  $c$ ,  $v_0$ ,  $\vartheta_0$ ;
- konstanter Längs- und Querwind (Windgeschwindigkeit  $W_x$  bzw.  $W_z$ );
- Abweichungen  $\Delta \tau_0$ ,  $\Delta p_0$  der Lufttemperatur und des Luftdrucks am Boden von den Bodenwerten  $\tau_{0N}$ ,  $p_{0N}$  der Normalatmosphäre.

Als *variable Störungen* bezeichnet man solche Störungen, deren Betrag oder (und) Richtung längs der Flugbahn variieren und die somit durch

<sup>1)</sup> Die obligatorische Normalatmosphäre und das vorgegebene Standard-Luftwiderstandsgesetz werden hier als Bestandteile des (klassischen) Bahnmodells angesehen.



eine (skalare oder vektorielle) Störfunktion beschrieben werden müssen. Zu dieser Gruppe von Störungen gehören:

- Wind zeit- bzw. ortsabhängiger Stärke und Richtung,
- höhenabhängige Abweichungen der Druck- und Temperaturverteilungen  $p = p(h)$ ,  $\tau = \tau(h)$  von den Standardverläufen,
- die *Coriolis*-Beschleunigung in einem rotierenden Bezugssystem,
- geschwindigkeitsabhängige Abweichungen des Luftwiderstands von dem Standard-Luftwiderstandsgesetz.

Eine Mittelstellung nehmen die stückweise konstanten Störungen ein, wie etwa ein konstanter Seitenwind, der zu einem Zeitpunkt  $t^* \in [t_0, t_e]$  durch Windstille abgelöst wird.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei nochmals daran erinnert, daß in diesem Abschnitt von der Klassifizierung der Störungsursachen die Rede ist, nicht von der Größe des Einflusses dieser Störungen auf spezielle Bahnelemente. Diese Unterscheidung ist zwingend notwendig, da auch eine konstante Störung (z. B. eine  $c$ -Änderung) die Bahnelemente der einzelnen Bahnpunkte unterschiedlich stark beeinflussen kann.

### 6.1.2.3. Störungen der Bewegungsdifferentialgleichungen und Störungen der Anfangsbedingungen

Für die mathematische Behandlung von Störungsproblemen ist es wichtig zu wissen, ob die Störung die rechten Seiten der ballistischen Bewegungsgleichungen abändert oder nur deren Anfangsbedingungen im Abgangspunkt.

Änderungen der Anfangsgeschwindigkeit und des Abgangswinkels sind reine Anfangsstörungen, während eine Änderung des Ballistischen Koeffizienten das Auftreten von Störfunktionen auf den rechten Seiten der ballistischen Bewegungsgleichungen bewirkt.

Dem widerspricht nicht, daß in einem ballistischen Tafelwerk des Typs [6] Änderungen der Bahnparameter  $c$ ,  $v_0$ ,  $\vartheta_0$  in gleicher Weise durch doppelte Interpolation ermittelt werden.

Bei Berücksichtigung gewisser Störeinflüsse können sich auch die Bedingungsgleichungen für die Flugbahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt ändern. Als Beispiel sei die Erdkrümmung genannt; siehe Abschnitt 6.2.2.

#### 6.1.2.4. *Lineare und nichtlineare Störungen*

Störungen heißen (in der Ballistik) *linear*, wenn ihr Einfluß auf die Bahnelemente durch ein lineares Differentialgleichungssystem beschrieben werden kann, andernfalls nennt man sie *nichtlinear*.

Da dem klassischen Bahnmodell ein nichtlineares Anfangswertproblem für die Flugbahn entspricht, haben die Störungen dieses Modells im Grunde genommen stets nichtlinearen Charakter. Ob und in welchem Bereich man eine nichtlineare Störung als linear behandeln darf, hängt von der Größe (dem Betrag) der Störung sowie den Genauigkeitsansprüchen ab, die an die Störungsrechnung gestellt werden.

Das mathematische Problem der Linearisierung des gestörten Anfangswertproblems für die Flugbahn ist für die außenballistische Störungstheorie von zentraler Bedeutung.

Störungen, deren Einfluß durch lineare Differentialgleichungen beschrieben wird, haben zwei Eigenschaften, die sowohl der mathematischen Behandlung von Störungsproblemen wie auch der praktischen Artillerie-Schießlehre sehr zugute kommen:

- Der Einfluß einer linearen Parameterstörung auf die Bahnelemente ist proportional zur Größe der Parameteränderung. In der Schußtafel brauchen lediglich die Proportionalitätsfaktoren zwischen Parameteränderung und Wirkung auf die Bahnelemente (die *Störungskoeffizienten*) angegeben zu werden.
- Die Einflüsse unterschiedlicher Störungsursachen können getrennt voneinander berechnet werden; sie überlagern sich additiv und ohne sich gegenseitig zu beeinflussen.

In der nichtlinearen Störungstheorie müssen alle Störungseinflüsse gleichzeitig berücksichtigt werden; die Einflüsse unterschiedlicher Störungsursachen überlagern sich in der Regel nicht mehr additiv. Dadurch ist in vielen Fällen die Neuintegration der ballistischen Bewegungsgleichungen, oft auch die Abänderung des Bahnmodells unumgänglich.

#### 6.1.2.5. *Einfluß der Störungen auf die Ebenheit der Flugbahn*

Die Normalbahnen, die das klassische Bahnmodell liefert, sind ebene Raumkurven. Man kann die Störungseinflüsse deshalb auch danach klassifizieren, ob sie die Flugbahn weiterhin eben lassen oder ob sie das Geschöß seitlich aus der Abgangsebene herauslenken.

Zu den Störungen, die eine seitliche Abweichung der Flugbahn aus der Abgangsebene bewirken, gehören

- der Seitenwind,
- die *Coriolis*-Beschleunigung in einem rotierenden (erdfesten) Bezugssystem,
- die Geschößrotation (der „Kreiseffekt“ eines rotierenden starren Körpers).

Welcher der genannten Aspekte bei außenballistischen Untersuchungen der Klassifizierung der Störungsursachen zugrunde gelegt wird, hängt von der jeweiligen Aufgabenstellung ab.

### 6.1.3. Methoden der außenballistischen Störungstheorie

Besteht die Störung in einer Änderung der Bahnparameter  $\{c, v_0, \vartheta_0\} \rightarrow \{c + \Delta c, v_0 + \Delta v_0, \vartheta_0 + \Delta \vartheta_0\}$ , so läßt sich die hierdurch bedingte Abweichung der Bahnelemente sofort angeben: Man hat lediglich in einem ballistischen Tafelwerk des Typs [6] für die geänderten (neuen) Flugbahnparameter die entsprechenden Bahnelemente abzulesen.

Da die Ermittlung des Einflusses von  $c$ -,  $v_0$ - und  $\vartheta_0$ -Störungen sehr einfach ist, versucht man, alle anderen Störungen auf diese *Grundstörungen* zurückzuführen. Das gelingt

- bei Abweichungen des Luftdrucks und der Lufttemperatur am Boden sowie bei Änderungen der Mündungshöhe mit Hilfe der in Abschnitt 6.3.5. angegebenen Transformation;
- beim homogenen ebenen Wind durch Übergang zu einem mit Windgeschwindigkeit bewegten Bezugssystem (Transformation von *Didion*) sowie
- im Rahmen der *linearen* Störungstheorie durch Herleitung von linearen Beziehungen zwischen den Störungskoeffizienten oder die Berechnung der Fundamentalmatrix der entsprechenden linearen Störungsdifferentialgleichungen.

Darüber hinaus existieren Mittelungsverfahren, die es ermöglichen, variable (zeit- bzw. höhenabhängige) Störungen durch solche konstanten Störungen zu ersetzen, die auf die Flugbahn den gleichen Einfluß wie die variablen Störfunktionen ausüben.

Diese mittleren Störungen, die in der Artilleriepraxis gern als *ballistische*

*Mittelwerte* bezeichnet werden, können in der Regel durch Kombinationen von Grundstörungen dargestellt werden.

Ist keiner dieser Wege gangbar, so muß das Flugbahnanfangswertproblem für das abgeänderte Bahnmodell aufgestellt und integriert werden.

Die Problematik, mit der sich die außenballistische Störungstheorie beschäftigt, ist vielschichtig und erfordert eine detaillierte mathematische Behandlung. Dies resultiert nicht nur daraus, daß es sich um eine Störungstheorie für ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen handelt, sondern auch aus der Notwendigkeit, bei dem Vergleich von gestörter und ungestörter Flugbahn unterschiedliche Zuordnungsvorschriften (*Vergleichsvariable*) in Betracht ziehen zu müssen.

## 6.2. Störungen beim klassischen Bahnmodell

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten systematischen Abweichungen von den physikalischen Voraussetzungen des klassischen Bahnmodells zusammengestellt werden, deren Auswirkungen auf den Flugbahnverlauf der außenballistischen Störungstheorie zu untersuchen sind.

### 6.2.1. Die Änderungen der Flugbahnparameter

Die Flugbahnelemente, die sich durch Integration der Bewegungsdifferentialgleichungen des klassischen Bahnmodells ergeben, sind Funktionen der drei Flugbahnparameter  $c$ ,  $v_0$ ,  $\vartheta_0$ . Erfahren diese Parameter Änderungen  $c \rightarrow c + \Delta c$ ,  $v_0 \rightarrow v_0 + \Delta v_0$ ,  $\vartheta_0 \rightarrow \vartheta_0 + \Delta \vartheta_0$ , so gehen die Flugbahndifferentialgleichungen in das entsprechende gestörte Flugbahnanfangswertproblem über.

Im Falle des  $t$ -Systems der Bewegungsgleichungen (4.9) lautet das *gestörte Anfangswertproblem*:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, & x(t_0) &= 0, \\ \dot{y} &= w, & y(t_0) &= 0, \\ \dot{u} &= - \left( 1 + \frac{\Delta c}{c} \right) E u, & u(t_0) &= (v_0 + \Delta v_0) \cos(\vartheta_0 + \Delta \vartheta_0), \\ \dot{w} &= - \left( 1 + \frac{\Delta c}{c} \right) E w - g, & w(t_0) &= (v_0 + \Delta v_0) \sin(\vartheta_0 + \Delta \vartheta_0); \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$E = c H_r(y) G(v_r).$$

Die  $v_0$ - und  $\vartheta_0$ -Störungen ändern die Anfangsbedingungen, während die Änderung des Ballistischen Koeffizienten zum Auftreten von Zusatzbeschleunigungen auf den „rechten Seiten“ der Bewegungsgleichungen führt.

Das gestörte  $t$ -System läßt sich allgemein in der Form schreiben

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u + e_x, & x(t_0) &= \Delta x_0, \\ \dot{y} &= w + e_y, & y(t_0) &= \Delta y_0, \\ \dot{u} &= -E u + e_u, & u(t_0) &= u_0 + \Delta u_0, \\ \dot{w} &= -E w - g + e_w, & w(t_0) &= w_0 + \Delta w_0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Im Falle der  $c$ -,  $v_0$ -,  $\vartheta_0$ -Störungen gilt speziell

$$\begin{aligned} e_x = e_y = 0; & \quad \Delta x_0 = \Delta y_0 = 0; \\ e_u = -\frac{\Delta c}{c} E u; & \quad e_w = -\frac{\Delta c}{c} E w; \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= (v_0 + \Delta v_0) \cos(\vartheta_0 + \Delta\vartheta_0) - v_0 \cos \vartheta_0; \\ \Delta w_0 &= (v_0 + \Delta v_0) \sin(\vartheta_0 + \Delta\vartheta_0) - v_0 \sin \vartheta_0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Sind  $\Delta v_0$  und  $\Delta\vartheta_0$  klein, so können die Ausdrücke für  $\Delta u_0$  und  $\Delta w_0$  bezüglich der  $v_0$ - und  $\vartheta_0$ -Störung linearisiert werden.

Im Unterschied zu den Änderungen beliebiger (endlicher) Größe, die mit dem Differenzsymbol  $\Delta$  gekennzeichnet werden, sollen die infinitesimalen Änderungen mit dem Symbol  $\delta$  bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &\approx \delta u_0 = \delta v_0 \cdot \cos \vartheta_0 - \delta \vartheta_0 \cdot v_0 \sin \vartheta_0 \\ &= u_0 \frac{\delta v_0}{v_0} - w_0 \delta \vartheta_0; \\ \Delta w_0 &\approx \delta w_0 = \delta v_0 \cdot \sin \vartheta_0 + \delta \vartheta_0 \cdot v_0 \cos \vartheta_0 \\ &= w_0 \frac{\delta v_0}{v_0} + u_0 \delta \vartheta_0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Diese Darstellung für die Anfangsstörungen ist bereits in Abschnitt 2.8.2. benutzt worden.

Alle Störeinflüsse, die die Flugbahn eben lassen, werden durch das gestörte  $r$ -System (6.2) beschrieben. Das trifft sowohl auf die  $\Delta E$ -Störungen zu, die durch Abweichungen des Luftdrucks und der Lufttemperatur zustande kommen, wie auch auf die  $\Delta E$ -Änderungen, die durch den Übergang zu einem neuen Standard-Luftwiderstandsgesetz hervorgerufen werden. Die hierbei für die Anfangsstörungen  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta u_0, \Delta w_0$  und die Störfunktionen  $e_x, e_y, e_u, e_w$  zu verwendenden Ansätze folgen aus speziellen physikalischen Überlegungen (siehe die folgenden Abschnitte).

Treten Störeinflüsse auf, die (als Anfangsstörung oder Störbeschleunigung) aus der Abgangsebene der ungestörten Normalbahn herausweisen, so sind zu dem gestörten Anfangswertproblem (6.2) die beiden Gleichungen für die  $z$ -Richtung hinzuzufügen:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= q + e_z, & z(t_0) &= \Delta z_0, \\ \dot{q} &= -E q + e_q, & q(t_0) &= \Delta q_0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Die Verzögerungsfunktion  $E$  lautet für die erweiterten Bewegungsgleichungen

$$E = E(c, y, v), \quad v = \sqrt{u^2 + w^2 + q^2}. \tag{6.7}$$

Im Rahmen der *linearen* Störungstheorie können die Störungen in  $z$ -Richtung als unabhängig von den Störungen in der Abgangsebene angesehen werden.

Die Integration des gestörten Flugbahnanfangswertproblems (6.2), (6.6) wird in Abschnitt 6.8. erörtert.

### 6.2.2. Die Flugbahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt unter Berücksichtigung der Erdkrümmung

Bei der Behandlung des klassischen Bahnmodells war die gekrümmte Erdoberfläche durch die Tangentialebene an die Erde im Abgangspunkt ersetzt worden. Die Bedingungsgleichungen für den Flugbahngipfel und die Horizontalschußweite ergaben sich damit zu  $\dot{y}_g = 0$  bzw.  $y_e = y_0 = 0$ .

Sind die Schußweiten so groß, daß die Erdkrümmung merklichen Ein-

fluß ausübt, so ist das klassische Bahnmodell in dreifacher Hinsicht abzuändern:

- In der Verzögerungsfunktion  $E(c, y, v)$  ist  $y$  durch die vertikale Höhe des Flugbahnpunkts über der Erdoberfläche  $h$  zu ersetzen (siehe Bild 4.3, Seite 178).
- Es muß explizit berücksichtigt werden, daß die Schwerkraft eine Zentralkraft ist, längs der Flugbahn also nicht nur ihren Betrag, sondern auch ihre Richtung ändert.
- Die Bedingungsgleichung für den Auftreffpunkt in der Mündungsebene ist durch  $h_E = 0$  zu ersetzen, die Bedingungsgleichung für den Gipfelpunkt durch  $h_G = 0$ .<sup>1)</sup>

Wie Störungen  $\Delta E$  der Verzögerungsfunktion  $E$  erfaßt werden, ist in Abschnitt 6.2.1. geschildert worden.

Die Richtungsänderung der Schwerkraft kann in der in Abschnitt 4.1.4. angegebenen Weise berücksichtigt werden. Ein anderer Weg zur Ermittlung der Störfunktionen für die Richtungsänderung der Schwerkraft längs der Flugbahn, bei dem das übliche rechtwinklige Koordinatensystem  $\{x, y, z\}$  beibehalten wird, soll im Zusammenhang mit der Behandlung der Erde als rotierendes Bezugssystem dargestellt werden (siehe Abschnitt 6.2.3.).

Die Bedingungsgleichungen für den Auftreff- und den Gipfelpunkt  $h_E = 0$  bzw.  $h_G = 0$  lassen sich leicht durch Beziehungen zwischen den Flugbahnkoordinaten  $(x_E, y_E)$  bzw.  $(x_G, y_G)$  und dem Erdradius  $R_E$  ersetzen.

Wie man in Bild 4.3, Seite 178, abliest, besteht die Beziehung

$$x^2 + (y + R_E)^2 = (h + R_E)^2. \quad (6.8)$$

Hieraus folgt als *Bedingungsgleichung für den Auftreffpunkt auf der Erdoberfläche*

$$\begin{aligned} x_E^2 + (y_E + R_E)^2 &= R_E^2, \\ x_E^2 + y_E (y_E + 2R_E) &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Die *Bedingungsgleichung für den Gipfelpunkt bei Berücksichtigung der Erdkrümmung* erhält man durch Differentiation von (6.8) nach  $t$  und

<sup>1)</sup> Die Flugbahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt werden beim klassischen Bahnmodell wie bisher mit den Indizes „g“ und „e“ gekennzeichnet; bei Berücksichtigung der Erdkrümmung jedoch mit „G“ bzw. „E“.

anschließender Substitution  $\dot{h}_G = 0$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_G x_G + \dot{y}_G (y_G + R_E) &= 0, \\ u_G x_G + w_G (y_G + R_E) &= 0.\end{aligned}\tag{6.10}$$

Bei den Gipfelhöhen und Horizontalschußweiten, die mit konventionellen Geschossen erreichbar sind, unterscheiden sich die Flugbahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt, die sich aus den Bedingungsgleichungen  $\dot{y}_g = 0$  und  $\dot{h}_G = 0$  bzw.  $y_e = 0$  und  $h_E = 0$  ergeben, jeweils nur geringfügig voneinander. Die *Taylor*-Entwicklungen der Flugbahnelemente um den Gipfel- und Auftreffpunkt des klassischen Bahnmodells dürfen deshalb in 1. Näherung nach dem in  $\delta t_e$  linearen Glied abgebrochen werden:

$$x_E = x_e + u_e \delta t_e, \quad y_E = w_e \delta t_e;\tag{6.11}$$

$$x_G = x_g + u_g \delta t_g, \quad y_G = y_g;\tag{6.12}$$

$$u_G = u_g + \dot{u}_g \delta t_g, \quad w_G = -g_g \delta t_g.$$

Einsetzen von (6.11) in die Bedingungsgleichung (6.9) liefert eine Beziehung für die Flugzeitänderung  $\delta t_e$ :

$$\begin{aligned}x_e^2 + 2 u_e x_e \delta t_e + w_e \delta t_e \cdot 2R_E &= 0, \\ \delta t_e &= - \frac{x_e^2}{2 R_E w_e + u_e x_e} = \frac{x_e^2}{2 R_E |w_e| - u_e x_e}.\end{aligned}\tag{6.13}$$

Für die *Koordinaten*  $x_E, y_E$  *des Auftreffpunkts* *E* *auf der Erdoberfläche* erhält man damit

$$\begin{aligned}x_E &= x_e + \frac{u_e x_e^2}{2 R_E |w_e| - u_e x_e}; \\ y_E &= - \frac{|w_e| x_e^2}{2 R_E |w_e| - u_e x_e}.\end{aligned}\tag{6.14}$$

Hieraus folgt als *relative Schußweitenänderung infolge der Erdkrümmung*

$$\frac{\delta x_E}{x_e} = \frac{x_E - x_e}{x_e} = \frac{1}{2 (R_E/x_e) \tan |\vartheta_E| - 1}\tag{6.15}$$



und für das Verhältnis  $y_E/x_e$ :

$$\frac{y_E}{x_e} = - \frac{\tan |\vartheta_e|}{2 (R_E/x_e) \tan |\vartheta_e| - 1}. \quad (6.16)$$

Im allgemeinen wird  $2 (R_E/x_e) \tan |\vartheta_e| \gg 1$  sein. Man kann in diesem Fall (6.15) und (6.16) vereinfachen zu

$$\frac{\delta x_E}{x_e} = \frac{x_e}{2 R_E} \cot |\vartheta_e|; \quad \frac{y_E}{x_e} = - \frac{x_e}{2 R_E}; \quad (6.17)$$

$$\frac{\delta t_e}{t_e} = \frac{x_e}{2 R_E} \cdot \frac{x_e}{u_e t_e} \cot |\vartheta_e|.$$

*Die Differenz der Schußweiten ( $x_E - x_e$ ) und die Fallstrecke  $y_E$  unter den Mündungshorizont wachsen proportional zum Quadrat der Schußweite  $x_e$ .*

Im Vakuum ist  $x_e = u_e t_e$ , und man erhält für  $\vartheta_0 = 45^\circ$ ;  $x_e = 50$  km:

$$\frac{\delta x_e}{x_e} = \frac{\delta t_e}{t_e} = - \frac{y_E}{x_e} = \frac{x_e}{2 R_E} = \frac{50}{2 \cdot 6370} \cong 3,92 \text{ ‰}.$$

Entsprechend liefert das Einsetzen von (6.12) in die Bedingungsgleichung (6.10) für die Änderung  $\delta t_g$  der Flugzeit bis zum Gipfel die Beziehung

$$\begin{aligned} (u_g + \dot{u}_g \delta t_g) (x_g + u_g \delta t_g) - g_g \delta t_g (y_g + R_E) &= 0; \\ u_g x_g - \delta t_g [g_g (R_E + y_g) + u_g (E_g x_g - u_g)] &= 0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Mit dem hieraus folgenden Wert für  $\delta t_g$  können die Änderungen der Bahnelemente im Gipfelpunkt berechnet werden. Die Gipfelhöhe  $y_g$  bleibt in 1. Näherung ungeändert.

Im Falle des parabolischen Bahnmodells vereinfacht sich (6.18) zu

$$\begin{aligned} \delta t_g &= \frac{u_0 x_g}{g_0 R_E + g_0 y_g - u_0^2} = \frac{u_0 x_e}{2 g_0 R_E + w_0^2 - 2 u_0^2} \\ &\approx \frac{u_0 x_e}{2 g_0 R_E}, \end{aligned}$$

und man erhält

$$\frac{\delta x_g}{x_g} = \frac{x_g}{2 R_E} \cot \vartheta_0 = \frac{x_e}{4 R_E} \cot \vartheta_0. \quad (6.19)$$

### \*6.2.3. Die Erde als gleichförmig rotierendes Bezugssystem<sup>1)</sup>

Bei der Formulierung des klassischen Bahnmodells war ein erdfestes Koordinatensystem benutzt worden, das in 1. Näherung als Inertialsystem behandelt worden ist. Die Geschößbewegung erfolgte unter dem Einfluß der Schwerkraft  $\mathbf{G}$  und des Luftwiderstands  $\mathbf{W}$ .

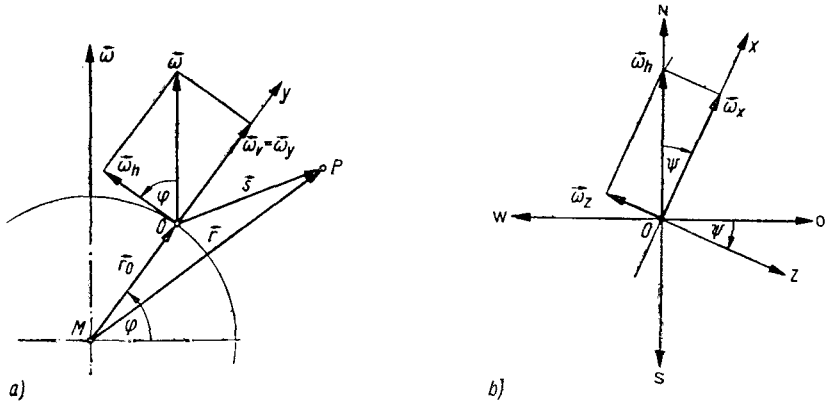


Bild 6.1 Zerlegung der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Erdrotation bezüglich des rotierenden Koordinatensystems  $\{x, y, z\}$

Berücksichtigt man die Rotation der Erde um ihre Achse, so stellt ein fest mit der Erde verbundenes Koordinatensystem kein Inertialsystem mehr dar. In dem (gleichförmig) rotierenden Bezugssystem greifen an dem Geschöß – zusätzlich zur Gravitationskraft und den aerodynamischen Kräften – zwei Trägheitskräfte an: die Zentrifugalkraft  $\mathbf{F}$  und die *Coriolis*-Kraft  $\mathbf{K}$ . Es sei (siehe Bild 6.1):

- $\mathbf{r}$  – der Vektor vom Erdmittelpunkt zu dem Geschöß, das sich in dem Punkt  $P$  befinden möge;
- $\mathbf{r}_0$  – der Vektor vom Erdmittelpunkt zu dem Ursprung  $O$  des erdfesten Koordinatensystems;
- $\mathbf{s}$  – der Ortsvektor des Geschößes in dem erdfesten (rotierenden) Bezugssystem und
- $\omega$  – der Vektor der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation.

<sup>1)</sup> Die Darstellung lehnt sich an [37] Ch. II. Sec. 1 an.

Für die Zentrifugalkraft  $F$  und die *Coriolis*-Kraft  $K$  gilt dann<sup>1)</sup>:

$$F = -m\omega \times (\omega \times r); \quad K = -2m\omega \times \dot{r}.$$

Da sich die Erde an einem (siderischen) Tag einmal um ihre eigene Achse dreht, hat der Betrag  $\omega$  der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation die Größe

$$\omega = |\omega| = \frac{2\pi}{86164} \text{ s}^{-1} = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

Da das Gravitationspotential der Erde nicht streng kugelsymmetrisch ist, muß in den Ansatz für die *Gravitationsbeschleunigung*  $a$ , der das Geschöß unterliegt, ein Korrekturvektor  $\varepsilon$  eingefügt werden<sup>2)</sup>:

$$a = -k \frac{r}{r^3} + \varepsilon \quad (k = \text{const}). \quad (6.20)$$

Man kann zeigen, daß für alle Punkte auf oder in der Nähe der Erdoberfläche der Betrag von  $\varepsilon$  ein Hundertstel des Betrags von  $a$  nicht übersteigt.

Die Bewegungsgleichung des Geschößes in dem erdfesten (rotierenden) Bezugssystem lautet damit

$$m\ddot{s} = W + G + F + K, \\ \ddot{s} = b' - k \frac{r}{r^3} + \varepsilon - \omega \times (\omega \times r) - 2\omega \times \dot{r}. \quad (6.21)$$

Die Zeitableitungen der Ortsvektoren beziehen sich auf das rotierende Bezugssystem.

Mit  $r = r_0 + s$  geht (6.21) über in

$$\ddot{s} = b' - k \frac{r_0 + s}{|r_0 + s|^3} + \varepsilon - \omega \times [\omega \times (r_0 + s)] - 2\omega \times \dot{s}. \quad (6.22)$$

Hierbei ist berücksichtigt, daß in dem rotierenden Koordinatensystem  $r_0 = \text{const}$  gilt.

<sup>1)</sup> Siehe etwa *Macke, W.: Mechanik der Teilchen, Systeme und Continua*. Leipzig 1962, oder *Hund, F.: Einführung in die theoretische Physik*. Erster Band: *Mechanik*. 2., ergänzte Auflage, Leipzig 1948.

<sup>2)</sup> Im folgenden wird streng zwischen der *Gravitationsbeschleunigung* und der *Fallbeschleunigung* (in dem rotierenden Bezugssystem) unterschieden.

Bei den üblichen Schußweiten ist  $|s| \ll |r_0|$ , so daß man den Nenner  $|r_0 + s|^3$  wie folgt entwickeln kann:

$$\begin{aligned} |r_0 + s|^{-3} &= [(r_0 + s)^2]^{-3/2} = (r_0^2 + 2 r_0 \cdot s + s^2)^{-3/2} \\ &\approx (r_0^2 + 2 r_0 \cdot s)^{-3/2}; \\ \frac{1}{|r_0 + s|^3} &\approx \frac{1}{r_0^3} \left( 1 + \frac{2 r_0 \cdot s}{r_0^2} \right)^{-3/2} \approx \frac{1}{r_0^3} - 3 \frac{r_0 \cdot s}{r_0^5}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Das dreifache Vektorprodukt in (6.22) kann zerlegt werden:

$$\begin{aligned} -\omega \times [\omega \times (r_0 + s)] &= -\omega \times (\omega \times r_0) - \omega \times (\omega \times s) \\ &= [\omega^2 r_0 - (\omega \cdot r_0) \omega] + [\omega^2 s - (\omega \cdot s) \omega]. \end{aligned}$$

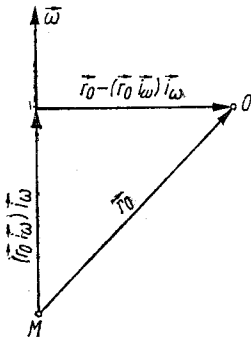
Die beiden Vektoren auf der rechten Seite dieser Gleichung geben die Komponenten von  $r_0$  bzw.  $s$  senkrecht zu  $\omega$  an, beide jeweils multipliziert mit  $\omega^2$ .

Diese Behauptung läßt sich leicht beweisen. Bezeichnet man den Einheitsvektor in  $\omega$ -Richtung mit  $i_\omega$ , so gilt

$$\omega^2 r_0 - (\omega \cdot r_0) \omega = \omega^2 [r_0 - (r_0 \cdot i_\omega) i_\omega].$$

Aus Bild 6.2 ist aber sofort ersichtlich, daß der Ausdruck in eckigen Klammern die Komponente von  $r_0$  senkrecht zu  $\omega$  darstellt.

Für  $\omega \times (\omega \times s)$  wird der Nachweis entsprechend geführt.



*Bild 6.2  
Zerlegung der Zentrifugalbeschleunigung infolge der Erdrotation in Komponenten*

Bei Entfernungen  $s < 150$  km ist  $|\omega \times (\omega \times s)| < 10^{-3} \text{ m/s}^2$ , so daß man diesen Term gegenüber der Gravitationsbeschleunigung  $a$  vernachlässigen kann.

Mit den vorgenommenen Entwicklungen und Näherungsannahmen vereinfacht sich die vektorielle Bewegungsgleichung des Geschosses (6.22) zu

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{s}} = & \mathbf{b}' - k \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} + \boldsymbol{\varepsilon} + \omega^2 \mathbf{r}_0 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_0) \boldsymbol{\omega} \\ & - k \frac{\mathbf{s}}{r_0^3} + 3k(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}) \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^5} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{s}}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Der kleine Korrekturvektor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  für die Abweichung des Gravitationsfeldes der Erde von der Kugelsymmetrie muß im Grunde genommen für den Punkt  $P$  berechnet werden, in dem sich das Geschöß gerade befindet. Da jedoch sein Betrag etwa 1% des Betrags des Hauptterms der Schwerebeschleunigung nicht überschreitet und die Änderung von  $|\boldsymbol{\varepsilon}|$  im Bereich der Schußweite höchstens 1% beträgt, kann der Betrag von  $\boldsymbol{\varepsilon}$  für eine spezielle Flugbahn als konstant angesehen werden.

Wenn sich ein Körper im Ursprung des erdfesten Koordinatensystems in Ruhe befindet, so ist  $\mathbf{b}' = 0$ ,  $\mathbf{s} = 0$ ,  $\dot{\mathbf{s}} = 0$ , und auf ihn wirkt die Beschleunigung  $\mathbf{g}_0$ ,

$$\mathbf{g}_0 = -k \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} + \boldsymbol{\varepsilon} + \omega^2 \mathbf{r}_0 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_0) \boldsymbol{\omega}. \quad (6.25)$$

Diese Beschleunigung ist die Fallbeschleunigung, die man bei Experimenten in dem Ursprung des rotierenden Bezugssystems wahrnimmt.

Die Linie durch den Punkt  $O$  und parallel zu  $\mathbf{g}_0$  nennt man *Vertikale*; *nach unten* ist gleichbedeutend mit der *Richtung von  $\mathbf{g}_0$* , *nach oben* bezeichnet die entgegengesetzte Richtung. Die Ebene durch den Punkt  $O$  und senkrecht zu  $\mathbf{g}_0$  heißt *Mündungsebene*. Alle Geraden, die in dieser Ebene liegen, verlaufen somit *horizontal*.

Die  $y$ -Achse des erdfesten Koordinatensystems mit dem Ursprung  $O$  weise vertikal nach oben, während die  $x$ - und  $z$ -Achse in der durch  $O$  verlaufenden Horizontalebene liegen und zusammen mit der  $y$ -Achse ein rechtshändiges Koordinatensystem bilden.

Der erste Term in (6.25) ist betragsmäßig etwa einhundertmal größer als die anderen. Für die Berechnung des sechsten und siebenten Summanden in (6.24), die als Korrekturglieder anzusehen sind, darf deshalb in guter Näherung gesetzt werden

$$\mathbf{g}_0 \approx -k \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3}, \quad g_0 = \frac{k}{r_0^2}. \quad (6.26)$$

Beachtet man, daß  $\mathbf{s}$  die Komponenten  $\mathbf{s} = (x, y, z)$  hat, so kann man schreiben

$$-k \frac{\mathbf{s}}{r_0^3} \approx -\frac{g_0}{r_0} \mathbf{s} = -\frac{g_0}{r_0} (x, y, z). \quad (6.27)$$

Nach (6.26) hat  $\mathbf{r}_0$  annähernd die entgegengesetzte Richtung von  $\mathbf{g}_0$ , weist also in Richtung der positiven  $y$ -Achse:

$$\frac{\mathbf{r}_0}{r_0} \approx (0, 1, 0). \quad (6.28)$$

Mit (6.26) und (6.28) läßt sich das vorletzte Glied in (6.24) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} 3k (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}) \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} &= \frac{3k}{r_0^3} \left( \frac{\mathbf{r}_0}{r_0} \cdot \mathbf{s} \right) \frac{\mathbf{r}_0}{r_0} \\ &\approx 3 (g_0/r_0) [(0, 1, 0) \cdot (x, y, z)] (0, 1, 0) \\ &= 3 (g_0/r_0) (0, y, 0) = (0, 3g_0 y/r_0, 0). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Um den letzten Term in (6.24), die *Coriolis*-Beschleunigung, in Komponenten parallel zu den Achsen des erdfesten Koordinatensystems zu zerlegen, müssen zunächst die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Komponente der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  bestimmt werden. Man führt hierzu zwei Winkel ein: die *astronomische Breite*  $\varphi$  und den *Azimut*  $\psi$ .

Die *astronomische Breite*  $\varphi$  des Ursprungs  $O$  des erdfesten Koordinatensystems ist definiert als der Winkel zwischen der Erdachse (dem Vektor  $\boldsymbol{\omega}$ ) und der Horizontalebene durch den Punkt  $O$ . Dieser Winkel ist bei einer kugelförmigen Erde gleich dem Winkel, den der Vektor  $\mathbf{r}_0$  mit der Äquatorebene bildet (siehe Bild 6.1, Seite 342).

Der *Azimut*  $\psi$  eines (nichtvertikalen) *Vektors*, der vom Ursprung  $O$  ausgeht, ist definiert als der Winkel von der Nordrichtung zur Horizontalprojektion des Vektors, positiv gezählt im Uhrzeigersinn<sup>1)</sup> (siehe Bild 6.1b).

Zerlegt man  $\boldsymbol{\omega}$  zunächst in eine horizontale Komponente  $\omega_h$  und eine vertikale Komponente  $\omega_v$ , so erhält man (Bild 6.1a):

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_h, \omega_v) = (\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi).$$

<sup>1)</sup> Der Azimut wird häufig auch von der Südrichtung aus gezählt; verbindliche Festlegungen existieren nicht.

Die Horizontalkomponente kann nun noch in eine Komponente in  $x$ -Richtung  $\omega_x$  und eine Komponente in  $z$ -Richtung  $\omega_z$  zerlegt werden:

$$\omega_x = \omega_h \cos \psi = \omega \cos \varphi \cos \psi;$$

$$\omega_z = -\omega_h \sin \psi = -\omega \cos \varphi \sin \psi.$$

Unter Beachtung von  $\omega_p \equiv \omega$ , erhält man für  $\omega$  damit die Zerlegung

$$\begin{aligned} \omega &= (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \\ &= (\omega \cos \varphi \cos \psi, \omega \sin \varphi, -\omega \cos \varphi \sin \psi). \end{aligned}$$

Für die Komponenten von  $\omega \times \dot{s}$  ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \omega \times \dot{s} &= (\omega_y \dot{z} - \omega_z \dot{y}, \omega_z \dot{x} - \omega_x \dot{z}, \omega_x \dot{y} - \omega_y \dot{x}), \\ (\omega \times \dot{s})_x &= \omega (\dot{z} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi \sin \psi), \\ (\omega \times \dot{s})_y &= -\omega (\dot{x} \cos \varphi \sin \psi + \dot{z} \cos \varphi \cos \psi), \\ (\omega \times \dot{s})_z &= \omega (\dot{y} \cos \varphi \cos \psi - \dot{x} \sin \varphi). \end{aligned} \tag{6.30}$$

Die Verzögerung  $b'$  durch den Luftwiderstand hat die Komponenten

$$b' = (b'_x, b'_y, b'_z) = (-E \dot{x}, -E \dot{y}, -E \dot{z}). \tag{6.31}$$

Einsetzen von (6.25) bis (6.31) in (6.24) liefert als *Bewegungsgleichung des Geschosses* die drei Differentialgleichungen 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -E \dot{x} - g_0 (x/r_0) - 2\omega \dot{z} \sin \varphi - 2\omega \dot{y} \cos \varphi \sin \psi; \\ \ddot{y} &= -E \dot{y} - g_0 + 2g_0 (y/r_0) + 2\omega \dot{x} \cos \varphi \sin \psi \\ &\quad + 2\omega \dot{z} \cos \varphi \cos \psi; \\ \ddot{z} &= -E \dot{z} - g_0 (z/r_0) - 2\omega \dot{y} \cos \varphi \cos \psi + 2\omega \dot{x} \sin \varphi. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Hierin bedeutet  $r_0$  den Abstand des Ursprungs  $O$  vom Erdmittelpunkt  $M$ ; in ausreichender Näherung ist  $r_0$  gleich dem mittleren Erdradius:  $r_0 \approx R_E$ .

Wie man leicht nachprüft, kann die *Coriolis*-Beschleunigung  $-2\omega \times \dot{s}$  wie folgt in die Summe von drei Vektoren zerlegt werden:

$$\begin{aligned} -2\omega \times \dot{s} &= -2\omega \dot{y} \cos \varphi (\sin \psi, 0, \cos \psi) \\ &\quad + 2\omega \sin \varphi (-\dot{z}, 0, \dot{x}) \\ &\quad + 2\omega \cos \varphi (0, \dot{x} \sin \psi + \dot{z} \cos \psi, 0). \end{aligned} \tag{6.33}$$

Ein Einheitsvektor, der vom Punkt  $O$  ausgeht und nach Osten weist, hat die Komponenten  $(\sin \varphi, 0, \cos \varphi)$  (siehe Bild 6.1 b, Seite 342). Der erste Beschleunigungsterm zeigt auf dem aufsteigenden Flugbahnast ( $\dot{y} > 0$ ) somit nach Westen, auf dem fallenden Flugbahnast ( $\dot{y} < 0$ ) nach Osten. Sein Betrag ist proportional zu  $\dot{y}$  und dem Kosinus der astronomischen Breite  $\varphi$ .

Der zweite Beschleunigungsterm liegt ebenfalls in der Horizontalebene und weist, in Schußrichtung gesehen, nach rechts. Sein Betrag ist proportional zu  $\sin \varphi$  und dem Betrag der Horizontalkomponente der Bahngeschwindigkeit.

Der dritte Beschleunigungsterm zeigt in  $y$ -Richtung, sein Betrag ist proportional zur Ostkomponente der Bahngeschwindigkeit.

Beim klassischen Bahnmodell war für die Höhenveränderlichkeit der Fallbeschleunigung das Gesetz (4.2) angenommen worden. Vernachlässigt man die Glieder von zweiter und höherer Ordnung in  $y/R_E$  und setzt  $R_E \approx r_0$ , so folgt hieraus

$$g(y) \approx g_0 \left( 1 - \frac{2y}{r_0} \right) = g_0 - \frac{2 g_0 y}{r_0}. \quad (6.34)$$

Ein Vergleich des gestörten  $t$ -Systems (6.2) mit (6.32) liefert unter Beachtung von (6.34) für die Störglieder:

a) *Richtungsänderung der Fallbeschleunigung*

$$\begin{aligned} \Delta x_0 = \Delta y_0 = \Delta z_0 = 0; \quad e_x = e_y = e_z = 0; \\ e_u = -g_0 x/r_0; \quad e_w = 0; \quad e_a = -g_0 z/r_0. \end{aligned} \quad (6.35)$$

b) *Coriolis-Beschleunigung infolge der gleichförmigen Rotation des erdfesten Bezugssystems*

$$\begin{aligned} \Delta x_0 = \Delta y_0 = \Delta z_0 = 0; \quad e_x = e_y = e_z = 0; \\ e_u = -2 \omega (\dot{z} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi \sin \psi), \\ e_w = 2 \omega \cos \varphi (\dot{x} \sin \psi + \dot{z} \cos \psi), \\ e_a = -2 \omega (\dot{y} \cos \varphi \cos \psi - \dot{x} \sin \varphi). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Wählt man den Azimut  $\psi$  des Koordinatensystems so, daß der Vektor der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  in der  $x, y$ -Ebene liegt, so ist  $z(t_0) = 0$ ,  $\dot{z}(t_0) = \dot{q}_0 = 0$ . Die Flugbahn verläuft dann nahezu in einer Vertikalenebene, und  $z$  wie  $\dot{z}$  werden längs der Flugbahn keine großen Werte annehmen. Man kann deshalb in guter Näherung die *Störglieder*, die  $z$  und  $\dot{z}$  enthalten, gegenüber den anderen Gliedern vernachlässigen.



Die Störbeschleunigungen (6.36) vereinfachen sich damit zu

$$\begin{aligned} e'_u &= -2 \omega \dot{y} \cos \varphi \sin \psi; \\ e'_w &= 2 \omega \dot{x} \cos \varphi \sin \psi; \\ e'_q &= e_q. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Der Einfluß der Coriolis-Beschleunigung auf die Flugbahnelemente läßt sich gut erkennen, wenn man die Störungen für das parabolische Bahnmodell berechnet.

Die Bewegungsgleichungen des Geschosses im luftleeren Raum lauten unter Berücksichtigung der Coriolis-Beschleunigungen (6.37):

$$\ddot{x} = e'_u; \quad \ddot{y} = -g_0 + e'_w; \quad \ddot{z} = e'_q$$

bzw. ausführlich:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2 \omega \cos \varphi \sin \psi \cdot \dot{y}, & x(t_0) &= 0, & \dot{x}(t_0) &= u_0; \\ \ddot{y} &= -g_0 + 2 \omega \cos \varphi \sin \psi \cdot \dot{x}, & y(t_0) &= 0, & \dot{y}(t_0) &= w_0; \\ \ddot{z} &= -2 \omega (\cos \varphi \cos \psi \cdot \dot{y} - \sin \varphi \cdot \dot{x}), & z(t_0) &= 0, & \dot{z}(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Die ersten Integrationen sind sofort ausführbar:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_0 - 2 \omega \cos \varphi \sin \psi \cdot y, \\ \dot{y} &= w_0 - g_0 t + 2 \omega \cos \varphi \sin \psi \cdot x, \\ \dot{z} &= -2 \omega \cos \varphi \cos \psi \cdot y + 2 \omega \sin \varphi \cdot x. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Da (6.39) ein lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten darstellt, ist die Lösung von (6.39) geschlossen angebar; man begnügt sich jedoch im allgemeinen mit einer Näherungslösung.

Zur genäherten Integration von (6.39) setzt man auf der rechten Seite für  $x$  und  $y$  die Formeln für die ungestörten Bahnelemente ein, man erhält damit eine erste Näherung für die gestörten Bahnelemente. Dieses Vorgehen kann sinngemäß wiederholt werden, um eine zweite Näherung der gestörten Bahnelemente zu ermitteln (Verfahren der sukzessiven Approximationen).

Setzt man auf der rechten Seite von (6.39):

$$x = u_0 t; \quad y = w_0 t - \frac{1}{2} g_0 t^2$$

ein und integriert die hierdurch entstehenden Gleichungen über  $t$ , so erhält man als 1. Näherung der gestörten Bahnelemente:

$$\dot{x} = u_0 t - \frac{1}{3} \omega \cos \varphi \sin \psi \cdot (3 w_0 - g_0 t) t^2; \quad (6.40)$$

$$\dot{y} = w_0 t - \frac{1}{2} g_0 t^2 + \omega \cos \varphi \sin \psi \cdot u_0 t^2; \quad (6.41)$$

$$\dot{z} = -\frac{1}{3} \omega \cos \varphi \cos \psi \cdot (3 w_0 - g_0 t) t^2 + \omega \sin \varphi \cdot u_0 t^2. \quad (6.42)$$

Die Flugbahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt werden wieder an Hand der Bedingungsgleichungen  $\dot{y}_e = 0$  bzw.  $\dot{y}_e = 0$  ermittelt.

Da die Störungen der Flugbahn durch die Coriolis-Beschleunigung erfahrungsgemäß klein sind, kann man die gestörte Flugzeit  $\bar{t}_e$  in der Form  $\bar{t}_e = t_e + \delta t_e$  ansetzen und die höheren Potenzen von  $\delta t_e$  vernachlässigen. Entsprechend werden die Produkte der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  mit  $\delta t_e$  als klein von 2. Ordnung angesehen.

Unter diesen Voraussetzungen erhält man aus (6.40) bis (6.42) für den Auftreffpunkt ( $w_e = w_0 - g_0 t_e = -w_0$ ):

$$\tilde{x}_e = x_e + u_0 \delta t_e - \frac{1}{3} \omega w_0 t_e^2 \cos \varphi \sin \psi; \quad (6.43)$$

$$0 = -w_0 \delta t_e + \omega u_0 t_e^2 \cos \varphi \sin \psi; \quad (6.44)$$

$$\tilde{z}_e = -\frac{1}{3} \omega w_0 t_e^2 \cos \varphi \cos \psi + \omega u_0 t_e^2 \sin \varphi. \quad (6.45)$$

Auflösen von (6.44) nach  $\delta t_e$  liefert die Flugzeitänderung

$$\delta t_e = \omega t_e^2 \cot \vartheta_0 \cos \varphi \sin \psi. \quad (6.46)$$

Die Seitenabweichung  $\tilde{z}_e$  läßt sich in der Form schreiben

$$\tilde{z}_e = \frac{1}{6} \omega g_0 t_e^3 (3 \cot \vartheta_0 \sin \varphi - \cos \varphi \cos \psi). \quad (6.47)$$

Um den Schußweitenfehler  $\Delta x_e = \tilde{x}_e - x_e$  zu erhalten, ist (6.46) in (6.43) einzusetzen:

$$\Delta x_e = \frac{1}{6} \omega g_0 t_e^3 (3 \cot^2 \vartheta_0 - 1) \cos \varphi \sin \psi. \quad (6.48)$$

Ersetzt man  $\tan \vartheta_0 \rightarrow \sqrt{\tan \vartheta_0 \cdot \tan |\vartheta_e|}$ , so sind (6.46) bis (6.48) auch im luftgefüllten Raum als Näherungsformeln brauchbar.<sup>1)</sup>

Für konstanten Breiten- und Azimutwinkel hängt das Vorzeichen der 1. Näherung des Schußweitenfehlers von der Größe des Abgangswinkels ab. Der Grenzwinkel  $\vartheta_0 = \vartheta'_0$  (bei dem das Vorzeichen wechselt) errechnet sich aus

$$3 \cot^2 \vartheta'_0 - 1 = 0; \quad \tan \vartheta'_0 = \sqrt{3}.$$

Der Grenzwinkel hat somit die Größe  $\vartheta'_0 = 60^\circ$ . Für  $\vartheta_0 < \vartheta'_0$  ist  $3 \cot^2 \vartheta_0 > 1$ ; für  $\vartheta_0 > \vartheta'_0$  wird  $3 \cot^2 \vartheta_0 < 1$ .

Im luftgefüllten Raum ergeben sich etwas andere Zahlenwerte für den Grenzwinkel.

Beim *Schuß nach Norden* ( $\psi = 0$ ) und nach Süden ( $\psi = \pi$ ) treten (in 1. Näherung) *keine Abweichungen der Flugzeit und der Schußweite* auf.

Der *Schuß nach Osten* ( $\psi = \pi/2$ ) ergibt für  $\vartheta_0 < 60^\circ$  eine *Flugzeit- und Schußweitenvergrößerung*, für  $\vartheta_0 > 60^\circ$  eine *Flugzeit- und Schußweitenverkürzung*.

Im Falle des *Schusses nach Westen* ( $\psi = -\pi/2$ ) erhält man für  $\vartheta_0 < 60^\circ$  eine *Verkürzung*, für  $\vartheta_0 > 60^\circ$  eine *Vergrößerung der Schußweite*.

Die Seitenabweichung ist positiv, wenn der Klammerausdruck in (6.47) größer als Null ist.

Beim *Schuß nach Osten* ( $\psi = \pi/2$ ), *Süden* ( $\psi = \pi$ ) und *Westen* ( $\psi = -\pi/2$ ) wird  $\tilde{z}_e > 0$ , es tritt also eine *Rechtsabweichung* auf.

Im Fall des *Schusses nach Norden* hängt das Auftreten einer Rechts- oder Linksabweichung von der Größe des Abgangswinkels ab.

Damit eine *Rechtsabweichung* vorliegt, muß die Bedingung erfüllt sein:

$$3 \cot \vartheta_0 \sin \varphi - \cos \varphi > 0; \quad \tan \vartheta_0 < 3 \tan \varphi.$$

Für  $\varphi = \pi/4$  folgt  $\tan \vartheta_0 < 3$ , also  $\vartheta_0 < 71^\circ 30'$ . Bei *steileren Schüssen nach Norden* tritt eine *Linksabweichung* auf.

Die Störungen für die Bahnelemente im Flugbahngipfel lassen sich in entsprechender Weise bestimmen.

<sup>1)</sup> Siehe Šapiro [2], § 110.

#### 6.2.4. Die Bewegungsdifferentialgleichungen eines Geschosses bei Windeinfluß

Maßgebend für den Luftwiderstand, den ein Geschöß bei seiner Bewegung durch die Atmosphäre erfährt, ist die Relativgeschwindigkeit zwischen dem Geschöß und der das Geschöß umgebenden Luft.

Bei allen bisher durchgeführten Untersuchungen zum klassischen Bahnmodell war angenommen worden, daß die Atmosphäre bezüglich der Erdoberfläche ruht. Die Relativgeschwindigkeit zwischen Geschöß und Luft ist dann gleich der Bahngeschwindigkeit  $v$  des Geschosses in dem erdfesten Koordinatensystem.

Hat die Atmosphäre bezüglich der Erdoberfläche die *Windgeschwindigkeit*  $w = (W_x, W_y, W_z)$ , so beträgt die Relativgeschwindigkeit zwischen dem Geschöß und der das Geschöß umgebenden Luft  $v_r = v - w$ ,

$$v_r = (u_r, w_r, q_r) = (u - W_x, w - W_y, q - W_z). \quad (6.49)$$

In der Ballistik wird im allgemeinen vorausgesetzt, daß der Wind parallel zur Erdoberfläche weht, die Aufwindkomponente also identisch gleich Null ist:  $W_y \equiv 0$ . In diesem Fall bleibt die vertikale Schichtung der Atmosphäre ungeändert erhalten.

Um in den Bewegungsgleichungen des Geschosses den Windeinfluß zu berücksichtigen, hat man die Verzögerung  $b' = E v$  zu ersetzen durch  $b'_r$ ,

$$b'_r = E_r v_r = E(c, y, v_r) v_r; \quad (6.50)$$

$$v_r = |v_r| = \sqrt{(u - W_x)^2 + w^2 + (q - W_z)^2}; \quad W_y \equiv 0.$$

Die Verzögerung  $b'_r$  durch den Luftwiderstand ist entgegengesetzt zu  $v_r$  gerichtet:

$$\frac{b'_r}{v_r} = - \frac{v_r}{v_r} = \left( - \frac{u - W_x}{v_r}, - \frac{w}{v_r}, - \frac{q - W_z}{v_r} \right). \quad (6.51)$$

Zerlegt man die resultierende Beschleunigung  $b = b'_r + g$  in Komponenten parallel zu den Koordinatenachsen, so ergibt sich das Anfangswertproblem für die Flugbahn:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= - E_r (\dot{x} - W_x), & x(t_0) &= 0, & \dot{x}(t_0) &= u_0; \\ \ddot{y} &= - E_r \dot{y} - g, & y(t_0) &= 0, & \dot{y}(t_0) &= w_0; \\ \ddot{z} &= - E_r (\dot{z} - W_z), & z(t_0) &= 0, & \dot{z}(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Zur Integration der Bewegungsgleichungen (6.52) muß der Verlauf der Windgeschwindigkeit  $W_x = W_x(t)$ ,  $W_z = W_z(t)$  als bekannt vorausgesetzt werden.

Ein Vergleich mit dem allgemeinen Ansatz für das gestörte  $t$ -System (6.2) zeigt, daß die Störglieder im vorliegenden Fall die Gestalt haben:

$$\begin{aligned} \Delta x_0 &= \Delta y_0 = \Delta z_0 = 0; & e_x &= e_y = e_z = 0; \\ e_u &= Eu - E_r(u - W_x); & e_w &= (E - E_r)w; \\ e_q &= Eq - E_r(q - W_z). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Ist die Windgeschwindigkeit klein gegenüber der Bahngeschwindigkeit ( $W \ll v$ ), so können die Störfunktionen (6.53) bezüglich der Windgeschwindigkeitskomponenten  $W_x$ ,  $W_z$  linearisiert werden.

Da der Vektor der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  nach Voraussetzung in der  $x, y$ -Ebene liegt, ist die Geschwindigkeit in  $z$ -Richtung längs der Flugbahn als kleine Störgröße anzusehen, so daß man auch die Produkte von  $q$  mit den Windgeschwindigkeitskomponenten als kleine Größen 2. Ordnung behandeln kann.

In den vorangegangenen Überlegungen ist implizit die Annahme enthalten, daß die durch den Wind veränderte Anströmung des Geschosses keinen Einfluß auf die Größe des Ballistischen Koeffizienten hat. Inwieweit diese Annahme berechtigt ist, bedarf im Einzelfall einer besonderen (experimentellen) Nachprüfung.

Ist die Windgeschwindigkeit konstant nach Betrag und Richtung, so lassen sich die Windstörungen der Flugbahnelemente in einfacher Weise durch eine Änderung der Anfangsbedingungen des Schießens kompensieren (siehe Abschnitt 6.4.).

### 6.3. Lineare außenballistische Parameterstörungen<sup>1)</sup>

#### 6.3.1. Grundsätzliches zur mathematischen Behandlung von Parameterstörungen

Nachdem in dem vorangegangenen Abschnitt 6.2. die wichtigsten physikalischen Störursachen und ihre Auswirkungen auf die Gestalt des Flugbahn-Anfangswertproblems erläutert worden sind, sollen in diesem und den folgenden Abschnitten Darstellung, Berechnung und Transformation von Parameterstörungen systematisch erörtert werden.

<sup>1)</sup> Die Ausführungen knüpfen an die grundsätzlichen Bemerkungen in Abschnitt 2.8. an; es wird deshalb empfohlen, vor dem Durcharbeiten dieses Abschnitts die Ausführungen in Abschnitt 2.8. zu wiederholen.

Im Rahmen der ballistischen Störungstheorie für das klassische Bahnmodell werden folgende Parameteränderungen betrachtet:

- Änderungen des Ballistischen Koeffizienten  $c$ ,
- Änderungen der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ ,
- Änderungen des Abgangswinkels  $\vartheta_0$ ,
- Änderungen des Luftdrucks  $p_0$  am Boden,
- Änderungen der Lufttemperatur  $\tau_0$  am Boden sowie
- Änderungen der Mündungshöhe  $y_0$ .

Analog zu den Änderungen dieser Parameter lassen sich auch der Einfluß eines konstanten Längswindes  $W_x$  und eines konstanten Querwindes  $W_z$  behandeln (siehe Abschnitt 6.4.).

Die Einflüsse der genannten Störungen auf den Verlauf der Flugbahnelemente können grundsätzlich stets dadurch berechnet werden, daß man die in Abschnitt 6.2 aufgestellten gestörten Anfangswertprobleme (numerisch) integriert. Dieser Weg ist jedoch recht aufwendig. Man versucht deshalb, die Berechnung der gestörten Flugbahnen auf die Ermittlung von Normalbahnen mit geänderten Flugbahnparametern  $c$ ,  $v_0$ ,  $\vartheta_0$  zurückzuführen, da man für die Schar der Normalbahnen ballistische Tafelwerke zur Verfügung hat. Die Störungen der Flugbahnparameter  $c$ ,  $v_0$ ,  $\vartheta_0$  werden deshalb als *Grundstörungen* bezeichnet.

Das Vorgehen zur Behandlung der Parameterstörungen läßt sich symbolisch in der Form darstellen

$$\{c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0, y_0; W_x, W_z\} \rightarrow \{c^*, v_0^*, \vartheta_0^*; p_{0N}, \tau_{0N}, y_{0N}; 0, 0\}.$$

Die Theorie, die für diese Reduktion entwickelt worden ist, ist nicht-linear, so daß beliebig große Störungen erfaßt werden können. Für die praktische Behandlung von Störungsproblemen ergeben sich jedoch wesentliche Vereinfachungen, wenn die Parameteränderungen (in noch zu definierendem Sinn) als klein angesehen werden dürfen. Die Formeln für die gestörten Bahnelemente können dann bezüglich der Parameteränderungen linearisiert werden (*lineare Störungstheorie*).

Im Rahmen der außenballistischen Störungstheorie für Bahnen mittlerer Reichweite wird die Fallbeschleunigung generell als konstant angenommen. Des weiteren wird vorausgesetzt, daß längs der Flugbahn der (geopotentielle) Temperaturgradient  $A_{1N}^*$  konstant und gleich dem Temperaturgradienten der untersten Atmosphärenschiicht ist:

$$g = g_{0N} = const; \quad d\tau^*/dh^* = A_{1N}^* = const;$$

Die durch diese Annahmen bedingten (physikalischen) Fehler der errechneten Störungen sind im allgemeinen klein gegenüber den mathematischen Linearisierungsfehlern, wovon man sich an Hand von Zahlenbeispielen leicht überzeugt.

### 6.3.2. Die mathematische Darstellung von linearen Parameterstörungen

Die Theorie der linearen Parameterstörungen von Flugbahnen beruht auf zwei Annahmen:

- Die Störung  $\xi^i$  eines Bahnelementes  $x^i$  ist proportional zur Änderung  $\delta\mu^j$  des Flugbahnparameters  $\mu^j$ .
- Die Störungseinflüsse bei gleichzeitiger Änderung mehrerer Flugbahnparameter überlagern sich additiv.

Ist nur der Parameter  $\mu^1$  gestört, so gilt

$$\xi^{i,\sigma} = X_{\mu^1}^{i,\sigma} \delta\mu^1.$$

Der Proportionalitätsfaktor zwischen der Änderung  $\xi^i$  des Bahnelementes  $x^i$  und der Änderung  $\delta\mu^j$  des Flugbahnparameters  $\mu^j$  wird mit  $X_{\mu^j}^{i,\sigma}$  bezeichnet und *Störungskoeffizient* genannt; der hochgestellte Index  $\sigma$  bezeichnet die Vergleichsvariable.

Bei Änderung von  $m$  Parametern  $\mu^j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) erhält man entsprechend:

$$\xi^{i,\sigma} = X_{\mu^1}^{i,\sigma} \delta\mu^1 + X_{\mu^2}^{i,\sigma} \delta\mu^2 + \dots + X_{\mu^m}^{i,\sigma} \delta\mu^m = \sum_{j=1}^m X_{\mu^j}^{i,\sigma} \delta\mu^j.$$

In diesem Zusammenhang sei daran erinnert, daß die Störungskoeffizienten keine Konstanten, sondern Funktionen der Normalbahnelemente sind.

Um einen Störungskoeffizienten vollständig zu kennzeichnen, sind anzugeben:

- das Bahnelement, dessen Störung berechnet werden soll,
- der Parameter, dessen Änderung die Störung der Bahnelemente hervorruft,
- das Vergleichskriterium, das jedem Punkt der ungestörten Bahn (der Normalbahn) eindeutig einen Punkt der gestörten Bahn zuordnet,
- die Stelle der (ungestörten) Bahn, an der die Änderung der Bahnelemente infolge des Störungseinflusses berechnet wird, und
- das ballistische Bahnmodell, das der Störungsrechnung zugrunde liegt.

Die Störungskoeffizienten der Bahnelemente  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{t}$ ,  $\hat{u}$ ,  $\hat{w}$  der Normalbahn werden durch  $X(t_e|\hat{\mu})$ ,  $Y(t_e|\hat{\mu})$ ,  $T(t_e|\hat{\mu})$ ,  $U(t_e|\hat{\mu})$ ,  $W(t_e|\hat{\mu})$  bezeichnet; die Vergleichsvariable wird als hochgestellter Index, der störungsverursachende Parameter als tiefgestellter Index hinzugefügt. So bedeutet  $X_{v_0}^y(t_e|\hat{\mu})^1$  den Störungskoeffizienten für die Horizontalentfernung  $\hat{x}_e = \varphi_x(t_e|\hat{\mu})$ ,  $\hat{\mu} = (\hat{c}, \hat{v}_0, \hat{\vartheta}_0)$  infolge einer  $v_0$ -Änderung, bezogen auf die Vergleichsvariable  $y$ .

Wie in Abschnitt 6.3.1. erwähnt, werden im Rahmen der außenballistischen Störungstheorie Änderungen der acht Parameter  $c$ ,  $v_0$ ,  $\vartheta_0$ ;  $p_0$ ,  $\tau_0$ ;  $W_x$ ,  $W_z$  betrachtet. Gefragt sind im allgemeinen die Störungseinflüsse auf die Flugzeit  $t$ , die Flugbahnkoordinaten  $x$  und  $y$ , die Bahngeschwindigkeit  $v$  sowie den Neigungswinkel der Flugbahntangente  $\vartheta$ , wobei (je nach der Aufgabenstellung) jeweils eines dieser Bahnelemente als Vergleichsvariable konstant gehalten wird. Es wären somit insgesamt  $4 \cdot 5 \cdot 8 = 160$  Störungskoeffizienten zu berechnen und als Funktionen einer laufenden Flugbahnvariablen darzustellen.

Eine wesentliche Vereinfachung erfährt die Berechnung der Störungskoeffizienten dadurch, daß die Störungskoeffizienten für Änderungen der Parameter  $p_0$ ,  $\tau_0$ ,  $y_0$ ;  $W_x$ ,  $W_z$  durch die Störungskoeffizienten für  $c$ -,  $v_0$ - und  $\vartheta_0$ -Änderungen und die Elemente der Normalbahn ausgedrückt werden können.

Sieht man die Fallbeschleunigung und den Temperaturgradienten der Atmosphäre im Bereich der Flugbahn als konstant an, so sind auch die Störungskoeffizienten für  $c$ -,  $v_0$ - und  $\vartheta_0$ -Änderungen durch eine lineare Beziehung verknüpft.

Eine weitere, sehr wesentliche Vereinfachung der Berechnung der Störungskoeffizienten liefert die Theorie der Vergleichsvariablen-Transformationen. Wie im folgenden gezeigt werden wird, genügt es, *durch numerische Integration* der Störungsdifferentialgleichungen *die Störungskoeffizienten für eine einzige Vergleichsvariable explizit zu berechnen*. Die Störungskoeffizienten für andere Vergleichsvariablen folgen aus diesem Satz von Störungskoeffizienten durch einfache Matrizenmultiplikationen.

Die Ermittlung der 160 Störungskoeffizienten reduziert sich somit auf die *numerische Berechnung von 8 Störungskoeffizienten der Grundstörungen* und anschließende einfache arithmetische Rechenoperationen.

<sup>1)</sup> Der zweite tiefgestellte Index „0“ wird zur Vereinfachung der Formelschreibweise im folgenden weggelassen.

Wenn ein ballistisches Tafelwerk des Typs [6] vorliegt, verwendet man als Grundstörungen am zweckmäßigsten die Störungen für  $c$ - und  $v_0$ -Änderungen (Vergleichsvariable:  $y$ ).

Sollen die Störungskoeffizienten für die Grundstörungen durch numerische Integration der Störungsdifferentialgleichungen ermittelt werden, so eignen sich als Grundstörungen am besten die (reduzierten) Störungen für  $v_0$ - und  $\vartheta_0$ -Änderungen; die Vergleichsvariable kann hierbei noch beliebig gewählt werden.

In der Störungsrechnung für Bahnen der Klasse Boden – Boden interessieren vor allem diejenigen Änderungen der Bahnelemente, die durch die störungsbedingte Verlagerung des Auftreffpunkts in der (horizontalen) Mündungsebene zustande kommen.

Das ballistische Tafelwerk liefert die Bahnelemente im Auftreffpunkt als Funktion der drei Bahnparameter  $c$ ,  $v_0$  und  $\vartheta_0$ :

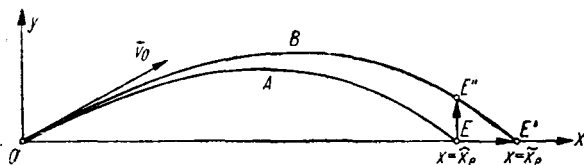
$$\begin{aligned} x_e &= \psi_x(y_e|c, v_0, \vartheta_0); & t_e &= \psi_t(y_e|c, v_0, \vartheta_0); \\ v_e &= \psi_v(y_e|c, v_0, \vartheta_0); & \vartheta_e &= \psi_\vartheta(y_e|c, v_0, \vartheta_0); \\ y_e &= y_0 = 0. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Die Normalbahn, deren Störung berechnet werden soll, besitze die Bahnparameter  $c = \hat{c}$ ,  $v_0 = \hat{v}_0$ ,  $\vartheta_0 = \hat{\vartheta}_0$ ; ihre Elemente im Auftreffpunkt  $E$  seien

$$x_e = \hat{x}_e, \quad t_e = \hat{t}_e, \quad v_e = \hat{v}_e, \quad \vartheta_e = \hat{\vartheta}_e.$$

Ändert man die Bahnparameter  $\hat{c}$ ,  $\hat{v}_0$ ,  $\hat{\vartheta}_0$  der Ausgangsbahn um gewisse kleine Beträge  $\delta c$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta \vartheta_0$ , so geht die Normalbahn (ungestörte Bahn) in eine benachbarte (gestörte) Bahn mit den Parametern über

$$\begin{aligned} c &= \bar{c} = \hat{c} + \delta c, & v_0 &= \bar{v}_0 = \hat{v}_0 + \delta v_0, \\ \vartheta_0 &= \bar{\vartheta}_0 = \hat{\vartheta}_0 + \delta \vartheta_0. \end{aligned}$$



**Bild 6.3** Störung der Flugbahnelemente im Auftreffpunkt (schematisch)  
*A* – ungestörte Bahn; *B* – gestörte Bahn; *E* – Auftreffpunkt der ungestörten Bahn; *E'* – gestörter Auftreffpunkt (Vergleichsvariable:  $y = y_e = 0$ );  
*E''* – gestörter Auftreffpunkt (Vergleichsvariable:  $x = \hat{x}_e$ )



Der Auftreffpunkt in der Mündungsebene wandert hierbei von  $E \rightarrow E'$ :

$$E = (\hat{y}_e, \hat{x}_e) = (0, \hat{x}_e); \quad E' = (\hat{y}_e, \hat{x}_e) = (0, \hat{x}_e)$$

(siehe Bild 6.3).

Für die Störungen der Bahnelemente im Auftreffpunkt bestehen auf Grund von (6.54) somit die Beziehungen

$$\begin{aligned} \delta x_e &= \tilde{x}_e - \hat{x}_e \\ &= \psi_x(y_e | \hat{c} + \delta c, \hat{v}_0 + \delta v_0, \hat{\vartheta}_0 + \delta \vartheta_0) - \psi_x(y_e | \hat{c}, \hat{v}_0, \hat{\vartheta}_0); \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} \delta t_e &= \tilde{t}_e - \hat{t}_e \\ &= \psi_t(y_e | \hat{c} + \delta c, \hat{v}_0 + \delta v_0, \hat{\vartheta}_0 + \delta \vartheta_0) - \psi_t(y_e | \hat{c}, \hat{v}_0, \hat{\vartheta}_0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta v_e &= \tilde{v}_e - \hat{v}_e \\ &= \psi_v(y_e | \hat{c} + \delta c, \hat{v}_0 + \delta v_0, \hat{\vartheta}_0 + \delta \vartheta_0) - \psi_v(y_e | \hat{c}, \hat{v}_0, \hat{\vartheta}_0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \vartheta_e &= \tilde{\vartheta}_e - \hat{\vartheta}_e \\ &= \psi_\vartheta(y_e | \hat{c} + \delta c, \hat{v}_0 + \delta v_0, \hat{\vartheta}_0 + \delta \vartheta_0) - \psi_\vartheta(y_e | \hat{c}, \hat{v}_0, \hat{\vartheta}_0). \end{aligned}$$

Taylor-Entwicklung der rechten Seite von (6.55) nach Potenzen von  $\delta c$ ,  $\delta v_0$  und  $\delta \vartheta_0$  liefert (bei Beschränkung auf die linearen Glieder):

$$\delta x_e \approx \left( \frac{\partial x_e}{\partial c} \right)_N \delta c + \left( \frac{\partial x_e}{\partial v_0} \right)_N \delta v_0 + \left( \frac{\partial x_e}{\partial \vartheta_0} \right)_N \delta \vartheta_0. \quad (6.56)$$

Der Index „N“ deutet an, daß die Ableitungen für die Normalbahn zu berechnen sind, der Index „y“, daß diese Variable (Vergleichsvariable) bei der Differentiation konstant zu halten ist.

Die Koeffizienten der Parameteränderungen  $\delta c$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta \vartheta_0$  in (6.56) sind die Störungskoeffizienten für die Horizontalschußweite:

$$X_c^y(t_e | \hat{\mu}) := \left( \frac{\partial x_e}{\partial c} \right)_N = \left( \frac{\partial \psi_x(y_e | c, \hat{v}_0, \hat{\vartheta}_0)}{\partial c} \right)_{c=\hat{c}};$$

$$X_{v_0}^y(t_e | \hat{\mu}) := \left( \frac{\partial x_e}{\partial v_0} \right)_N = \left( \frac{\partial \psi_x(y_e | \hat{c}, v_0, \hat{\vartheta}_0)}{\partial v_0} \right)_{v_0=\hat{v}_0};$$

$$X_{\vartheta_0}^y(t_e | \hat{\mu}) := \left( \frac{\partial x_e}{\partial \vartheta_0} \right)_N = \left( \frac{\partial \psi_x(y_e | \hat{c}, \hat{v}_0, \vartheta_0)}{\partial \vartheta_0} \right)_{\vartheta_0=\hat{\vartheta}_0};$$

$$\hat{\mu} = (\hat{c}, \hat{v}_0, \hat{\vartheta}_0).$$

Unter Verwendung dieser Bezeichnungen geht (6.56) über in

$$\delta x_e \approx X_c^y(t_e|\hat{\mu}) \delta c + X_v^y(t_e|\hat{\mu}) \delta v_0 + X_\vartheta^y(t_e|\hat{\mu}) \delta \vartheta_0. \quad (6.57)$$

Entsprechende Beziehungen ergeben sich für  $\delta t_e$ ,  $\delta v_e$  und  $\delta \vartheta_e$ :

$$\delta t_e \approx T_c^y(t_e|\hat{\mu}) \delta c + T_v^y(t_e|\hat{\mu}) \delta v_0 + T_\vartheta^y(t_e|\hat{\mu}) \delta \vartheta_0, \quad (6.58)$$

$$\delta v_e \approx V_c^y(t_e|\hat{\mu}) \delta c + V_v^y(t_e|\hat{\mu}) \delta v_0 + V_\vartheta^y(t_e|\hat{\mu}) \delta \vartheta_0, \quad (6.59)$$

$$\delta \vartheta_e \approx \theta_c^y(t_e|\hat{\mu}) \delta c + \theta_v^y(t_e|\hat{\mu}) \delta v_0 + \theta_\vartheta^y(t_e|\hat{\mu}) \delta \vartheta_0. \quad (6.60)$$

Es werden folgende Matrizen eingeführt<sup>1)</sup>:

– Die *Spaltenmatrix (der Spaltenvektor) der Parameteränderungen*  $\delta \mu$ ,

$$\delta \mu = \begin{bmatrix} \delta c \\ \delta v_0 \\ \delta \vartheta_0 \end{bmatrix} = [\delta c, \delta v_0, \delta \vartheta_0]^T; \quad (6.61)$$

– die *Spaltenmatrix (der Spaltenvektor) der Störungen der Bahnelemente im Auftreffpunkt*  $\xi_e^y$ ,

$$\xi_e^y := \begin{bmatrix} \delta t_e^y \\ \delta x_e^y \\ \delta v_e^y \\ \delta \vartheta_e^y \end{bmatrix} = [\delta t_e^y, \delta x_e^y, \delta v_e^y, \delta \vartheta_e^y]^T; \quad (6.62)$$

– die *Matrix des Störungskoeffizienten*  $\Psi^y(t_e|\hat{\mu})$ ,

$$\Psi^y(t_e|\hat{\mu}) := \begin{bmatrix} T_c^y(t_e|\hat{\mu}) & T_v^y(t_e|\hat{\mu}) & T_\vartheta^y(t_e|\hat{\mu}) \\ X_c^y(t_e|\hat{\mu}) & X_v^y(t_e|\hat{\mu}) & X_\vartheta^y(t_e|\hat{\mu}) \\ V_c^y(t_e|\hat{\mu}) & V_v^y(t_e|\hat{\mu}) & V_\vartheta^y(t_e|\hat{\mu}) \\ \theta_c^y(t_e|\hat{\mu}) & \theta_v^y(t_e|\hat{\mu}) & \theta_\vartheta^y(t_e|\hat{\mu}) \end{bmatrix}. \quad (6.63)$$

Die Beziehungen (6.57) bis (6.60) können damit zu der Matrixgleichung zusammengefaßt werden:

$$\xi_e^y = \Psi^y(t_e|\hat{\mu}) \delta \mu, \quad \hat{\mu} = [\hat{c}, \hat{v}_0, \hat{\vartheta}_0]^T. \quad (6.64)$$

<sup>1)</sup> Im Rahmen der Matrizen­theorie muß konsequent zwischen *Spalten-* und *Zeilen-*vektoren unterschieden werden. Die Transponierung (Symbol: T) verwandelt einen Zeilenvektor in einen Spaltenvektor (und umgekehrt).

Der Vektor  $\hat{\mu}$  in den Argumenten der vorstehenden Funktionen weist darauf hin, daß die betreffenden Funktionen für die *ungestörte* Lösung zu berechnen sind.

Da die lineare Störungstheorie generell nur die Fehler 1. Ordnung betrachtet, darf im Rahmen dieser Theorie in (6.57) bis (6.60) das Zeichen „ungefähr gleich“ ( $\approx$ ) durch das Gleichheitszeichen (=) ersetzt werden.

Die Multiplikation des Vektors der Parameteränderungen mit der Matrix  $\Psi^y(t_e|\hat{\mu})$  bewirkt, daß die Anfangsstörung im Abgangspunkt ( $t = t_0$ ) längs der Flugbahn bis zum Auftreffpunkt ( $t = t_e$ ) fortgepflanzt wird, wo sie die Störung  $\xi_e^y$  der Bahnelemente ( $x_e, t_e, v_e, \vartheta_e$ ) hervorruft. Die Matrix  $\Psi^y(t_e|\hat{\mu})$  der Störungskoeffizienten wird deshalb auch *Fehlertransportmatrix* genannt.

Bei den vorangegangenen Überlegungen zur Störung der Bahnelemente im Auftreffpunkt ist die Vergleichsvariable  $y$  benutzt worden. Die Verwendung dieser Vergleichsvariablen entspricht dem Fall, daß ein in der Mündungsebene befindliches Ziel relativ geringer Höhenausdehnung (ein sogenanntes *Flächenziel*) bekämpft wird.

Zur Panzerbekämpfung werden Kanonen mit sehr hoher Anfangsgeschwindigkeit eingesetzt. Die Flugbahnen der aus diesen Kanonen abgefeuerten Geschosse sind daher extrem rasant; ihre Gipfelhöhe liegt in der Größenordnung der Zielhöhe. Ist eine dieser Flugbahnen Störungseinflüssen unterworfen, so interessiert vor allem die *vertikale Verlagerung* des Auftreffpunkts auf dem Ziel; das Auswandern des Auftreffpunkts in der Mündungsebene ist demgegenüber von untergeordneter Bedeutung. Die diesem Problem angepaßte Vergleichsvariable ist die Abszisse  $x$  ( $x = \hat{x}_e = \text{const}$ ); siehe Bild 6.3, Seite 356.

Die zur Berechnung des Störungsvektors  $\xi_e^x(t_e|\hat{\mu})$  benötigte Fehlertransportmatrix  $\Psi^x(t_e|\hat{\mu})$  folgt aus der Fehlertransportmatrix  $\Psi^y(t_e|\hat{\mu})$  durch Multiplikation mit der sogenannten *Vergleichsvariablen-Transformationsmatrix*  $P_{y,x}(t_e|\hat{\mu})^1$ :

$$\xi^x(t_e|\hat{\mu}) = \Psi^x(t_e|\hat{\mu}) \delta\mu; \tag{6.65}$$

$$\Psi^x(t_e|\hat{\mu}) = P_{y,x}(t_e|\hat{\mu}) \Psi^y(t_e|\hat{\mu}).$$

Die Elemente der Matrix  $P_{y,x}(t_e|\hat{\mu})$  enthalten ausschließlich Bahnelemente der ungestörten Bahn, sie sind nicht von dem Betrag der jeweils vorliegenden (linearen) Störung abhängig.

<sup>1)</sup> Zur Definition und Berechnung der Vergleichsvariablen-Transformationsmatrix siehe Abschnitt 6.3.4.1.

### 6.3.3. Die numerische Ermittlung der Störungskoeffizienten für die Bahnelemente im Auftreffpunkt

Wie aus den Ausführungen des Abschnitts 6.3.2. ersichtlich ist, sind die Störungskoeffizienten als partielle Ableitungen der Flugbahnelemente von Normalbahnen nach einem der Flugbahnparameter berechenbar. Die Störungskoeffizienten für die Flugbahnelemente im Auftreffpunkt können damit durch numerische Differentiation der Tafel der Flugbahnelemente [6] gewonnen werden.

Eine handliche Formel zur numerischen Differentiation einer tabellarisch gegebenen Funktion erhält man, wenn man durch jeweils 5 aufeinanderfolgende äquidistante Funktionswerte eine Ausgleichsparabel 2. Ordnung legt und dieses Ausgleichspolynom (formelmäßig) differenziert.<sup>1)</sup>

Es sei  $f(z)$  die vertafelte, zu differenzierende Funktion,  $\Delta z = h$  der Argumentschritt aufeinanderfolgender Funktionswerte und  $z = z_0$  die Stelle, an der die Ableitung benötigt wird. Dann gilt

$$f'(z_0) = \frac{-2f(z_0 - 2h) - f(z_0 - h) + f(z_0 + h) + 2f(z_0 + 2h)}{10h}.$$

Hierfür schreibt man auch kurz

$$f_0 = \frac{1}{10h} (-2f_{-2} - f_{-1} + f_1 + 2f_2). \quad (6.66)$$

Um z. B. die Störungskoeffizienten der Schußweite  $x_e$  für Änderungen des Ballistischen Koeffizienten zu berechnen, hat man  $v_0 = \text{const}$ ,  $\vartheta_0 = \text{const}$  zu setzen und die Formel (6.66) auf  $x_e$ -Werte anzuwenden, die zu benachbarten  $c$ -Werten gehören. Das Vorgehen soll an einem *Beispiel* erläutert werden.

Für die *Normalbahn mit den Flugbahnparametern*  $\hat{c}_{43} = 0,34 \text{ m}^2/\text{kg}$ ;  $\hat{v}_0 = 800 \text{ m/s}$ ;  $\hat{\vartheta}_0 = 35^\circ$  seien die Störungskoeffizienten der Flugbahnelemente im Auftreffpunkt zu berechnen.

Mit (6.66) und den Tafeln IX des Anhangs erhält man<sup>2)</sup>:

$$\begin{aligned} X_c^z &= \frac{-2 \cdot 27462 - 26461 + 24719 + 2 \cdot 23963}{10 \cdot 0,02} \frac{\text{m}}{\text{m}^2/\text{kg}} \\ &= -4,37 \cdot 10^4 \text{ kg/m}; \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Siehe hierzu *Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker.* Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953, S.299.

<sup>2)</sup> Da in der Ballistik und im Artilleriewesen mehrere unterschiedliche Winkelmaße gleichberechtigt nebeneinander benutzt werden, empfiehlt es sich, bei Dimensionsangaben die Maßeinheit des Winkels (Grd, rad bzw. Strich) mit anzuführen.

$$\begin{aligned}
 X_{\phi}^y &= \frac{-2 \cdot 21474 - 23455 + 27777 + 2 \cdot 30137}{10 \cdot 50} \frac{\text{m}}{\text{m/s}} = 43,296 \text{ s}; \\
 T_{\phi}^y &= \frac{-2 \cdot 72,02 - 70,98 + 68,97 + 2 \cdot 68,01}{10 \cdot 0,02} \frac{\text{s}}{\text{m}^2/\text{kg}} = -50,15 \text{ kg} \cdot \text{s}/\text{m}^2; \\
 T_{\phi}^y &= \frac{-2 \cdot 62,84 - 66,42 + 73,47 + 2 \cdot 76,96}{10 \cdot 50} \frac{\text{s}}{\text{m/s}} = 0,07058 \text{ s}^2/\text{m}; \\
 V_{\phi}^y &= \frac{-2 \cdot 371 - 363 + 350 + 2 \cdot 345}{10 \cdot 0,02} \frac{\text{m/s}}{\text{m}^2/\text{kg}} = -325,00 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}); \\
 V_{\phi}^y &= \frac{-2 \cdot 345 - 350 + 361 + 2 \cdot 368}{10 \cdot 50} \frac{\text{m/s}}{\text{m/s}} = 0,11400; \\
 \theta_{\phi}^y &= \frac{+2 \cdot (52^{\circ}19') + 52^{\circ}51' - 53^{\circ}33' - 2 \cdot (53^{\circ}43')}{10 \cdot 0,02} \frac{\text{Grd}}{\text{m}^2/\text{kg}} \\
 &= \frac{+2 \cdot 52,32^{\circ} + 52,85^{\circ} - 53,55^{\circ} - 2 \cdot 53,72^{\circ}}{10 \cdot 0,02} \frac{\text{kg} \cdot \text{Grd}}{\text{m}^2} \Rightarrow \\
 &= -17,5 \text{ kg Grd}/\text{m}^2; \\
 \theta_{\phi}^y &= \frac{+2 \cdot (50^{\circ}28') + 52^{\circ}02' - 54^{\circ}10' - 2 \cdot (54^{\circ}51')}{10 \cdot 50} \frac{\text{Grd}}{\text{m/s}} \\
 &= \frac{+2 \cdot 50,47^{\circ} + 52,03^{\circ} - 54,17^{\circ} - 2 \cdot 54,85^{\circ}}{10 \cdot 50} \frac{\text{s} \cdot \text{Grd}}{\text{m}} \\
 &= -0,02180 \text{ s Grd}/\text{m}.
 \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich für die Störungskoeffizienten bei einer Änderung des Abgangswinkels:

$$\begin{aligned}
 X_{\phi}^y &= \frac{-2 \cdot 22150 - 24041 + 26666 + 2 \cdot 27336}{10 \cdot 5^{\circ}} \frac{\text{m}}{\text{Grd}} = 259,94 \text{ m}/\text{Grd}; \\
 T_{\phi}^y &= \frac{-2 \cdot 53,34 - 61,78 + 77,85 + 2 \cdot 85,41}{10 \cdot 5^{\circ}} \frac{\text{s}}{\text{Grd}} = 1,6042 \text{ s}/\text{Grd}; \\
 V_{\phi}^y &= \frac{-2 \cdot 340 - 347 + 367 + 2 \cdot 377}{10 \cdot 5^{\circ}} \frac{\text{m}}{\text{s Grd}} = 1,8800 \text{ m}/(\text{s} \cdot \text{Grd}); \\
 \theta_{\phi}^y &= \frac{+2 \cdot (41^{\circ}51') + 48^{\circ}01' - 57^{\circ}27' - 2 \cdot (60^{\circ}54')}{10 \cdot 5^{\circ}} \\
 &= \frac{+2 \cdot 41,85^{\circ} + 48,02^{\circ} - 57,45^{\circ} - 2 \cdot 60,90^{\circ}}{10 \cdot 5^{\circ}} = -0,9506.
 \end{aligned}$$

Die Fehlertransportmatrix  $\Psi^y$  hat im vorliegenden Fall den Wert:

$$\Psi^y(t_e|\hat{u}) = \begin{bmatrix} -50,15 \text{ kg} \cdot \text{s}/\text{m}^2 & 0,07058 \text{ s}^2/\text{m} & 1,6042 \text{ s}/\text{Grd} \\ -43700 \text{ kg}/\text{m} & 43,296 \text{ s} & 259,94 \text{ m}/\text{Grd} \\ -325,00 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}) & 0,11400 & 1,8800 \text{ m}/(\text{s} \cdot \text{Grd}) \\ -17,5 \text{ kg} \cdot \text{Grd}/\text{m}^2 & -0,02180 \text{ s} \cdot \text{Grd}/\text{m} & -0,9506 \end{bmatrix}. \quad (6.67)$$

Die erste Zeile dieser Matrix enthält die Störungskoeffizienten der Flugzeit  $t_e$ , die zweite Zeile die Störungskoeffizienten der Schußweite  $x_e$ , die dritte Zeile die Störungskoeffizienten der Auftreffgeschwindigkeit  $v_e$  und die vierte Zeile die Störungskoeffizienten des Auftreffwinkels  $\vartheta_e$ .

Die Störungskoeffizienten für die gleiche Parameteränderung stehen in derselben Spalte: In der ersten Spalte findet man die Störungskoeffizienten für  $c$ -Änderungen, in der zweiten Spalte die Störungskoeffizienten für  $v_0$ -Änderungen und in der letzten Spalte die Störungskoeffizienten für  $\vartheta_0$ -Änderungen.

Um den Einfluß der Störung der Bahnparameter

$$\delta c/\hat{c} = 1\%, \quad \delta v_0 = 1 \text{ m/s}, \quad \delta \vartheta_0 = 1'$$

auf die Bahnelemente im Auftreffpunkt zu ermitteln, hat man die Matrix  $\Psi^p$  von rechts mit dem Vektor  $\delta\mu$ ,

$$\delta\mu = \begin{bmatrix} \delta c \\ \delta v_0 \\ \delta \vartheta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c}/100 \\ 1 \text{ m/s} \\ 1/60 \text{ Grd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0034 \text{ m}^2/\text{kg} \\ 1 \text{ m/s} \\ 0,016667 \text{ Grd} \end{bmatrix},$$

zu multiplizieren. Man erhält

$$\xi_e^p = \begin{bmatrix} -0,073 \text{ s} \\ -100,9 \text{ m} \\ -0,960 \text{ m/s} \\ +0,097^\circ \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0,07 \text{ s} \\ -101 \text{ m} \\ -1 \text{ m/s} \\ +6' \end{bmatrix}$$

bzw. ausführlich:

$$\delta t_e^p \approx -0,07 \text{ s}; \quad \delta x_e^p \approx -101 \text{ m}; \quad \delta v_e^p \approx -1,0 \text{ m/s}; \quad \delta \vartheta_e^p \approx +6'.$$

Die Flugzeit  $t_e$  verringert sich infolge des Störungseinflusses etwa um 0,1 s, die Schußweite um 101 m, die Auftreffgeschwindigkeit um 1 m/s, der Auftreffwinkel  $\vartheta_e$  um 6'.

Im vorliegenden Fall erreicht lediglich der Schußweitenfehler eine Größe, die für das praktische Schießen von wesentlicher Bedeutung ist.

### 6.3.4. Die Vergleichsvariablen-Transformation von Störungskoeffizienten

Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin, die Transformationsregel für Störungskoeffizienten abzuleiten, die allgemeinen Eigenschaften von Vergleichsvariablen-Transformationen zu untersuchen sowie einige für die Anwendungen wichtige ballistische Vergleichsvariablen-Transformationsmatrizen explizit zu berechnen.

### 6.3.4.1. Die Vergleichsvariablen-Transformationsmatrix

Die Durchführung von Vergleichsvariablen-Transformationen ist nicht auf das klassische Bahnmodell der Äußereren Ballistik beschränkt. Für die Herleitung der Vergleichsvariablen-Transformationsmatrix soll deshalb von einem allgemeinen Differentialgleichungssystem ausgegangen werden. Dies hat zugleich den Vorteil, daß die wesentlichen Überlegungen klarer hervortreten, als es bei Beschränkung auf die ballistischen Bewegungsdifferentialgleichungen der Fall wäre.

Gegeben sei das Anfangswertproblem für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} dx^1/dt &= f^1(t; x^1, \dots, x^n|\mu), & x^1(t_0) &= x_0^1(\mu), \\ dx^2/dt &= f^2(t; x^1, \dots, x^n|\mu), & x^2(t_0) &= x_0^2(\mu), \\ \vdots & & \vdots & \\ dx^n/dt &= f^n(t; x^1, \dots, x^n|\mu), & x^n(t_0) &= x_0^n(\mu), \end{aligned} \quad (6.68)$$

dessen rechte Seiten und Anfangsbedingungen explizit von dem Parameter  $\mu$  abhängen.

Die Lösung des Anfangswertproblems (6.68) lautet ( $\mu = \hat{\mu}$ ):

$$x^i = q^i(t|\hat{\mu}) \quad (i = 1(1) n). \quad (6.69)$$

Für  $\mu = \hat{\mu}$  sollen diese Funktionen *Elemente der ungestörten Lösung* heißen. Die Funktionen  $q^i$  seien (mindestens einmal) stetig nach  $\mu$  differenzierbar.

Bei einer Änderung des Parameters  $\mu$  von  $\mu = \hat{\mu}$  in  $\mu = \bar{\mu} = \hat{\mu} + \delta\mu$  gehen die Elemente der ungestörten Lösung (6.69) in die Elemente der gestörten Lösung über:

$$x^i = q^i(t|\bar{\mu}) = q^i(t|\hat{\mu} + \delta\mu) \quad (i = 1(1) n). \quad (6.70)$$

Vergleicht man gestörte und ungestörte Lösung zu gleichen Zeiten ( $t = t^* = \text{const}$ ), so erhält man als Störung  $\delta x_\mu^{i,t}$  des Elements  $x^i$ :

$$\begin{aligned} \delta x_\mu^{i,t} &= q^i(t|\bar{\mu}) - q^i(t|\hat{\mu}) = q^i(t|\hat{\mu} + \delta\mu) - q^i(t|\hat{\mu}) \\ &(i = 1(1) n). \end{aligned} \quad (6.71)$$

Die *unabhängige Variable*  $t$  ist somit zugleich *Vergleichsvariable*.

<sup>1)</sup> Hinsichtlich der Erläuterung der verwendeten Symbolik siehe Abschnitt 4.2.10. Die Bahnelemente und Parameter von ungestörten Lösungen (Normalbahnen) werden mit dem Symbol „ $\hat{\phantom{x}}$ “ gekennzeichnet; Matrizen, deren Elemente an einer Stelle der Normalbahn zu berechnen sind, erhalten den Index „N“.

Ist die Störung  $\delta\mu$  klein, dann kann man  $q^i(t|\mu)$  nach Potenzen von  $\delta\mu$  in eine *Taylor-Reihe* entwickeln, die nach dem linearen Glied abgebrochen wird:

$$\delta x_\mu^{i,t} \approx \left[ \frac{\partial q^i(t|\mu)}{\partial \mu} \right]_{\mu=\hat{\mu}} \cdot \delta\mu \quad (i = 1(1)n). \quad (6.72)$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern ist der *Störungskoeffizient* für die Variable  $x^i$  bei einer Änderung des Parameters  $\mu$ , bezogen auf die Vergleichsvariable  $t$  und berechnet für die Normalbahn ( $\mu = \hat{\mu}$ ):

$$X_\mu^{i,t}(t|\hat{\mu}) := \left[ \frac{\partial q^i(t|\mu)}{\partial \mu} \right]_{\mu=\hat{\mu}} \quad (i = 1(1)n). \quad (6.73)$$

(6.72) kann damit geschrieben werden

$$\delta x_\mu^{i,t} \approx \xi_\mu^{i,t}(t|\hat{\mu}) := X_\mu^{i,t}(t|\hat{\mu}) \delta\mu \quad (i = 1(1)n). \quad (6.74)$$

$\xi_\mu^{i,t}$  ist die *lineare* Abweichung des Flugbahnelements  $x^i$  der gestörten Lösung von der ungestörten, wobei der Vergleich beider Lösungen für  $t = \text{const}$  erfolgt.

Es sei eine umkehrbar-eindeutige Transformation zwischen den Variablensystemen  $\Sigma_t = \{t; x^1, \dots, x^n\}$  und  $\Sigma_s = \{s; z^1, \dots, z^n\}$  gegeben:

$$z^i = \varphi^i(t; x^1, \dots, x^n) \quad (i = 1(1)n); \quad (6.75)$$

$$s = \varphi^0(t; x^1, \dots, x^n);$$

$$x^j = \psi^j(s; z^1, \dots, z^n) \quad (j = 1(1)n); \quad (6.76)$$

$$t = \psi^0(s; z^1, \dots, z^n).$$

Die Transformation (6.76) führe (6.68) über in

$$\frac{dz^i}{ds} = g^i(s; z^1, \dots, z^n|\mu), \quad z^i(s_0) = z_0^i(\mu)$$

$$(i = 1(1)n), \quad (6.77)$$

die Lösung von (6.77) sei

$$z^i = p^i(s|\mu) \quad (i = 1(1)n). \quad (6.78)$$



Unter gewissen mathematischen Voraussetzungen<sup>1)</sup> läßt sich die Lösung des transformierten Anfangswertproblems (6.77) durch die Lösung (6.69) des Anfangswertproblems (6.69) und die Transformationsbeziehungen (6.75), (6.76) in Parameterform darstellen:

$$\begin{aligned} z^i &= \varphi^i[t; q^1(t|\mu), \dots, q^n(t|\mu)] \quad (i = 1(1)n), \\ s &= \varphi^0[t; q^1(t|\mu), \dots, q^n(t|\mu)]. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Partielle Differentiation von (6.78) und (6.79) nach  $\mu$  liefert für  $s = s^* = \text{const}^2$ ):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p^i}{\partial \mu}\right)^s &= \frac{d\varphi^i}{dt} \left(\frac{\partial t}{\partial \mu}\right)^s + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^j} \left(\frac{\partial q^j}{\partial \mu}\right)^s \quad (i = 1(1)n), \\ 0 &= \frac{d\varphi^0}{dt} \left(\frac{\partial t}{\partial \mu}\right)^s + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi^0}{\partial q^j} \left(\frac{\partial q^j}{\partial \mu}\right)^s. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen den Term  $(\partial t/\partial \mu)^s$ , so ergibt sich

$$\left(\frac{\partial p^i}{\partial \mu}\right)^s = -\frac{d\varphi^i/dt}{d\varphi^0/dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi^0}{\partial q^j} \left(\frac{\partial q^j}{\partial \mu}\right)^s + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^j} \left(\frac{\partial q^j}{\partial \mu}\right)^s. \quad (6.80)$$

Für die partiellen Ableitungen werden die Abkürzungen eingeführt

$$Z_\mu^{i,s} := \left(\frac{\partial p^i}{\partial \mu}\right)^s, \quad X_\mu^{j,t} := \left(\frac{\partial q^j}{\partial \mu}\right)^t.$$

Unter Beachtung von

$$\frac{d\varphi^i/dt}{d\varphi^0/dt} = \frac{dz^i}{ds} = g^i$$

läßt sich (6.80) schreiben

$$Z_\mu^{i,s} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^j} - g^i \frac{\partial \varphi^0}{\partial q^j} \right) X_\mu^{j,t} \quad (i = 1(1)n). \quad (6.81)$$

<sup>1)</sup> Siehe Abschnitt 4.2.10. und [24].

<sup>2)</sup> Die in den folgenden Gleichungen auftretenden Funktionen haben das Argument  $(t|\mu)$ , das zur Erhöhung der Übersichtlichkeit weggelassen worden ist.

Die  $n$  Gleichungen (6.81) können zu der Matrixgleichung zusammengefaßt werden

$$\sigma_{\mu}^s = P_{t,s} \pi_{\mu}^t, \quad (6.82)$$

worin  $\sigma_{\mu}^s$  und  $\pi_{\mu}^t$  die (Störungskoeffizienten-) Vektoren

$$\sigma_{\mu}^s := \begin{bmatrix} Z_{\mu}^{1,s} \\ Z_{\mu}^{2,s} \\ \vdots \\ Z_{\mu}^{n,s} \end{bmatrix}, \quad \pi_{\mu}^t := \begin{bmatrix} X_{\mu}^{1,t} \\ X_{\mu}^{2,t} \\ \vdots \\ X_{\mu}^{n,t} \end{bmatrix}$$

bedeuten;  $P_{t,s}$  bezeichnet die Matrix mit den Elementen

$$(P_{t,s})^{ij} = \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^j} - g^i \frac{\partial \varphi^0}{\partial q^j} = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} - g^i \frac{\partial \varphi^0}{\partial x^j} \quad (6.83)$$

$$(i, j = 1(1)n).$$

Für die Transformation von Störungskoeffizienten ist die Matrix  $P_{t,s}$  für die ungestörte Bahn zu berechnen:  $P_{t,s} = P_{t,s}(t|\hat{\mu})$ . Man nennt  $P_{t,s}$  in diesem Fall *Vergleichsvariablen-Transformationsmatrix*<sup>1)</sup> und schreibt

$$[P_{t,s}(t|\hat{\mu})]^{ij} = \left( \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} - g^i \frac{\partial \varphi^0}{\partial x^j} \right)_{x^j = q^j(t|\hat{\mu})} \quad (i, j = 1(1)n) \quad (6.84)$$

oder

$$[P_{t,s}(t|\hat{\mu})]^{ij} = \left( \frac{\partial z^i}{\partial x^j} - \frac{dz^i}{ds} \frac{\partial s}{\partial x^j} \right)_{s=s, z^i=z^i}, \quad (6.85)$$

$$\hat{s} = \varphi^0[t; q^1(t|\hat{\mu}), \dots, q^n(t|\hat{\mu})], \quad \hat{z}^i = \varphi^i[t; q^1(t|\hat{\mu}), \dots, q^n(t|\hat{\mu})],$$

$$\frac{d\hat{z}^i}{d\hat{s}} = \frac{d\hat{z}^i/dt}{d\hat{s}/dt} = g^i(\hat{s}; \hat{z}^1, \dots, \hat{z}^n|\hat{\mu}) \quad (i, j = 1(1)n).$$

Die rechten Seiten  $g^j$  des transformierten Differentialgleichungssystems (6.77) können durch die rechten Seiten  $f^i$  des Differentialgleichungs-

<sup>1)</sup> Siehe Abschnitt 6.3.2., Seite 359.

systems (6.68) sowie durch die Ableitungen der Transformationsbeziehungen (6.75) ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \frac{dz^i}{dt} &= \left( \frac{\partial \varphi^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} \right)_{x^i = q^i(t|\hat{\mu})} \\ &= \left( \frac{\partial \varphi^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n f^j \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \right)_{x^i = q^i(t|\hat{\mu})} . \end{aligned} \quad (6.86)$$

Entsprechend gilt

$$\frac{d\hat{s}^i}{dt} = \left( \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} + \sum_{j=1}^n f^j \frac{\partial \varphi^0}{\partial x^j} \right)_{x^i = q^i(t|\hat{\mu})} . \quad (6.87)$$

Man erkennt, daß zur expliziten Berechnung der Matrix  $\mathbf{P}_{t,s}(t|\hat{\mu})$  nur die Elemente der ungestörten Lösung des nichttransformierten Anfangswertproblems bekannt zu sein brauchen. Die jeweilige Größe der Parameterstörung hat keinen Einfluß auf die Gestalt der Vergleichsvariablen-Transformationsmatrix<sup>1)</sup>.

In (6.84) bzw. (6.85) wird die VT-Matrix durch Angabe ihrer Elemente definiert. Für manche Überlegungen grundsätzlicher Art ist es jedoch zweckmäßig, eine Matrixdarstellung zu wählen.

Das Anfangswertproblem (6.68) lautet in Vektorschreibweise

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x), \quad x(t_0) = x_0; \\ x &= (x^1, \dots, x^n)^T, \quad f = (f^1, \dots, f^n)^T \end{aligned} \quad (6.88)$$

mit der Lösung

$$x = q(t|\hat{\mu}), \quad q = (q^1, \dots, q^n)^T. \quad (6.89)$$

Entsprechend nimmt (6.77) die Form an

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= g(s, z), \quad z(s_0) = z_0; \\ z &= (z^1, \dots, z^n)^T, \quad g = (g^1, \dots, g^n)^T \end{aligned} \quad (6.90)$$

<sup>1)</sup> Für *Vergleichsvariablen-Transformationsmatrix* wird im folgenden die Kurzbezeichnung *VT-Matrix* benutzt.

mit der Lösung

$$\mathbf{z} = \mathbf{p}(s|\hat{\mu}), \quad \mathbf{p} = (p^1, \dots, p^n)^T. \quad (6.91)$$

Die Transformationsbeziehungen (6.75) und (6.76) lassen sich zusammenfassen zu

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)^T; \quad (6.92)$$

$$s = \varphi^0(t, \mathbf{x});$$

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(s, \mathbf{z}), \quad \boldsymbol{\psi} = (\psi^1, \dots, \psi^n)^T; \quad (6.93)$$

$$t = \psi^0(s, \mathbf{z}).$$

Es sei nun  $\mathbf{J}(t|\hat{\mu})$  die  $n \times n$ -Matrix mit den Elementen

$$[\mathbf{J}(t|\hat{\mu})]^{ik} = \left[ \frac{\partial \varphi^i(t, \mathbf{x})}{\partial x^k} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{q}(t|\hat{\mu})} \quad (i, k = 1(1)n) \quad (6.94)$$

und  $\mathbf{j}(t|\hat{\mu})$  der Spaltenvektor mit den Komponenten

$$[\mathbf{j}(t|\hat{\mu})]^k = \left[ \frac{\partial \varphi^0(t, \mathbf{x})}{\partial x^k} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{q}(t|\hat{\mu})} \quad (k = 1(1)n). \quad (6.95)$$

Die VT-Matrix  $\mathbf{P}_{r,s}(t|\hat{\mu})$  läßt sich damit in der Form darstellen

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{r,s}(t|\hat{\mu}) &= \mathbf{J}(t|\hat{\mu}) - \mathbf{g}(t|\hat{\mu}) \mathbf{j}^T(t|\hat{\mu}), \\ \mathbf{g}(t|\hat{\mu}) &:= \mathbf{g}\{\varphi^0[t, \mathbf{q}(t|\hat{\mu})], \boldsymbol{\varphi}[t, \mathbf{q}(t|\hat{\mu})]\}. \end{aligned} \quad (6.96)$$

$\mathbf{J}(t|\hat{\mu})$  ist die Funktionalmatrix für die Transformation der Lösung (6.89) in die Lösung (6.91), während die Matrix  $(-\mathbf{g} \mathbf{j}^T)$  den Wechsel der Vergleichsvariablen in dem zugeordneten Störungsproblem berücksichtigt.

*Anmerkung:* Eine weitere Darstellung der Matrix  $\mathbf{P}_{r,s}(t|\hat{\mu})$  ergibt sich, wenn man  $\mathbf{J}(t|\hat{\mu})$  und  $\mathbf{j}(t|\hat{\mu})$  durch Ableitungen nach dem Vektor  $\mathbf{x}$  ausdrückt,

$$\mathbf{J}(t|\hat{\mu}) =: \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}}(t|\hat{\mu}), \quad \mathbf{j}(t|\hat{\mu}) =: \frac{\partial \varphi^0}{\partial \mathbf{x}}(t|\hat{\mu}),$$

und als Symbol für die dyadische Multiplikation zweier Vektoren das Zeichen  $\circ$  einführt:

$$\mathbf{P}_{r,s}(t|\hat{\mu}) = \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{g} \circ \frac{\partial \varphi^0}{\partial \mathbf{x}} \right) (t|\hat{\mu}).$$

Die Vektorschreibweise von Matrizen erfreut sich in der theoretischen Physik großer Beliebtheit, soll jedoch im folgenden nicht weiter benutzt werden.

Hängt die neue *unabhängige* Veränderliche  $s = \varphi^0(t, \mathbf{x})$  von keiner der alten *abhängigen* Variablen explizit ab, so ist  $\mathbf{j}(t|\hat{\mu}) \equiv 0$ . Es tritt also kein Wechsel der Vergleichsvariablen auf. Reine „Maßstabsänderungen“ der Form  $s = \varphi^0(t)$  haben somit keinen Einfluß auf die Zuordnung der gestörten zur ungestörten Lösung.

Zur praktischen Berechnung von VT-Matrizen stellt man zweckmäßigerweise zunächst das transformierte Anfangswertproblem (6.90) auf und benutzt anschließend die Beziehung (6.84), siehe Abschnitt 6.3.4.5.

#### 6.3.4.2. Aufeinanderfolge mehrerer Vergleichsvariablen-Transformationen

Es seien drei Variablensysteme  $\Sigma_{(1)}$ ,  $\Sigma_{(2)}$ ,  $\Sigma_{(3)}$  gegeben, die mit Hilfe bekannter Transformationsformeln des Typs (6.75), (6.76) ineinander überführbar sind. Die unabhängigen Variablen dieser Systeme  $\Sigma_{(v)}$  sollen mit  $s_{(v)}$  bezeichnet werden, die Vektoren der abhängigen Variablen entsprechend mit  $\mathbf{z}_{(v)}$ :

$$\Sigma_{(v)} = \{s_{(v)}; \mathbf{z}_{(v)}\} \quad (v = 1, 2, 3).$$

Stellt man das zu integrierende Anfangswertproblem nacheinander in diesen drei Variablensystemen dar, so erhält man auch drei unterschiedliche Darstellungen für die Lösungen des Anfangswertproblems. Diese Lösungen *unterscheiden sich zwar äußerlich* infolge der unterschiedlichen Wahl der abhängigen und unabhängigen Variablen, *sind jedoch physikalisch gleichwertig*.

Diese Äquivalenz bleibt allerdings nicht erhalten, wenn man den Einfluß einer Parameteränderung auf die Lösung des ungestörten Anfangswertproblems untersucht. Das Auftreten unterschiedlicher unabhängiger Variabler  $s_{(v)}$  in den Variablensystemen  $\Sigma_{(v)}$  bewirkt nämlich, daß ungestörte und gestörte Lösung bezüglich unterschiedlicher Vergleichsvariabler verglichen werden.

Bezeichnet man den Lösungsvektor des ungestörten Anfangswertproblems in dem Variablensystem  $\Sigma_{(v)}$  mit  $\mathbf{z}_{(v)} = \mathbf{p}_{(v)}(s_{(v)}|\hat{\mu})$ , so gilt in Analogie zu (6.71) für den Störungsvektor:

$$(\delta \mathbf{z}_{(v)})^{s^{(v)}} = \mathbf{p}_{(v)}(s_{(v)}|\hat{\mu} + \delta \mu) - \mathbf{p}_{(v)}(s_{(v)}|\hat{\mu}). \quad (6.97)$$

Dem Übergang von dem Variablensystem  $\Sigma_{(i)}$  zu dem System  $\Sigma_{(j)}$  entspricht eine Vergleichsvariablen-Transformation der zugeordneten

Störungskoeffizienten-Vektoren  $\sigma_\mu^{(i)} \rightarrow \sigma_\mu^{(j)}$ , die durch die VT-Matrix  $P_{(i,j)}(t|\hat{\mu})$  beschrieben wird.

Der Übergang  $\Sigma_{(1)} \rightarrow \Sigma_{(3)}$  kann ausgeführt werden

- auf direktem Wege:  $\Sigma_{(1)} \rightarrow \Sigma_{(3)}$  oder
- unter Zwischenschaltung eines Variablensystems  $\Sigma_{(2)}$ :

$$\Sigma_{(1)} \rightarrow \Sigma_{(2)} \rightarrow \Sigma_{(3)}.$$

Die entsprechenden Vergleichsvariablen-Transformationen der zugeordneten Störungskoeffizienten-Vektoren lauten:

$$\begin{aligned} \sigma_\mu^{(3)}(t|\hat{\mu}) &= P_{(1,3)}(t|\hat{\mu}) \sigma_\mu^{(1)}(t|\hat{\mu}); \\ \sigma_\mu^{(3)}(t|\hat{\mu}) &= P_{(2,3)}(t|\hat{\mu}) \sigma_\mu^{(2)}(t|\hat{\mu}) \\ &= P_{(2,3)}(t|\hat{\mu}) [P_{(1,2)}(t|\hat{\mu}) \sigma_\mu^{(1)}(t|\hat{\mu})]. \end{aligned}$$

Gleichsetzen dieser beiden Beziehungen für  $\sigma_\mu^{(3)}$  liefert

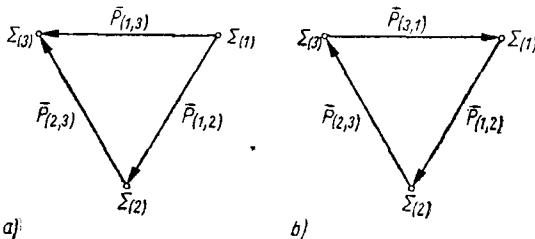
$$\begin{aligned} P_{(1,3)}(t|\hat{\mu}) \sigma_\mu^{(1)}(t|\hat{\mu}) &= P_{(2,3)}(t|\hat{\mu}) [P_{(1,2)}(t|\hat{\mu}) \sigma_\mu^{(1)}(t|\hat{\mu})], \\ [P_{(1,3)}(t|\hat{\mu}) - P_{(2,3)}(t|\hat{\mu}) P_{(1,2)}(t|\hat{\mu})] \sigma_\mu^{(1)}(t|\hat{\mu}) &= 0. \end{aligned} \quad (6.98)$$

Hängt die Lösung des Anfangswertproblems, wie vorausgesetzt worden ist, explizit von dem Parameter  $\mu$  ab, dann ist der Störungskoeffizienten-Vektor  $\sigma_\mu^{(1)}(t|\hat{\mu})$  nicht identisch Null. Da andererseits die *Variablensysteme*  $\Sigma_{(2)}$ ,  $\Sigma_{(3)}$  *beliebig wählbar* sind und (6.98) unabhängig von der speziellen Gestalt der zugrunde liegenden Variablensysteme gilt, muß der Ausdruck in eckigen Klammern eine Nullmatrix sein:

$$P_{(1,3)}(t|\hat{\mu}) - P_{(2,3)}(t|\hat{\mu}) P_{(1,2)}(t|\hat{\mu}) \equiv 0, \quad t \in [t_0, t_e].$$

Für das Hintereinanderschalten von Vergleichsvariablen-Transformationen gilt somit die wichtige Beziehung

$$P_{(1,3)}(t|\hat{\mu}) = P_{(2,3)}(t|\hat{\mu}) P_{(1,2)}(t|\hat{\mu}). \quad (6.99)$$



**Bild 6.4**  
Hintereinanderschalten von Vergleichsvariablen-Transformationen (schematische Darstellung)

*Vergleichsvariablen-Transformationen werden hintereinandergeschaltet, indem man die zugehörigen VT-Matrizen (in der Reihenfolge der Transformationen) von links miteinander multipliziert (siehe die schematische Darstellung Bild 6.4a).*

### 6.3.4.3. Inverse Vergleichsvariablen-Transformationen

Ist das Variablensystem  $\Sigma_{(3)}$  mit dem Variablensystem  $\Sigma_{(1)}$  identisch ( $\Sigma_{(3)} \equiv \Sigma_{(1)}$ ), so spezialisiert sich die in Abschnitt 6.3.4.2. zugrunde gelegte Transformation  $\Sigma_{(1)} \rightarrow \Sigma_{(2)} \rightarrow \Sigma_{(3)}$  zu einer Transformation von dem System  $\Sigma_{(1)}$  auf das System  $\Sigma_{(2)}$ , an die sich die Rücktransformation von  $\Sigma_{(2)} \rightarrow \Sigma_{(1)}$  anschließt.

Die Beziehung (6.99) geht mit  $\Sigma_{(3)} \equiv \Sigma_{(1)}$  über in

$$\mathbf{P}_{(1,1)}(t|\hat{\mu}) = \mathbf{P}_{(2,1)}(t|\hat{\mu}) \mathbf{P}_{(1,2)}(t|\hat{\mu}). \quad (6.100)$$

Die Matrix auf der linken Seite vermittelt eine Vergleichsvariablen-Transformation von dem System  $\Sigma_{(1)}$  auf das System  $\Sigma_{(1)}$ , sie muß deshalb gleich der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}_n$  sein (identische Transformation):

$$\mathbf{P}_{(1,1)}(t|\hat{\mu}) \equiv \mathbf{I}_n. \quad (6.101)$$

(6.100) geht damit über in

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{P}_{(2,1)}(t|\hat{\mu}) \mathbf{P}_{(1,2)}(t|\hat{\mu}).$$

Multiplikation dieser Gleichung von rechts mit  $[\mathbf{P}_{(1,2)}(t|\hat{\mu})]^{-1}$  ergibt die wichtige Relation<sup>1)</sup>:

$$[\mathbf{P}_{(1,2)}(t|\hat{\mu})]^{-1} = \mathbf{P}_{(2,1)}(t|\hat{\mu}). \quad (6.102)$$

Die Matrizen  $\mathbf{P}_{(1,2)}(t|\hat{\mu})$  und  $\mathbf{P}_{(2,1)}(t|\hat{\mu})$  unterscheiden sich formal dadurch, daß in ihren Elementen die Symbole  $s_{(1)}^t, g_{(1)}^j, \varphi_{(1)}^k$  durch die Symbole  $s_{(2)}^t, g_{(2)}^j, \varphi_{(2)}^k$  ersetzt sind.

Hieraus folgt ein einfaches und praktisch viel benutztes Verfahren zur Berechnung inverser VT-Matrizen: Die zur VT-Matrix  $\mathbf{P}_{(1,2)}(t|\hat{\mu})$  inverse Matrix  $[\mathbf{P}_{(1,2)}(t|\hat{\mu})]^{-1}$  ergibt sich dadurch, daß man die VT-Matrix für die Transformation  $\Sigma_{(2)} \rightarrow \Sigma_{(1)}$  aufstellt. Bei Anfangswertproblemen für ein umfangreiches System von Differentialgleichungen ist der

<sup>1)</sup> Es wird vorausgesetzt, daß  $[\mathbf{P}_{(1,2)}(t|\hat{\mu})]^{-1}$  für alle  $t$  des in Frage kommenden Bereichs existiert. Eine notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist bekanntlich  $\det \mathbf{P}_{(1,2)}(t|\hat{\mu}) \neq 0$  für  $t \in [t_0, t_e]$ .

Rechenaufwand zur *Aufstellung* der zugeordneten VT-Matrix in der Regel erheblich geringer als der Zeitbedarf für die *Invertierung*. Die Beziehungen (6.101) und (6.102) lassen sich verallgemeinern zu

$$P_{(i,i)}(t|\hat{\mu}) = P_{(j,j)}(t|\hat{\mu}) = I_n, \quad (6.103)$$

$$[P_{(i,j)}(t|\hat{\mu})]^{-1} = P_{(j,i)}(t|\hat{\mu}). \quad (6.104)$$

Multipliziert man (6.99) von links mit  $P_{(3,1)}(t|\hat{\mu})$ , so erhält man unter Beachtung der Eigenschaft (6.104):

$$P_{(3,1)}(t|\hat{\mu}) P_{(2,3)}(t|\hat{\mu}) P_{(1,2)}(t|\hat{\mu}) = I_n. \quad (6.105)$$

Bei einer zyklischen Transformation  $\Sigma_{(1)} \rightarrow \Sigma_{(2)} \rightarrow \Sigma_{(3)} \rightarrow \Sigma_{(1)}$  ist das Produkt der zugehörigen VT-Matrizen gleich der Einheitsmatrix (siehe Bild 6.4b, Seite 370).

Zwischen  $m$  Variablensystemen  $\Sigma_{(j)}$  ( $j = 1(1)m$ ) sind insgesamt  $m(m-1)$  Übergänge möglich. Infolge der Eigenschaft (6.105), die sich unmittelbar auf  $m$  Systeme übertragen läßt, braucht man jedoch nur  $(m-1)$  VT-Matrizen explizit zu berechnen. Die restlichen  $m(m-1) - (m-1) = (m-1)^2$  VT-Matrizen erhält man aus diesen Matrizen durch einfache algebraische Matrizenoperationen.

#### \*6.3.4.4. Elementare Vergleichsvariablen-Transformationen<sup>1)</sup>

Eine praktisch und theoretisch gleichermaßen wichtige Klasse von Vergleichsvariablen-Transformationen bilden die *elementaren Vergleichsvariablen-Transformationen*. Sie sind dadurch charakterisiert, daß die zugehörigen VT-Matrizen als *Elementarmatrizen* darstellbar sind.<sup>2)</sup>

Elementare Vergleichsvariablen-Transformationen liegen vor, wenn bei der Transformation des Anfangswertproblems (6.88) in das Anfangswertproblem (6.90)

- die Variablen  $(t; x^1, \dots, x^n)$  erhalten bleiben, jedoch die unabhängige Variable  $t$  mit einer der bisher abhängigen Variablen  $x^i$  den Platz tauscht, oder
- allein die unabhängige Variable  $t$  durch eine neue Variable  $s = \varphi_0(t, \mathbf{x})$  ersetzt wird, während die abhängigen Variablen  $x^i$  ( $i = 1(1)n$ ) beibehalten werden.

<sup>1)</sup> Dieser Abschnitt ist eine überarbeitete Fassung der Arbeit [38] des Verfassers.

<sup>2)</sup> Siehe Householder, A.S.: *The theory of matrices in numerical analysis*. New York/Toronto/London 1964.



a) *Eigenschaften von Elementarmatrizen*

Eine quadratische Matrix der Ordnung  $n$  heißt *elementar* (auf  $[t_0, t_e]$ ) und wird mit dem Symbol  $E_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \tau|t)$  bezeichnet, wenn sie für alle  $t \in [t_0, t_e]$  in Form

$$E_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \tau|t) \equiv I_n - \tau(t) \mathbf{u}(t) \mathbf{v}^T(t) \quad (6.106)$$

geschrieben werden kann, wobei  $I_n$  die  $n$ -reihige Einheitsmatrix,  $\tau(t)$  eine skalare Funktion von  $t$  und  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  beliebige Spaltenvektoren bedeuten:

$$\mathbf{u}(t) = [u^1(t), u^2(t), \dots, u^n(t)]^T,$$

$$\mathbf{v}(t) = [v^1(t), v^2(t), \dots, v^n(t)]^T.$$

Elementarmatrizen besitzen eine Reihe interessanter und praktisch nutzbarer Eigenschaften, die nachstehend ohne Beweis wiedergegeben werden<sup>1)</sup>:

$$\det E_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \tau|t) = 1 - \tau(t) \mathbf{u}^T(t) \mathbf{v}(t); \quad (6.107)$$

$$[E_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \tau|t)]^T = E_n(\mathbf{v}, \mathbf{u}; \tau|t); \quad (6.108)$$

$$E_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \sigma|t) E_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \tau|t) = E_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \sigma + \tau - \sigma\tau \mathbf{u}^T \mathbf{v}|t); \quad (6.109)$$

$$E_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}; 0|t) = I_n; \quad (6.110)$$

$$\text{sp } E_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \tau|t) = (n - 1) + \det E_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \tau|t). \quad (6.111)$$

Aus (6.109) ergibt sich die Folgerung:

$$E_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \sigma|t) E_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \tau|t) = I_n \quad (6.112)$$

gilt genau dann, wenn die Beziehung

$$\frac{1}{\sigma(t)} + \frac{1}{\tau(t)} = \mathbf{u}^T(t) \mathbf{v}(t) \quad (6.113)$$

für alle  $t$  erfüllt ist.

b) *Vertauschungsmatrizen*

Eine Unterklasse der elementaren Matrizen sind die sogenannten *Vertauschungsmatrizen*  $V_n(i, k)$ , die aus der Einheitsmatrix  $I_n$  durch Vertauschen der  $i$ -ten mit der  $k$ -ten Reihe entstehen.

<sup>1)</sup> Das Symbol „det“ bezeichnet die Determinante, das Symbol „sp“ die Spur einer quadratischen Matrix. Hinsichtlich der Definition dieser Begriffe siehe die Lehrbücher der Matrizenrechnung.

Für  $n = 3$  zum Beispiel können die Vertauschungsmatrizen gebildet werden:

$$I_3 = V_3(1, 1) = V_3(2, 2) = V_3(3, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$V_3(1, 2) = V_3(2, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$V_3(1, 3) = V_3(3, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V_3(2, 3) = V_3(3, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Multipliziert man einen Spaltenvektor  $\mathbf{a}$  von links mit einer Vertauschungsmatrix gleicher Ordnung, so erhält man einen Spaltenvektor, in dem die Reihenfolge der Komponenten vertauscht ist:

$$V_3(1, 2) \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 \\ a^1 \\ a^3 \end{bmatrix}.$$

Unter Benutzung des *Kronecker-Symbols*  $\delta^{\mu\nu}$  kann man einen *Kronecker-Vektor*  $\delta_n^i$  definieren:

$$\delta_n^i := [\delta^{1i}, \delta^{2i}, \dots, \delta^{ni}]^T, \quad \delta^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Der Vektor  $\delta_n^i$  hat nur eine einzige von Null verschiedene Komponente  $(\delta_n^i)^i = \delta^{ii} = 1$ . Die Vektoren  $\delta_n^i$  sind somit notwendig *Einheitsvektoren*.

Unter Verwendung der Vektoren  $\delta_n^i$  kann die Vertauschungsmatrix  $V_n(i, k)$  als Elementarmatrix geschrieben werden:

$$V_n(i, k) = E_n(\delta_n^i - \delta_n^k, \delta_n^i - \delta_n^k; 1). \quad (6.114)$$

Damit folgt

$$V_n(i, k) [a^1, \dots, a^n]^T \\ = [a^1, \dots, a^{i-1}, a^k, a^{i+1}, \dots, a^{k-1}, a^i, a^{k+1}, \dots, a^n]^T;$$

$$\det V_n(i, k) = \begin{cases} -1 & \text{für } i \neq k, \\ +1 & \text{für } i = k; \end{cases}$$

$$\text{sp } V_n(i, k) = \begin{cases} n - 2 & \text{für } i \neq k, \\ n & \text{für } i = k. \end{cases}$$

c) *Vertauschung der unabhängigen Variablen mit einer der abhängigen Variablen*

Die Transformation des Anfangswertproblems (6.88) in das Anfangswertproblem (6.90) geschehe dadurch, daß die unabhängige Variable  $t$  mit der abhängigen Variablen  $x^v$  den Platz tauscht:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{x}) &\equiv [x^1, \dots, x^{v-1}, t, x^{v+1}, \dots, x^n]^T, \\ s = \varphi^0(t, \mathbf{x}) &\equiv x^v. \end{aligned} \quad (6.115)$$

Mit (6.115) spezialisieren sich die Beziehungen für  $J(t|\hat{\mu})$ ,  $\mathbf{j}(t|\hat{\mu})$  und  $g(t|\hat{\mu})$  zu

$$[J(t|\hat{\mu})]^{ik} = \begin{cases} \delta^{ik} & \text{für } k \neq v, \\ 0 & \text{für } k = v; \end{cases}$$

$$J(t|\hat{\mu}) = I_n - \delta_n^v (\delta_n^v)^T; \quad (6.116)$$

$$\mathbf{j}(t|\hat{\mu}) = \delta_n^v; \quad [\mathbf{j}(t|\hat{\mu})]^k = \delta^{kv}; \quad (6.117)$$

$$g(t|\hat{\mu}) = \frac{f(t|\hat{\mu}) + [1 - f^v(t|\hat{\mu})] \delta_n^v}{f^v(t|\hat{\mu})}, \quad (6.118)$$

$$f(t|\hat{\mu}) := f[t, \mathbf{q}(t|\hat{\mu})].$$

Die Beziehung (6.118) läßt sich leicht beweisen. Aus (6.86) und (6.87) folgt

$$\frac{ds}{dt} = f^v(t); \quad (6.119)$$

$$\frac{dz^i}{dt} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \delta^{ij} f^j = f^i & \text{für } i \neq v, \\ 1 & \text{für } i = v. \end{cases}$$

Um die Fallunterscheidung zu vermeiden, kann man schreiben

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{f} + [1 - f^v(t|\hat{\mu})] \delta_n^v. \quad (6.120)$$

Division von (6.120) durch (6.119) liefert (6.118).

Setzt man die für  $\mathbf{J}(t|\hat{\mu})$ ,  $\mathbf{j}(t|\hat{\mu})$  und  $\mathbf{g}(t|\hat{\mu})$  abgeleiteten Ausdrücke in (6.96) ein, so erhält man die spezielle VT-Matrix

$$\begin{aligned} P_{t,x^v}(t|\hat{\mu}) &= I_n - \delta_n^v (\delta_n^v)^T - \frac{\mathbf{f}(t|\hat{\mu}) + [1 - f^v(t|\hat{\mu})] \delta_n^v}{f^v(t|\hat{\mu})} (\delta_n^v)^T, \\ &= I_n - \frac{[\mathbf{f}(t|\hat{\mu}) + \delta_n^v] (\delta_n^v)^T}{f^v(t|\hat{\mu})}. \end{aligned}$$

Unter Beachtung von (6.106) kann man hierfür schreiben

$$P_{t,x^v}(t|\hat{\mu}) = E_n(\mathbf{f} + \delta_n^v, \delta_n^v; 1/f^v|t; \hat{\mu}). \quad (6.121)$$

Da die VT-Matrix im vorliegenden Fall als Elementarmatrix darstellbar ist, können die allgemeingültigen Beziehungen (6.107) bis (6.112) angewandt werden.

Für die Determinante der VT-Matrix (6.121) erhält man

$$\det P_{t,x^v}(t|\hat{\mu}) = 1 - \frac{[\mathbf{f}(t|\hat{\mu}) + \delta_n^v]^T \delta_n^v}{f^v(t|\hat{\mu})} = - \frac{1}{f^v(t|\hat{\mu})}. \quad (6.122)$$

Zur Berechnung der zu (6.121) inversen VT-Matrix benutzt man die in Abschnitt 6.3.4.3. abgeleitete Regel (6.104):

$$[P_{t,x^v}(t|\hat{\mu})]^{-1} = P_{x^v,t}(t|\hat{\mu}) = E_n(\mathbf{g} + \delta_n^v, \delta_n^v; 1/g^v|t; \hat{\mu}). \quad (6.123)$$

Für  $\mathbf{g}(t|\hat{\mu})$  kann (6.118) eingesetzt werden. Nach einer kurzen Zwischenrechnung, die hier weggelassen ist, erhält man

$$[P_{t,x^v}(t|\hat{\mu})]^{-1} = P_{x^v,t}(t|\hat{\mu}) = E_n(\mathbf{f} + \delta_n^v, \delta_n^v; 1|t; \hat{\mu}). \quad (6.124)$$

Der Beweis, daß  $P_{t,x^v}(t|\hat{\mu}) P_{x^v,t}(t|\hat{\mu}) = I_n$  ist, ergibt sich aus (6.112), da die Bedingung (6.113) identisch erfüllt ist:

$$f^v(t|\hat{\mu}) + 1 = [f(t|\hat{\mu}) + \delta_n^v]^T \delta_n^v.$$

Für die praktische Berechnung von VT-Matrizen, die zu Vertauschungstransformationen des Typs (6.115) gehören, ordnet man die Gleichungen des Anfangswertproblems derart, daß  $v = 1$  ist, der Tausch also zwischen der unabhängigen und der ersten abhängigen Variablen erfolgt:

$$\{t; x^1, x^2, \dots, x^n\} \rightarrow \{x^1; t, x^2, \dots, x^n\}.$$

Dieser Transformation entspricht nach (6.121) die VT-Matrix

$$P_{t,x^1}(t|\hat{\mu}) = E_n(f + \delta_n^1, \delta_n^1; 1/f^1|t; \hat{\mu}) = I_n - \frac{1}{f^1} (f + \delta_n^1) (\delta_n^1)^T;$$

$$P_{t,x^1}(t|\hat{\mu}) = \begin{bmatrix} -1/f^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -f^2/f^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -f^3/f^1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -f^n/f^1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -g^2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -g^3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -g^n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.125)$$

#### d) Alleinige Transformation der unabhängigen Variablen

Wird in dem Anfangswertproblem (6.88) lediglich die unabhängige Variable transformiert,

$$s = \varphi^0(t, x), \quad z = \varphi(t, x) \equiv x,$$

so ist die zugeordnete Vergleichsvariablen-Transformation elementar. Das transformierte Anfangswertproblem (6.90) lautet

$$\frac{dx}{ds} = \frac{f(t, x)}{\dot{\varphi}_0(t, x)} =: g(t, x); \quad x(s_0) = x_0.$$

Mit den Abkürzungen

$$s(t|\hat{\mu}) := \varphi^0[t, \mathbf{q}(t|\hat{\mu})], \quad \mathbf{f}(t|\hat{\mu}) := \mathbf{f}[t, \mathbf{q}(t|\hat{\mu})]$$

und  $\mathbf{j}(t|\hat{\mu})$  aus (6.95) nimmt die VT-Matrix (6.96) im vorliegenden Fall die Gestalt an

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{t,s}(t|\hat{\mu}) &= \mathbf{I}_n - \frac{\mathbf{f}(t|\hat{\mu}) \mathbf{j}^T(t|\hat{\mu})}{\dot{s}(t|\hat{\mu})}, \\ \mathbf{P}_{t,s}(t|\hat{\mu}) &= E_n(\mathbf{f}, \mathbf{j}; \dot{s}^{-1}|t; \hat{\mu}). \end{aligned} \quad (6.126)$$

Nach (6.107) besitzt die Determinante dieser VT-Matrix den Wert

$$\begin{aligned} \det \mathbf{P}_{t,s}(t|\hat{\mu}) &= [\dot{s}(t|\hat{\mu})]^{-1} [\dot{s}(t|\hat{\mu}) - \mathbf{f}^T(t|\hat{\mu}) \mathbf{j}(t|\hat{\mu})] \\ &= [\dot{s}(t|\hat{\mu})]^{-1} \left[ \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^0}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} - \sum_{j=1}^n f^j \frac{\partial \varphi^0}{\partial x^j} \right]_{x=\mathbf{q}(t|\hat{\mu})}; \\ \det \mathbf{P}_{t,s}(t|\hat{\mu}) &= \frac{1}{\dot{s}(t|\hat{\mu})} \left[ \frac{\partial \varphi^0(t, \mathbf{x})}{\partial t} \right]_{x=\mathbf{q}(t|\hat{\mu})}. \end{aligned} \quad (6.127)$$

Die VT-Matrix wird singulär ( $\det \mathbf{P}_{t,s} \equiv 0$ ), wenn die Transformationsfunktion  $s = \varphi^0(t, \mathbf{x})$  die alte unabhängige Veränderliche  $t$  nicht explizit enthält. Die Vergleichsvariablen-Transformation ist dann nicht umkehrbar-eindeutig. Dies leuchtet ein, da in diesem Fall keine Beziehung zwischen  $s$  und  $t$  definiert ist, also auch  $t = \varphi^0(s, \mathbf{x})$  nicht existiert.

Jede (allgemeine) Vergleichsvariablen-Transformation läßt sich in *eine* (Punkt-) Transformation der abhängigen Variablen und in *eine* elementare Vergleichsvariablen-Transformation zerlegen. Die VT-Matrix der Gesamttransformation ist das Produkt der VT-Matrizen der Teiltransformationen, wobei die Multiplikation von links – in der Reihenfolge der Teiltransformationen – erfolgt.

Die Punkttransformation der abhängigen Variablen kann sowohl *vor* als auch *nach* der elementaren Vergleichsvariablen-Transformation vorgenommen werden.

Wie unmittelbar ersichtlich, läßt sich die Transformation  $S_{t,z}$ ,

$$S_{t,z}: \{t; x^1, \dots, x^n\} \rightarrow \{s; z^1, \dots, z^n\}$$

auf zwei Arten in Teilschritte der genannten Art zerlegen:

- a)  $S_1: \{t; x^1, \dots, x^n\} \rightarrow \{t; z^1, \dots, z^n\},$   
 $S_2: \{t; z^1, \dots, z^n\} \rightarrow \{s; z^1, \dots, z^n\};$
- b)  $S'_1: \{t; x^1, \dots, x^n\} \rightarrow \{s; x^1, \dots, x^n\},$   
 $S'_2: \{s; x^1, \dots, x^n\} \rightarrow \{s; z^1, \dots, z^n\}.$

Die Transformationen  $S_2$  und  $S'_1$  bestehen jeweils aus einer alleinigen Transformation der unabhängigen Variablen. Die zugehörigen Vergleichsvariablen-Transformationen sind nach (6.126) elementar.

#### 6.3.4.5. Spezielle ballistische VT-Matrizen

In diesem Abschnitt werden die allgemeinen Überlegungen der vorangegangenen Abschnitte auf die Vergleichsvariablen-Transformation von Störungen der Flugbahnelemente angewandt.

Da die Geschößbewegung in  $z$ -Richtung im Rahmen der linearen Störungstheorie nicht mit der Bewegung in der  $x, y$ -Ebene gekoppelt ist, beschränken sich die nachfolgenden Ausführungen auf die Transformation der Störungen *der* Bahnelemente, die den Bewegungsablauf in der  $x, y$ -Ebene charakterisieren. Die Erweiterung der Matrizen unter Einschluß der Bahnelemente  $z$  und  $q$  ist unschwer möglich (siehe Übungsaufgabe 6.2.).

Um eine übersichtliche Darstellung zu erzielen, sollen die in Frage kommenden Variablensysteme  $\Sigma$  (wie in Abschnitt 6.3.4.2.) durch eine Zahl gekennzeichnet werden:

$$\begin{aligned} \Sigma_{(1)} &= \{t; x, y, u, w\}; & \Sigma_{(5)} &= \{t; x, y, u, p\}; \\ \Sigma_{(2)} &= \{t; x, y, v, \vartheta\}; & \Sigma_{(6)} &= \{p; t, x, y, u\}; \\ \Sigma_{(3)} &= \{x; t, y, v, \vartheta\}; & \Sigma_{(7)} &= \{p; x, y, v, \vartheta\}; \\ \Sigma_{(4)} &= \{y; t, x, v, \vartheta\}; & \Sigma_{(8)} &= \{\vartheta; x, y, t, v\}. \end{aligned}$$

Der Transformation des Variablensystems  $\Sigma_{(i)}$  in das System  $\Sigma_{(j)}$  ist die VT-Matrix  $P_{(i,j)}^1$  zugeordnet.

<sup>1)</sup> Zur Vereinfachung der Schreibweise wird im folgenden das Argument  $(t|\hat{\mu})$  weggelassen; die Elemente von VT-Matrizen sind stets für die *ungestörte* Bahn zu berechnen.

a) Die VT-Matrix  $P_{(1,2)}$

Die Transformationsformeln für den Übergang von dem Variablensystem

$$\Sigma_{(1)} = \{s_{(1)}; z_{(1)}\},$$

$$s_{(1)} \equiv t; \quad z_{(1)} = [z_{(1)}^1, z_{(1)}^2, z_{(1)}^3, z_{(1)}^4]^T \equiv [x, y, u, w]^T$$

zu dem Variablensystem

$$\Sigma_{(2)} = \{s_{(2)}; z_{(2)}\},$$

$$s_{(2)} \equiv t; \quad z_{(2)} = [z_{(2)}^1, z_{(2)}^2, z_{(2)}^3, z_{(2)}^4]^T \equiv [x, y, v, \vartheta]^T$$

lauten explizit

$$z_{(2)} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ v \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{(1,2)}^1 \\ \varphi_{(1,2)}^2 \\ \varphi_{(1,2)}^3 \\ \varphi_{(1,2)}^4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{u^2 + w^2} \\ \text{Arctan}(w/u) \end{bmatrix}, \quad (6.128)$$

$$s = \varphi_{(1,2)}^0 \equiv t.$$

Da die unabhängige Variable erhalten bleibt, vereinfacht sich die VT-Matrix zu  $P_{(1,2)} = J_{(1,2)}$ . Mit (6.128) erhält man

$$P_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u/v & w/v \\ 0 & 0 & -w/v^2 & u/v^2 \end{bmatrix}_N$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & 0 & -v^{-1} \sin \vartheta & v^{-1} \cos \vartheta \end{bmatrix}_N; \quad (6.129)$$

$$\det P_{(1,2)} = 1/v.$$

Diese VT-Transformation ist in Bahnpunkten, in denen die Bahngeschwindigkeit  $\hat{v} > 0$  ist, eindeutig umkehrbar.



b) Die VT-Matrix  $P_{(2,3)}$

Die Transformation  $\Sigma_{(2)} \rightarrow \Sigma_{(3)}$  besteht in einer Vertauschung der unabhängigen Variablen  $t$  mit der ersten abhängigen Variablen  $x^1 \equiv x$ , so daß (6.125) anwendbar ist:

$$P_{(2,3)} = \begin{bmatrix} -g_{(3)}^1 & 0 & 0 & 0 \\ -g_{(3)}^2 & 1 & 0 & 0 \\ -g_{(3)}^3 & 0 & 1 & 0 \\ -g_{(3)}^4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_N. \quad (6.130)$$

Mit Hilfe des modifizierten  $t$ -Systems (4.22) findet man für die Funktionen  $g_{(3)}^i$  ( $i = 1(1)4$ ):

$$\begin{aligned} g_{(3)}^1 &= \frac{dt}{dx} = \frac{1}{u}; \\ g_{(3)}^2 &= \frac{dy}{dx} = p; \\ g_{(3)}^3 &= \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{E v + g \sin \vartheta}{u} \\ &= -\frac{E}{\cos \vartheta} - \frac{g p}{v}; \\ g_{(3)}^4 &= \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{g \cos \vartheta}{u v} = -\frac{g}{v^2}. \end{aligned} \quad (6.131)$$

Diese Funktionen sind jeweils für die ungestörte Lösung zu berechnen. Für die Determinante der VT-Matrix (6.130) erhält man

$$\det P_{(2,3)} = -\hat{g}_{(3)}^1 = -1/\hat{u}.$$

Schließt man den Schuß senkrecht nach oben bzw. senkrecht nach unten aus, so ist die Vergleichsvariablen-Transformation, die durch (6.130) vermittelt wird, für alle Bahnen und Flugbahnpunkte eindeutig umkehrbar.

c) Die VT-Matrix  $P_{(1,3)}$

Die Transformationsformeln für den Übergang von dem System

$$\Sigma_{(1)} = \{s_{(1)}; z_{(1)}\},$$

$$s_{(1)} \equiv t; \quad z_{(1)} = [z_{(1)}^1, z_{(1)}^2, z_{(1)}^3, z_{(1)}^4]^T \equiv [x, y, u, w]^T$$

zu dem System

$$\Sigma_{(3)} = \{s_{(3)}; z_{(3)}\},$$

$$s_{(3)} \equiv x; \quad z_{(3)} = [z_{(3)}^1, z_{(3)}^2, z_{(3)}^3, z_{(3)}^4]^T \equiv [t, y, v, \vartheta]^T$$

lauten

$$z_{(3)} = \begin{bmatrix} t \\ y \\ v \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{(1,3)}^1 \\ \varphi_{(1,3)}^2 \\ \varphi_{(1,3)}^3 \\ \varphi_{(1,3)}^4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} t \\ y \\ \sqrt{u^2 + w^2} \\ \text{Arctan}(w/u) \end{bmatrix},$$

$$x = \varphi_{(1,3)}^0 \equiv x.$$

Damit erhält man (siehe Abschnitt 6.3.4.1.):

$$J_{(1,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u/v & w/v \\ 0 & 0 & -w/v^2 & u/v^2 \end{bmatrix}_N, \quad j_{(1,3)} = [1, 0, 0, 0]^T,$$

$$g_{(3)} j_{(1,3)}^T = \begin{bmatrix} g_{(3)}^1 \\ g_{(3)}^2 \\ g_{(3)}^3 \\ g_{(3)}^4 \end{bmatrix}_N [1, 0, 0, 0]^T = \begin{bmatrix} g_{(3)}^1 & 0 & 0 & 0 \\ g_{(3)}^2 & 0 & 0 & 0 \\ g_{(3)}^3 & 0 & 0 & 0 \\ g_{(3)}^4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_N,$$

$$P_{(1,3)} = J_{(1,3)} - g_{(3)} j_{(1,3)}^T = \begin{bmatrix} -g_{(3)}^1 & 0 & 0 & 0 \\ -g_{(3)}^2 & 1 & 0 & 0 \\ -g_{(3)}^3 & 0 & u/v & w/v \\ -g_{(3)}^4 & 0 & -w/v^2 & u/v^2 \end{bmatrix}_N$$

(6.132)

Für die Determinante dieser Matrix findet man

$$\det \mathbf{P}_{(1,3)} = -\frac{1}{\hat{u} \hat{v}} = -\frac{1}{\hat{v}^2 \cos \vartheta} = \det \mathbf{P}_{(1,2)} \det \mathbf{P}_{(2,3)}.$$

Man prüft leicht nach, daß auch  $\mathbf{P}_{(1,3)} = \mathbf{P}_{(2,3)} \mathbf{P}_{(1,2)}$  erfüllt ist.

d) Die VT-Matrizen  $\mathbf{P}_{(3,4)}$  und  $\mathbf{P}_{(4,3)}$

Den Übergängen zwischen dem Variablensystem

$$\Sigma_{(3)} = \{s_{(3)}; z_{(3)}\},$$

$$s_{(3)} = x; \quad z_{(3)} = [z_{(3)}^1, z_{(3)}^2, z_{(3)}^3, z_{(3)}^4]^T \equiv [t, y, v, \vartheta]^T$$

und dem Variablensystem

$$\Sigma_{(4)} = \{s_{(4)}; z_{(4)}\},$$

$$s_{(4)} \equiv y; \quad z_{(4)} = [z_{(4)}^1, z_{(4)}^2, z_{(4)}^3, z_{(4)}^4]^T \equiv [t, x, v, \vartheta]^T$$

entsprechen elementare Vergleichsvariablen-Transformationen. Man erhält als VT-Matrizen:

$$\mathbf{P}_{(3,4)} = \begin{bmatrix} 1 & -g_{(4)}^1 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{(4)}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{(4)}^3 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{(4)}^4 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{N}}; \quad (6.133)$$

$$\mathbf{P}_{(4,3)} = \begin{bmatrix} 1 & -g_{(3)}^1 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{(3)}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{(3)}^3 & 1 & 0 \\ 0 & -g_{(3)}^4 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{N}}; \quad (6.134)$$

$$\det \mathbf{P}_{(3,4)} = -\hat{g}_{(4)}^2 = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{\mathbf{N}} = -\frac{1}{\hat{p}};$$

$$\det \mathbf{P}_{(4,3)} = -\hat{g}_{(3)}^2 = -\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mathbf{N}} = -\hat{p}.$$

Die Eindeutigkeit dieser VT-Transformation geht in Flugbahnpunkten mit horizontaler Tangente (z. B. im Gipfelpunkt) verloren.

Wie man leicht nachprüft, ist  $\mathbf{P}_{(3,4)} \mathbf{P}_{(4,3)} = \mathbf{I}_4$  erfüllt.

### 6.3.4.6. Die numerische Ausführung von Vergleichsvariablen-Transformationen

In Abschnitt 6.3.3. ist für eine spezielle Flugbahn mit den Bahnparametern

$$\hat{c}_{43} = 0,34 \text{ m}^2/\text{kg}; \quad \hat{v}_0 = 800 \text{ m/s}; \quad \hat{\vartheta}_0 = 35^\circ$$

die Fehlertransportmatrix

$$\Psi^y(t_e|\hat{\mu}), \quad \hat{\mu} = [\hat{c}_{43}, \hat{v}_0, \hat{\vartheta}_0]^T$$

berechnet worden. Um diese Matrix von der Vergleichsvariablen  $y$  auf die Vergleichsvariable  $x$  zu transformieren, ist  $\Psi^y$  von links mit der VT-Matrix  $P_{y,x}(t_e|\hat{\mu}) = P_{(4,3)}(t_e|\hat{\mu})$  zu multiplizieren:

$$\Psi^x(t_e|\hat{\mu}) = P_{(4,3)}(t_e|\hat{\mu}) \Psi^y(t_e|\hat{\mu}),$$

$$\Psi^x(t_e|\hat{\mu}) = \begin{bmatrix} T_c^x & T_v^x & T_\vartheta^x \\ Y_c^x & Y_v^x & Y_\vartheta^x \\ V_c^x & V_v^x & V_\vartheta^x \\ \theta_c^x & \theta_v^x & \theta_\vartheta^x \end{bmatrix} (t_e|\hat{\mu}).$$

Die Aufgabe besteht zunächst darin, die Elemente der VT-Matrix (6.134) im Auftreffpunkt der Normalbahn zu berechnen.

Der Tafel IX des Anhangs entnimmt man für die Flugbahnelemente im Auftreffpunkt

$$\hat{x}_e = 25549 \text{ m}; \quad \hat{t}_e = 69,96 \text{ s}; \quad \hat{v}_e = 356 \text{ m/s}; \quad \hat{\vartheta}_e = -53^\circ 16'.$$

Die Verzögerungsfunktion  $G_{43}(v_\tau)$  hat im Auftreffpunkt ( $v_\tau = \hat{v}_e$ ) den Wert (siehe Tafel II des Anhangs):

$$G_{43}(\hat{v}_e) = 0,06067 \text{ kg/m}^2 \text{ s}.$$

Die Funktionen  $\hat{g}_{\zeta \text{ b}}^i$  (6.131) betragen im Auftreffpunkt

$$\hat{g}_{(3)}^1 = \frac{1}{\hat{v}_e \cos \hat{\vartheta}_e} = \frac{1}{356 \cdot 0,5981} \frac{\text{s}}{\text{m}} = 4,697 \cdot 10^{-3} \text{ s/m};$$

$$\hat{g}_{\zeta \text{ b}}^2 = \tan \hat{\vartheta}_e = -\tan 53^\circ 16' = -1,340;$$

$$\hat{g}_{\zeta \text{ b}}^3 = -\frac{\hat{c}_{43} G_{43}(\hat{v}_e)}{\cos \hat{\vartheta}_e} + \frac{g_{0N} \tan |\hat{\vartheta}_e|}{\hat{v}_e}$$

$$= \left( -\frac{0,34 \cdot 0,06067}{0,5981} + \frac{9,807 \cdot 1,340}{356} \right) \text{s}^{-1}$$

$$= (-0,034489 + 0,036913) \text{s}^{-1} = 2,424 \cdot 10^{-3} \text{s}^{-1};$$

$$\hat{g}_{\zeta \text{ b}}^4 = -\frac{g_{0N}}{\hat{v}_e^2} = -\frac{9,80665}{356^2} \text{m}^{-1} = 7,738 \cdot 10^{-5} \text{m}^{-1}.$$

Die Matrix  $P_{(4,3)}(t_e|\hat{\mu})$  lautet damit

$$P_{(4,3)}(t_e|\hat{\mu}) = \begin{bmatrix} 1 & -4,697 \cdot 10^{-3} \text{ s/m} & 0 & 0 \\ 0 & +1,340 & 0 & 0 \\ 0 & -2,424 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & -7,738 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zur Ausführung der Matrizenmultiplikation  $\Psi^x = P_{(4,3)}\Psi^y$  ordnet man die auftretenden Matrizen zweckmäßigerweise nach dem Schema an:

$$\begin{array}{c|c} & \Psi^y \\ \hline P_{(4,3)} & \Psi^x \end{array}$$

Diese Anordnung hat den Vorteil, daß die Produkte der Zeilen von  $P_{(4,3)}$  mit den Spalten von  $\Psi^y$  in den Schnittpunkten der jeweiligen Reihen stehen:

				- 50,15	0,07058	1,6042
				- 4,370 · 10 <sup>4</sup>	43,296	259,94
				- 325,0	0,11400	1,8800
				- 17,5	- 0,02180	- 0,9506
1	- 4,697 · 10 <sup>-3</sup>	0	0	+ 155,12	- 0,1328	+ 0,3833
0	1,340	0	0	- 5,856 · 10 <sup>4</sup>	+ 58,02	+ 348,32
0	- 2,424 · 10 <sup>-3</sup>	1	0	- 219,1	+ 9,041 · 10 <sup>-3</sup>	+ 1,250
0	- 7,738 · 10 <sup>-5</sup>	0	1	- 14,12	- 0,02515	- 21,06

Die gesuchte Matrix lautet damit ausführlich

$$\Psi^x(t_e|\hat{\mu}) = \begin{bmatrix} 155,12 \text{ m}^2 \cdot \text{s/kg} & -0,1328 \text{ s}^2/\text{m} & 0,3833 \text{ s/Grd} \\ -5,856 \cdot 10^4 \text{ m}^3/\text{kg} & 58,02 \text{ s} & 348,32 \text{ m/Grd} \\ -219,1 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}) & 9,041 \cdot 10^{-3} & 1,250 \text{ m}/(\text{s} \cdot \text{Grd}) \\ -14,12 \text{ Grd} \cdot \text{kg}/\text{m}^2 & -0,02515 \text{ Grd} \cdot \text{s}/\text{m} & -21,06 \end{bmatrix}.$$

Der Einfluß der in Abschnitt 6.3.3. angegebenen Störungen der Flugbahnparameter auf die Bahnelemente im Auftreffpunkt ergibt sich aus

$$\xi^x(t_e|\hat{\mu}) = \Psi^x(t_e|\hat{\mu}) \delta\hat{\mu}; \quad \delta\hat{\mu} = [\hat{c}/100; 1 \text{ m/s}; 1/60]^\top.$$

Nach Ausführung der Multiplikation erhält man

$$\xi^x(t_e|\hat{\mu}) = \begin{bmatrix} \delta t_c^x \\ \delta y_c^x \\ \delta v_c^x \\ \delta \theta_c^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,40 \text{ s} \\ -135,3 \text{ m} \\ 0,02 \text{ m/s} \\ -15' \end{bmatrix}.$$

### 6.3.5. Störungen der Flugbahnelemente infolge von Änderungen der Bodenwerte der Normalatmosphäre

#### 6.3.5.1. Vorbemerkungen

Störungen der Flugbahnelemente, die durch Abweichungen der meteorologischen Elemente am Boden von den Standardwerten der verbindlichen Normalatmosphäre verursacht werden, sind auf Grund ihrer Häufigkeit und ihrer Größe von besonderer praktischer Bedeutung.

Das Anliegen dieses Abschnitts besteht darin, zu zeigen, wie der Einfluß von Änderungen der Lufttemperatur am Boden, des Luftdrucks am Boden und der Mündungshöhe rechnerisch auf Störungen des Ballistischen Koeffizienten und der Anfangsgeschwindigkeit zurückgeführt werden kann. Diese Transformation von Änderungen der Bodenwerte der Normalatmosphäre und der Mündungshöhe auf Grundstörungen ist von erheblichem Nutzen, da der Einfluß von  $c$ - und  $v_0$ -Änderungen in einfacher Weise mit Hilfe eines ballistischen Tafelwerks für die Flugbahnelemente ermittelt werden kann (siehe das Beispiel in Abschnitt 6.3.3.).

Die im folgenden dargestellten Ableitungen benutzen an entscheidender Stelle zwei Annahmen, die von den allgemeinen Voraussetzungen des klassischen Bahnmodells (Abschnitt 4.1.1.) abweichen.

*Annahme 1:* Die Fallbeschleunigung ist längs der Flugbahn konstant nach Betrag und Richtung ( $g = g_{0N} = \text{const}$ ).

*Annahme 2:* Der Temperaturgradient der Normalatmosphäre ist in dem Höhenbereich, in dem ungestörte und gestörte Flugbahn verlaufen, konstant und gleich dem Temperaturgradienten der Normalatmosphäre in der Bodenschicht ( $A^* = A_{1N}^* = \text{const}$ ).

Wendet man die Störungsformeln auf Bahnen an, die die obere Grenze der 1. Schicht<sup>1)</sup> überschreiten, so sind die Resultate der Störungsrechnung als Näherungswerte anzusehen. Die Genauigkeit dieser Näherungswerte reicht für die Bedürfnisse der Praxis jedoch im allgemeinen aus.

Entsprechendes gilt auch für die Annahme einer konstanten Fallgeschwindigkeit bei der Ableitung der Störungsformeln.

<sup>1)</sup> Bei der Standardatmosphäre ANA z. B. sollte die Gipfelhöhe der Flugbahnen kleiner als 9300 m sein, siehe Tabelle 3.3, Seite 122.

Die unter den genannten Voraussetzungen entwickelte Theorie des Einflusses von Änderungen der Bodenwerte der Normalatmosphäre und der Mündungshöhe ist nichtlinear und deshalb für beliebig große Parameteränderungen geeignet.

Setzt man die Änderungen der meteorologischen Elemente und der Mündungshöhe als klein voraus, so dürfen die Formeln für die Bahnelemente der gestörten Bahn bezüglich der Parameteränderungen linearisiert werden. Man erhält auf diesem Wege Beziehungen, die die Störungskoeffizienten für Änderungen der Bodenwerte der Normalatmosphäre und der Mündungshöhe durch Störungskoeffizienten für die Grundstörungen und die Flugbahnelemente der ungestörten Bahn ausdrücken. Diese Beziehungen sind linear in den Störungskoeffizienten; sie können durch Multiplikation mit der entsprechenden VT-Matrix leicht auf andere Vergleichsvariable und Variablensysteme transformiert werden.

### 6.3.5.2. Die Parameterabhängigkeit der Bahnelemente

Die Flugbahnelemente der Bewegungsgleichungen des klassischen Bahnmodells hängen im allgemeinen von den drei Parametern  $c$ ,  $v_0$  und  $\vartheta_0$  ab. Unter speziellen Voraussetzungen über die Struktur der Atmosphäre und die Form des Luftwiderstandsgesetzes gelingt es in einigen Fällen durch Variablentransformation, die Anzahl der Flugbahnparameter zu reduzieren.

Als Beispiele für derartige Transformationen können die Umformungen der Bewegungsgleichungen beim quadratischen Widerstandsansatz (Abschnitt 5.3.2.2.) und beim Verfahren von *Siacci* (Abschnitt 5.4.3.) dienen.

Für die Flugbahnberechnung seien ein Standard-Luftwiderstandsgesetz und ein linearer Verlauf der Temperatur mit der Höhe ( $A^* = A_{1N}^* = \text{const}$ ;  $g = g_{0N} = \text{const}$ ) vorgegeben. Der Abgangspunkt sei durch die Flugbahnelemente ( $t_0; x_0, y_0, v_0, \vartheta_0$ ) charakterisiert<sup>1)</sup>; der Luftdruck und die Lufttemperatur am Boden mögen  $p_0 \neq p_{0N}$  bzw.  $\tau_0 \neq \tau_{0N}$  betragen.

Wie im folgenden gezeigt wird, läßt sich das Anfangswertproblem für die Flugbahn im  $\vartheta$ -System  $\{\vartheta; x, y, t, v\}$ , das die Parameter  $(c, v_0, \vartheta_0$ ,

<sup>1)</sup> Die beim klassischen Bahnmodell getroffene Festsetzung  $x_0 = y_0 = 0, t_0 = 0$  wird im folgenden zunächst fallengelassen.

$p_0, \tau_0, x_0, y_0, t_0$ ) enthält, auf ein Anfangswertproblem in einem  $\{\vartheta; x^*, y^*, t^*, v^*\}$ -System zurückführen, in dem nur noch die Parameter  $c^*, v_0^*, \vartheta_0$  auftreten. Die Parameter der Normalatmosphäre werden im Rahmen dieser Betrachtungen als (universelle) Konstanten behandelt. Die ersten drei Gleichungen im  $\{\vartheta|x, y, t, v\}$ -System können von dem  $\vartheta$ -System (4.28) übernommen werden; die vierte Gleichung folgt aus der dritten und vierten Gleichung des modifizierten  $t$ -Systems (4.22):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\vartheta} &= -\frac{v^2}{g_{0N}}, & x(\vartheta_0) &= x_0; \\ \frac{dy}{d\vartheta} &= -\frac{v^2}{g_{0N}} \tan \vartheta, & y(\vartheta_0) &= y_0; \\ \frac{dt}{d\vartheta} &= -\frac{v}{g_{0N} \cos \vartheta}, & t(\vartheta_0) &= t_0; \\ \frac{dv}{d\vartheta} &= \frac{b'v}{g_{0N} \cos \vartheta} + v \tan \vartheta; & v(\vartheta_0) &= v_0. \end{aligned} \tag{6.135}$$

In (6.135) werden an Stelle der abhängigen Variablen  $(x, y, t, v)$  die neuen Variablen  $(x^*, y^*, t^*, v^*)$  eingeführt, die definiert sind durch

$$\begin{aligned} x^* &:= (x - x_0) \frac{\tau_{0N}}{\tau_0}; & y^* &:= (y - y_0) \frac{\tau_{0N}}{\tau_0}; \\ t^* &:= (t - t_0) \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_0}}; & v^* &:= v \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_0}}. \end{aligned} \tag{6.136}$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{dx^*}{d\vartheta} &= -\frac{v^{*2}}{g_{0N}}, & x^*(\vartheta_0) &= 0; \\ \frac{dy^*}{d\vartheta} &= -\frac{v^{*2}}{g_{0N}} \tan \vartheta; & y^*(\vartheta_0) &= 0; \\ \frac{dt^*}{d\vartheta} &= -\frac{v^*}{g_{0N} \cos \vartheta}, & t^*(\vartheta_0) &= 0; \\ \frac{dv^*}{d\vartheta} &= \frac{b'v^*}{g_{0N} \cos \vartheta} + v^* \tan \vartheta; & v^*(\vartheta_0) &= v_0^*. \end{aligned} \tag{6.137}$$



Luftdruck und Lufttemperatur besitzen nach Voraussetzung am Boden die Werte  $p_0$  bzw.  $\tau_0$ . Für die Verzögerung durch den Luftwiderstand  $b'$  ist deshalb im vorliegenden Fall – abweichend von (3.75) bis (3.79) – anzusetzen

$$b' = C_0^* H^*(y) \Phi^*(M) = \frac{\alpha_{LN} p_0 F}{2 m} \frac{p}{p_0} \Phi^*(M). \quad (6.138)$$

Ein Vergleich mit (3.76) ergibt

$$C_0^* = C_0 \frac{p_0}{p_{0N}}. \quad (6.139)$$

Für die Höhenfunktion  $H^*(y)$  entnimmt man aus (3.25):

$$H^*(y) = \frac{p(y)}{p_0} = \left[ \frac{\tau(y)}{\tau_0} \right]^{\sigma_1}, \quad \sigma_1 = - \frac{g_{0N}}{R_{LN} A_{1N}^*}. \quad (6.140)$$

Das Temperaturverhältnis  $\tau(y)/\tau_0$  kann in der Form dargestellt werden

$$\frac{\tau(y)}{\tau_0} = \frac{\tau_0 + A_{1N}^* (y - y_0)}{\tau_0} = 1 + \frac{A_{1N}^*}{\tau_{0N}} y^*. \quad (6.141)$$

Für die *Mach*-Zahl kann man schreiben

$$M = \frac{v}{a} = \frac{v^*}{a_{0N}} \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau(y)}}. \quad (6.142)$$

Einsetzen von (6.139) bis (6.142) in (6.138) zeigt, daß die Verzögerung durch den Luftwiderstand  $b'$  als Funktion der Variablen  $y^*$ ,  $v^*$  sowie des modifizierten Ballistischen Koeffizienten  $C_0^*$  darstellbar ist:

$$b' = b'(C_0^*, y^*, v^*), \quad C_0^* = C_0 \frac{p_0}{p_{0N}}. \quad (6.143)$$

Beim klassischen Ansatz für die Verzögerung durch den Luftwiderstand  $b'$  (3.86) erhält man entsprechend<sup>1)</sup>:

$$b' = b'(c^*, y^*, v^*), \quad c^* = c \frac{p_0}{p_{0N}}. \quad (6.144)$$

<sup>1)</sup> Siehe Übungsaufgabe 6.3.

Die Lösung des Anfangswertproblems (6.137) hängt somit von der Variablen  $\vartheta$  und den Parametern  $c^*$ ,  $v_0^*$ ,  $\vartheta_0$  ab, so daß man symbolisch schreiben kann

$$\begin{aligned}x^* &= f^1(\vartheta | c^*, v_0^*, \vartheta_0), & y^* &= f^2(\vartheta | c^*, v_0^*, \vartheta_0), \\t^* &= f^3(\vartheta | c^*, v_0^*, \vartheta_0), & v^* &= f^4(\vartheta | c^*, v_0^*, \vartheta_0).\end{aligned}\tag{6.145}$$

Welche der fünf Variablen  $\{\vartheta; x^*, y^*, t^*, v^*\}$  als unabhängige Variable gewählt wird, ist im Prinzip beliebig. So ist neben (6.145) auch die Darstellung möglich

$$\begin{aligned}x^* &= g^1(t^* | c^*, v_0^*, \vartheta_0), & y^* &= g^2(t^* | c^*, v_0^*, \vartheta_0), \\ \vartheta &= g^3(t^* | c^*, v_0^*, \vartheta_0), & v^* &= g^4(t^* | c^*, v_0^*, \vartheta_0).\end{aligned}\tag{6.146}$$

Rücktransformation der Lösung (6.145) auf das Variablensystem  $\{\vartheta | x, y, t, v\}$  liefert

$$x = x_0 + \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} f^1(\vartheta | c^*, v_0^*, \vartheta_0); \tag{6.147}$$

$$y = y_0 + \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} f^2(\vartheta | c^*, v_0^*, \vartheta_0), \tag{6.148}$$

$$t = t_0 + \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{0N}}} f^3(\vartheta | c^*, v_0^*, \vartheta_0), \tag{6.149}$$

$$v = \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{0N}}} f^4(\vartheta | c^*, v_0^*, \vartheta_0). \tag{6.150}$$

Diese Beziehungen werden dazu benutzt, die Bahnelemente der gestörten Bahn (Parameter:  $c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; t_0, x_0, y_0$ ) mit den Bahnelementen einer Normalbahn zu vergleichen, die die Parameter ( $c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; t_{0N}, x_{0N}, y_{0N}$ ) besitzt.

Der Vergleichsnormalbahn kommt keine anschauliche physikalische Bedeutung zu; ihre Bahnelemente dienen ausschließlich als Hilfsgrößen zur Berechnung der Bahnelemente der gestörten Bahn.

Die ungestörte Ausgangsbahn, deren Änderung zu ermitteln ist, wird durch die Parameter ( $c, v_0, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; t_{0N}, x_{0N}, y_{0N}$ ) definiert.

Schreibt man (6.147) für die gestörte Bahn und die Hilfsbahn auf, so erhält man

$$x(\vartheta|c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; t_0, x_0, y_0) = x_0 + \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} f^1(\vartheta|c^*, v_0^*, \vartheta_0);$$

$$x(\vartheta|c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; t_{0N}, x_{0N}, y_{0N}) = x_{0N} + f^1(\vartheta|c^*, v_0^*, \vartheta_0).$$

Elimination von  $f^1$  ergibt

$$x(\vartheta|c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; t_0, x_0, y_0) \tag{6.151}$$

$$= x_0 + \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} [x(\vartheta|c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; t_{0N}, x_{0N}, y_{0N}) - x_{0N}].$$

Für die Bahnelemente  $y$ ,  $t$ ,  $v$  folgen entsprechende Ausdrücke aus (6.148) bis (6.150):

$$y(\vartheta|c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; t_0, x_0, y_0) \tag{6.152}$$

$$= y_0 + \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} [y(\vartheta|c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; t_{0N}, x_{0N}, y_{0N}) - y_{0N}];$$

$$t(\vartheta|c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; t_0, x_0, y_0) \tag{6.153}$$

$$= t_0 + \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{0N}}} [t(\vartheta|c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; t_{0N}, x_{0N}, y_{0N}) - t_{0N}];$$

$$v(\vartheta|c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; t_0, x_0, y_0) \tag{6.154}$$

$$= \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{0N}}} v(\vartheta|c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; t_{0N}, x_{0N}, y_{0N});$$

$$c^* = c \frac{p_0}{p_{0N}}, \quad v_0^* = v_0 \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_0}}.$$

Da die Variablen  $t$  und  $x$  auf den rechten Seiten der Bewegungsdifferentialgleichungen nicht explizit auftreten, ist die Wahl von  $t_0$ ,  $x_0$  ohne Einfluß auf den Verlauf der Flugbahnelemente. Man kann deshalb im folgenden ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit der Formeln

$t_0 = t_{0N} = 0$ ,  $x_0 = x_{0N}$  setzen. Ferner wird berücksichtigt, daß bei einer Normalbahn  $y_{0N} = 0$  gilt (siehe Abschnitt 4.1.1.). Die Beziehungen (6.151) bis (6.154) können damit vereinfacht werden zu

$$x(\vartheta|c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; y_0) = \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} x(\vartheta|c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0); \quad (6.155)$$

$$y(\vartheta|c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; y_0) = y_0 + \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} y(\vartheta|c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0); \quad (6.156)$$

$$i(\vartheta|c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0, y_0) = \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{0N}}} i(\vartheta|c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0); \quad (6.157)$$

$$v(\vartheta|c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0, y_0) = \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{0N}}} v(\vartheta|c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0). \quad (6.158)$$

Diese Formeln vergleichen die Bahnelemente von gestörter und ungestörter Flugbahn in Punkten, die die gleiche Bahnneigung  $\vartheta$  haben.

### 6.3.5.3. Die Berechnung der gestörten Flugbahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt

Um die gestörten *Bahnelemente im Gipfelpunkt* zu erhalten, hat man in (6.155) bis (6.158) lediglich  $\vartheta = \vartheta_g = 0$  zu setzen.

Die Bahnelemente im Flugbahngipfel für die Hilfsnormalbahn mit den Parametern  $(c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0)$  können einem Tafelwerk des Typs [6] entnommen werden.

Die *Flugbahnelemente im Auftreffpunkt* der gestörten Bahn in der Mündungsebene folgen aus (6.155) bis (6.158) für  $y_e = y_0$ .

Mit  $y(\vartheta|c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; y_0) = y_0$  geht (6.156) in eine Bedingungsgleichung für  $\vartheta_e$  über:

$$y(\vartheta_e|c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0) = 0.$$

Diese Gleichung habe die Lösung

$$\vartheta_e = \psi(c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0). \quad (6.159)$$

Setzt man diesen Ausdruck für  $\vartheta_e$  in (6.155) ein, so erhält man für die Horizontalschußweite  $x_e$  der gestörten Bahn

$$\begin{aligned} x_e(c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; y_0) \\ &= \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} x[\psi(c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0) | c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0] \\ &=: \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} x_e(c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0). \end{aligned}$$

Der vollständige Formelsatz für die Bahnelemente im Auftreffpunkt lautet:

$$x_e(c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; y_0) = \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} x_e(c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0); \quad (6.160)$$

$$t_e(c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; y_0) = \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{0N}}} t_e(c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0); \quad (6.161)$$

$$v_e(c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; y_0) = \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{0N}}} v_e(c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0); \quad (6.162)$$

$$\vartheta_e(c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; y_0) = \vartheta_e(c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0). \quad (6.163)$$

Mit den Abkürzungen  $\Delta_p := \Delta p_0/p_{0N}$ ;  $\Delta_\tau := \Delta \tau_0/\tau_{0N}$  kann man für  $c^*$  und  $v_0^*$  schreiben

$$c^* = c(1 + \Delta_p); \quad v_0^* = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \Delta_\tau}} \approx v_0 \left(1 - \frac{1}{2} \Delta_\tau\right).$$

Kennzeichnet man die Bahnelemente der ungestörten Bahn (Parameter:  $c, v_0, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0$ ) mit dem Symbol „ $\wedge$ “ und die Bahnelemente der Hilfsnormalbahn (Parameter:  $c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0$ ) mit dem Symbol „\*“, dann erhält man für die Störungen der Bahnelemente im Gipfel

und Auftreffpunkt

$$\left(\frac{\Delta x_e}{\hat{x}_e}\right)^y = (1 + \Delta\tau) \frac{x_e^*}{\hat{x}_e} - 1;$$

$$\left(\frac{\Delta t_e}{\hat{t}_e}\right)^y = \left(1 + \frac{1}{2} \Delta\tau\right) \frac{t_e^*}{\hat{t}_e} - 1;$$

$$\left(\frac{\Delta v_e}{\hat{v}_e}\right)^y = \left(1 + \frac{1}{2} \Delta\tau\right) \frac{v_e^*}{\hat{v}_e} - 1;$$

$$\left(\frac{\Delta y_g}{\hat{y}_g}\right)^\vartheta = (1 + \Delta\tau) \frac{y_g^*}{\hat{y}_g} - 1;$$

$$(\Delta\vartheta_e)^y = \vartheta_e^* - \vartheta_e.$$

Die hochgestellten Indizes  $y$  und  $\vartheta$  bezeichnen die Vergleichsvariable, bezüglich der die Punkte von gestörter und ungestörter Bahn zugeordnet werden.

Aus den abgeleiteten Formeln ist ersichtlich, daß sich die Störungseinflüsse für Druck- und Temperaturänderungen nicht additiv, sondern in komplizierterer Weise überlagern (siehe auch das Zahlenbeispiel in Abschnitt 6.3.5.8.).

#### 6.3.5.4. Der Einfluß einer Änderung der Mündungshöhe auf die Flugbahnelemente

Die vertikale Struktur der Atmosphäre entspreche der Normalatmosphäre. Dann läßt sich der Einfluß einer Änderung der Mündungshöhe in einfacher Weise auf eine Änderung des Luftdrucks und der Lufttemperatur am Boden zurückführen.

Liegt der Mündungshorizont in der Höhe  $\eta$  über dem Bezugsniveau der Normalatmosphäre  $y \equiv y_{0N}$ , so herrschen im Abgangspunkt mit den Koordinaten  $(x_0, y_0) = (x_0, y_{0N} + \eta)$  die Lufttemperatur  $\tau'_0$  und der Luftdruck  $p'_0$ :

$$\tau'_0 = \tau(y_{0N} + \eta); \quad p'_0 = p(y_{0N} + \eta).$$

Mit (3.22) und (3.25) folgt hieraus ( $y_{0N} = 0$ ):

$$\begin{aligned} \tau'_0 &= \tau_{0N} + A_{1N}^* \eta = \tau_{0N} \left( 1 + \frac{A_{1N}^*}{\tau_{0N}} \eta \right), \\ \tau'_0 &= \tau_{0N} (1 + A \eta); \quad A := A_{1N}^* / \tau_{0N}. \end{aligned} \quad (6.164)$$

$$\begin{aligned} \frac{p'_0}{p_{0N}} &= \left( \frac{\tau'_0}{\tau_{0N}} \right)^{\sigma_1} = (1 + A \eta)^{\sigma_1}; \\ p'_0 &\approx p_{0N} (1 + A \sigma_1 \eta). \end{aligned} \quad (6.165)$$

Damit sind die im vorangegangenen Abschnitt abgeleiteten Beziehungen (6.160) bis (6.163) anwendbar.

Die Gipfelhöhe  $y_g$  der gestörten Bahn ergibt sich aus (6.156) zu

$$\begin{aligned} &c, v_0, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; y_0) \\ &= y_0 + \frac{\tau'_0}{\tau_{0N}} y_g(c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; y_{0N}). \end{aligned}$$

Hierbei ist angenommen, daß am Boden (für  $y = 0$ ) gilt:  $\tau_0 = \tau_{0N}$ ,  $p_0 = p_{0N}$ .

Die vorstehende Beziehung lautet ausführlich

$$\begin{aligned} &y_g(c, v_0, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; y_0) \\ &= \eta + (1 + A \eta) y_g(c^*, v_0^*, \vartheta_0; p_{0N}, \tau_{0N}; 0); \\ &c^* \approx c (1 + A \sigma_1 \eta); \quad v_0^* \approx v_0 (1 - \frac{1}{2} A \eta). \end{aligned} \quad (6.166)$$

Der erste Summand in der Gleichung für  $y_g$  gibt den geometrischen Höhenfehler an, der zweite Summand den ballistischen Einfluß der Änderung der Mündungshöhe auf den vertikalen Abstand des Gipfelpunkts von dem Mündungshorizont.

### 6.3.5.5. Die Störungskoeffizienten für Änderungen des Luftdrucks am Boden

Sind die Änderungen des Luftdrucks und der Lufttemperatur am Boden klein, so können die nichtlinearen Beziehungen für die Bahnelemente der gestörten Flugbahn bezüglich der Parameteränderungen linearisiert werden. Dabei zeigt sich, daß die Störungskoeffizienten für  $p_0$ - und  $\tau_0$ -Änderungen durch die Störungskoeffizienten für  $v_0$ - und  $c$ -Änderungen

sowie die Elemente der ungestörten Bahn ausgedrückt werden können. Diese Beziehungen sind hinsichtlich der Störungskoeffizienten *linear*. Die Störungskoeffizienten für Änderungen des Luftdrucks am Boden erhält man am einfachsten dadurch, daß man (6.155) bis (6.158) partiell nach  $p_0$  ableitet und anschließend  $p_0 = p_{0N}$  setzt. Ferner sei

$$x_0 = x_{0N} = y_0 = y_{0N} = 0, \quad t_0 = t_{0N} = 0, \quad \tau_0 = \tau_{0N}.$$

Hält man bei der Differentiation die Variable  $\vartheta$  konstant ( $\vartheta = \text{const}$ ), so übernimmt diese Variable die Rolle der Vergleichsvariablen.

Ableitung von (6.155) nach  $p_0$  ergibt, bezogen auf die ungestörte Normalbahn:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p_0}\right)_N^\vartheta = \left(\frac{\partial x}{\partial c^*}\right)_N^\vartheta \left(\frac{\partial c^*}{\partial p_0}\right)_N = \frac{\hat{c}}{p_{0N}} \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)_N^\vartheta. \quad (6.167)$$

Mit den Störungskoeffizienten

$$X_p^\vartheta(\vartheta|\boldsymbol{\mu}) := \left(\frac{\partial x}{\partial p_0}\right)_N^\vartheta; \quad X_c^\vartheta(\vartheta|\boldsymbol{\mu}) := \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)_N^\vartheta$$

kann man (6.167) schreiben

$$X_p^\vartheta(\vartheta|\boldsymbol{\mu}) = \frac{\hat{c}}{p_{0N}} X_c^\vartheta(\vartheta|\boldsymbol{\mu}). \quad (6.168)$$

Entsprechend erhält man für die Störungskoeffizienten der anderen Bahnelemente

$$\begin{aligned} Y_p^\vartheta(\vartheta|\boldsymbol{\mu}) &:= \frac{\hat{c}}{p_{0N}} Y_c^\vartheta(\vartheta|\boldsymbol{\mu}); \\ T_p^\vartheta(\vartheta|\boldsymbol{\mu}) &:= \frac{\hat{c}}{p_{0N}} T_c^\vartheta(\vartheta|\boldsymbol{\mu}); \\ V_p^\vartheta(\vartheta|\boldsymbol{\mu}) &:= \frac{\hat{c}}{p_{0N}} V_c^\vartheta(\vartheta|\boldsymbol{\mu}). \end{aligned} \quad (6.169)$$

Die Störungskoeffizienten für  $c$ - und  $p_0$ -Änderungen sind zueinander proportional; der Proportionalitätsfaktor  $\hat{c}/p_{0N}$  ist längs der Flugbahn konstant.

Diese Eigenschaft der Störungskoeffizienten ergibt sich auch bei Verwendung der Vergleichsvariablen  $x$ ,  $y$  bzw.  $t$ , wovon man sich unschwer überzeugt.



### 6.3.5.6. Die Störungskoeffizienten für Änderungen der Lufttemperatur am Boden

Das Vorgehen zur Ermittlung der Störungskoeffizienten für Änderungen der Lufttemperatur am Boden gleicht der Ableitung der Störungskoeffizienten für Luftdruckänderungen.

#### a) Vergleichsvariable $\vartheta$

Bei der Differentiation von (6.155) bis (6.158) ist zu beachten, daß  $\tau_0$  sowohl als Faktor wie auch in  $v_0^*$  auftritt:

$$\frac{\partial v_0^*}{\partial \tau_0} = -\frac{v_0}{2\tau_0} \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_0}} = -\frac{v_0^*}{2\tau_0};$$

$$\left(\frac{\partial v_0^*}{\partial \tau_0}\right)_N = -\frac{\hat{v}_0}{2\tau_{0N}}.$$

Die Ableitung von (6.155) nach  $\tau_0$  lautet, bezogen auf die ungestörte Normalbahn<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial \tau_0}\right)_N^\vartheta &= \frac{\hat{x}}{\tau_{0N}} + \left(\frac{\partial x}{\partial v_0^*}\right)_N^\vartheta \left(\frac{\partial v_0^*}{\partial \tau_0}\right)_N \\ &= \frac{1}{\tau_{0N}} \left[ \hat{x} - \frac{\hat{v}_0}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial v_0}\right)_N^\vartheta \right]. \end{aligned}$$

Mit Einführung der Störungskoeffizienten

$$X_r^\vartheta(\vartheta|\hat{\mu}) := \left(\frac{\partial x}{\partial \tau_0}\right)_N^\vartheta; \quad X_v^\vartheta(\vartheta|\hat{\mu}) := \left(\frac{\partial x}{\partial v_0}\right)_N^\vartheta \quad (6.170)$$

geht diese Beziehung über in

$$X_r^\vartheta(\vartheta|\hat{\mu}) = \frac{1}{\tau_{0N}} \left[ \hat{x} - \frac{\hat{v}_0}{2} X_v^\vartheta(\vartheta|\hat{\mu}) \right]. \quad (6.171)$$

<sup>1)</sup> Die Bahnelemente der ungestörten Normalbahn werden wieder durch das Symbol „ $\hat{\phantom{x}}$ “ gekennzeichnet.

Entsprechend erhält man durch Differentiation von (6.156) bis (6.158):

$$\begin{aligned}
 Y_{\tau}^{\vartheta}(\vartheta|\hat{\mu}) &= \frac{1}{\tau_{0N}} \left[ \hat{y} - \frac{\hat{v}_0}{2} Y_v^{\vartheta}(\vartheta|\hat{\mu}) \right], \\
 T_{\tau}^{\vartheta}(\vartheta|\hat{\mu}) &= \frac{1}{2 \tau_{0N}} [\hat{t} - \hat{v}_0 T_v^{\vartheta}(\vartheta|\hat{\mu})], \\
 V_{\tau}^{\vartheta}(\vartheta|\hat{\mu}) &= \frac{1}{2 \tau_{0N}} [\hat{v} - \hat{v}_0 V_v^{\vartheta}(\vartheta|\hat{\mu})].
 \end{aligned} \tag{6.172}$$

Man schreibt diesen Formelsatz meist in der Form<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned}
 \tau_{0N} X_{\tau}^{\vartheta} + \frac{1}{2} \hat{v}_0 X_v^{\vartheta} &= \hat{x}, \\
 \tau_{0N} Y_{\tau}^{\vartheta} + \frac{1}{2} \hat{v}_0 Y_v^{\vartheta} &= \hat{y}, \\
 \tau_{0N} T_{\tau}^{\vartheta} + \frac{1}{2} \hat{v}_0 T_v^{\vartheta} &= \frac{1}{2} \hat{t}, \\
 \tau_{0N} V_{\tau}^{\vartheta} + \frac{1}{2} \hat{v}_0 V_v^{\vartheta} &= \frac{1}{2} \hat{v}.
 \end{aligned} \tag{6.173}$$

#### b) Vergleichsvariable $x$

Um die Störungskoeffizienten für die Vergleichsvariable  $x$  zu ermitteln, geht man von einer Darstellung für die Bahnelemente der gestörten Bahn aus, in der die Variable  $x^*$  als unabhängige Veränderliche auftritt. Aus (6.145) leitet man ab:

$$\begin{aligned}
 \vartheta &= h^1(x^*|c^*, v_0^*, \vartheta_0), \quad y^* = h^2(x^*|c^*, v_0^*, \vartheta_0); \\
 t^* &= h^3(x^*|c^*, v_0^*, \vartheta_0), \quad v^* = h^4(x^*|c^*, v_0^*, \vartheta_0).
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Rücktransformation auf die Variablen  $y, t, v$ :

$$\begin{aligned}
 \vartheta &= h^1(x^*|c^*, v_0^*, \vartheta_0), \\
 y &= y_0 + \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} h^2(x^*|c^*, v_0^*, \vartheta_0), \\
 t &= t_0 + \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{0N}}} h^3(x^*|c^*, v_0^*, \vartheta_0), \\
 v &= \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{0N}}} h^4(x^*|c^*, v_0^*, \vartheta_0).
 \end{aligned} \tag{6.174}$$

<sup>1)</sup> Die Argumente der Störungskoeffizienten werden im folgenden weggelassen.

Schreibt man diese Beziehungen einmal für die gestörte Bahn (Parameter:  $c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0, y_0$ ) und einmal für die Hilfsnormalbahn (Parameter:  $c^*, v_0^*, \vartheta_0^*; p_{0N}, \tau_{0N}, y_{0N}$ ) auf, so können aus diesen 8 Gleichungen die 4 Funktionen  $h^i$  ( $i = 1(1)4$ ) eliminiert werden, und man erhält den zu (6.155) bis (6.158) analogen Formelsatz ( $x_0 = x_{0N} = 0, y_{0N} = 0, t_0 = t_{0N} = 0$ ):

$$\vartheta(x|c; v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; y_0) \quad (6.175)$$

$$= \vartheta(x^*|c^*, v_0^*, \vartheta_0^*; p_{0N}, \tau_{0N}; 0);$$

$$y(x|c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; y_0) \quad (6.176)$$

$$= y_0 + \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} y(x^*|c^*, v_0^*, \vartheta_0^*; p_{0N}, \tau_{0N}; 0);$$

$$t(x|c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; y_0) \quad (6.177)$$

$$= t_0 + \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{0N}}} t(x^*|c^*, v_0^*, \vartheta_0^*; p_{0N}, \tau_{0N}; 0);$$

$$v(x|c, v_0, \vartheta_0; p_0, \tau_0; y_0) \quad (6.178)$$

$$= \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{0N}}} v(x^*|c^*, v_0^*, \vartheta_0^*; p_{0N}, \tau_{0N}; 0);$$

$$x^* = \frac{\tau_{0N}}{\tau_0} x; \quad c^* = \frac{p_0}{p_{0N}} c; \quad v_0^* = \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_0}} v_0.$$

Differentiation von (6.175) liefert, bezogen auf die Normalbahn:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_0} \right)_N^x &= \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x^*} \right)_N \left( \frac{\partial x^*}{\partial \tau_0} \right)_N^x + \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial v_0^*} \right)_N \left( \frac{\partial v_0^*}{\partial \tau_0} \right)_N \\ &= \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_N \left( -\frac{\hat{x}}{\tau_{0N}} \right) + \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial v_0} \right)_N \left( -\frac{\hat{v}_0}{2\tau_{0N}} \right), \end{aligned}$$

$$\theta_{\tau}^x = \frac{1}{\tau_{0N}} \left[ -\hat{x} \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_N - \frac{\hat{v}_0}{2} \theta_v^x \right]. \quad (6.179)$$

Mit Hilfe der 1. und 4. Gleichung des modifizierten  $t$ -Systems (4.22) ergibt sich

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_N = \left(\frac{d\vartheta/dt}{dx/dt}\right)_N = -\frac{g_{0N}}{\hat{v}^2},$$

so daß (6.179) übergeht in

$$\tau_{0N}\theta_\tau^x + \frac{1}{2}\hat{v}_0\theta_v^x = g_{0N}\hat{x}/\hat{v}^2. \quad (6.180)$$

Entsprechend findet man durch Differentiation von (6.176) nach  $\tau_0$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau_0}\right)_N^x &= \frac{\hat{y}}{\tau_{0N}} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_N \frac{\hat{x}}{\tau_{0N}} - \left(\frac{\partial y}{\partial v_0}\right)_N^x \frac{\hat{v}_0}{2\tau_{0N}}, \\ Y_\tau^x &= \frac{1}{\tau_{0N}} \left( \hat{y} - \hat{x} \tan \vartheta - \frac{\hat{v}_0}{2} Y_v^x \right) \end{aligned}$$

bzw. in symmetrischer Schreibweise

$$\tau_{0N} Y_\tau^x + \frac{1}{2}\hat{v}_0 Y_v^x = \hat{y} - \hat{x} \tan \vartheta.$$

Aus (6.177) und (6.178) erhält man auf die gleiche Weise:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial t}{\partial \tau_0}\right)_N^x &= \frac{\hat{t}}{2\tau_{0N}} - \left(\frac{dt}{dx}\right)_N \frac{\hat{x}}{\tau_{0N}} - \left(\frac{\partial t}{\partial v_0}\right)_N^x \frac{\hat{v}_0}{2\tau_{0N}}, \\ T_\tau^x &= \frac{1}{\tau_{0N}} \left( \frac{\hat{t}}{2} - \frac{\hat{x}}{\hat{u}} - \frac{\hat{v}_0}{2} T_v^x \right); \\ \left(\frac{\partial v}{\partial \tau_0}\right)_N^x &= \frac{\hat{v}}{2\tau_{0N}} - \left(\frac{dv}{dx}\right)_N \frac{\hat{x}}{\tau_{0N}} - \left(\frac{\partial v}{\partial v_0}\right)_N^x \frac{\hat{v}_0}{2\tau_{0N}}, \\ V_\tau^x &= \frac{1}{\tau_{0N}} \left( \frac{\hat{v}}{2} - \frac{\hat{b}\hat{x}}{\hat{u}} - \frac{\hat{v}_0}{2} V_v^x \right); \\ \hat{b} &:= -\hat{E}\hat{v} - g_{0N} \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Die abgeleiteten Beziehungen werden meist in symmetrischer Form geschrieben:

$$\begin{aligned} \tau_{0N} \theta_\tau^x + \frac{1}{2}\hat{v}_0 \theta_v^x &= g_{0N} \hat{x}/\hat{v}^2, \\ \tau_{0N} Y_\tau^x + \frac{1}{2}\hat{v}_0 Y_v^x &= \hat{y} - \hat{x} \tan \vartheta, \\ \tau_{0N} T_\tau^x + \frac{1}{2}\hat{v}_0 T_v^x &= \frac{1}{2}\hat{t} - \frac{\hat{x}}{\hat{u}}, \\ \tau_{0N} V_\tau^x + \frac{1}{2}\hat{v}_0 V_v^x &= \frac{1}{2}\hat{v} - \frac{\hat{b}\hat{x}}{\hat{u}}. \end{aligned} \quad (6.181)$$

c) *Vergleichsvariable y*

Legt man die Vergleichsvariable  $y$  zugrunde, so findet man auf entsprechende Weise:

$$\begin{aligned} \tau_{0N} X_{\tau}^y + \frac{1}{2} \hat{v}_0 X_v^y &= \hat{x} - \hat{y} \cot \vartheta, \\ \tau_{0N} \theta_{\tau}^y + \frac{1}{2} \hat{v}_0 \theta_v^y &= g_{0N} (\hat{y}/\hat{v}^2) \cot \vartheta, \\ \tau_{0N} T_{\tau}^y + \frac{1}{2} \hat{v}_0 T_v^y &= \frac{1}{2} \hat{t} - \hat{y}/\hat{w}, \\ \tau_{0N} V_{\tau}^y + \frac{1}{2} \hat{v}_0 V_v^y &= \frac{1}{2} \hat{v} - \hat{b} \hat{y}/\hat{w}. \end{aligned} \tag{6.182}$$

In der Mündungsebene ( $\hat{y} = 0$ ) gleicht die Struktur der ersten drei Beziehungen (6.182) der Struktur der Beziehungen (6.173) für die Vergleichsvariable  $\vartheta$ . Für  $\hat{y} \neq 0$  treten jedoch Zusatzterme auf.

6.3.5.7. *Vergleichsvariablen-Transformation von linearen Beziehungen zwischen Störungskoeffizienten*

In dem vorangegangenen Abschnitt ist ein elementarer Weg zur Transformation von linearen Beziehungen zwischen Störungskoeffizienten auf andere Vergleichsvariable angegeben worden. Die Vergleichsvariablen-Transformation läßt sich jedoch wesentlich eleganter ausführen, wenn man die in Abschnitt 6.3.4. entwickelte Methodik benutzt. Hierzu ist es jedoch notwendig, die Beziehungen zwischen den Störungskoeffizienten als Matrixgleichungen zu schreiben.

Es sei  $\Psi$  die Matrix der Störungskoeffizienten, während  $\mathbf{k}$  und  $\chi$  Spaltenvektoren bedeuten. Dann sind die linearen Beziehungen zwischen den Störungskoeffizienten in der Form  $\Psi \mathbf{k} = \chi$  darstellbar.

Im Fall des Systems (6.173) (Vergleichsvariable:  $\vartheta$ ) erhält man

$$\Psi^{\vartheta} \mathbf{k} = \chi^{\vartheta}; \tag{6.183}$$

$$\Psi^{\vartheta} := \begin{bmatrix} X_{\tau}^{\vartheta} & X_v^{\vartheta} \\ Y_{\tau}^{\vartheta} & Y_v^{\vartheta} \\ T_{\tau}^{\vartheta} & T_v^{\vartheta} \\ V_{\tau}^{\vartheta} & V_v^{\vartheta} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{k} := \begin{bmatrix} k^1 \\ k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{0N} \\ \frac{1}{2} v_0 \end{bmatrix}.$$

$$\chi^{\vartheta} := \begin{bmatrix} \chi^{1,\vartheta} \\ \chi^{2,\vartheta} \\ \chi^{3,\vartheta} \\ \chi^{4,\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \frac{1}{2} \hat{t} \\ \frac{1}{2} \hat{v} \end{bmatrix}.$$

Entsprechend gilt für das System (6.181) (Vergleichsvariable  $x$ ):

$$\Psi^x k = \chi^x, \quad (6.184)$$

$$\Psi^x := \begin{bmatrix} \theta_\tau^x & \theta_v^x \\ Y_\tau^x & Y_v^x \\ T_\tau^x & T_v^x \\ V_\tau^x & V_v^x \end{bmatrix}; \quad k := \begin{bmatrix} k^1 \\ k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{\text{ON}} \\ \frac{1}{2} v_0 \end{bmatrix}.$$

$$\chi^x := \begin{bmatrix} \chi^{1,x} \\ \chi^{2,x} \\ \chi^{3,x} \\ \chi^{4,x} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} g_{\text{ON}} \hat{x}/\hat{v}^2 \\ \hat{y} - \hat{x} \tan \hat{\vartheta} \\ \frac{1}{2} \hat{t} - \hat{x}/\hat{u} \\ \frac{1}{2} \hat{v} - \hat{b} \hat{x}/\hat{u} \end{bmatrix}.$$

Um (6.183) auf die Vergleichsvariable  $x$  zu transformieren, hat man diese Gleichung von links mit der VT-Matrix  $P_{\vartheta,x}$  zu multiplizieren, die dem Übergang von dem Variablensystem  $\Sigma_\vartheta = \{\vartheta; x, y, t, v\}$  zu dem Variablensystem  $\Sigma_x = \{x; \vartheta, y, t, v\}$  zugeordnet ist:

$$P_{\vartheta,x} \Psi^\vartheta k = P_{\vartheta,x} \chi^\vartheta.$$

Ein Vergleich mit (6.184) zeigt:

$$\Psi^x = P_{\vartheta,x} \Psi^\vartheta; \quad \chi^x = P_{\vartheta,x} \chi^\vartheta. \quad (6.185)$$

Da die Transformation  $\Sigma_\vartheta \rightarrow \Sigma_x$  in einer Vertauschung der unabhängigen Variablen mit der ersten abhängigen Variablen besteht, ist die zugehörige VT-Matrix elementar (im Sinn von Abschnitt 6.3.4.4.) und (6.125) anwendbar:

$$P_{\vartheta,x} = \begin{bmatrix} -(d\vartheta/dx)_N & 0 & 0 & 0 \\ -(dy/dx)_N & 1 & 0 & 0 \\ -(dt/dx)_N & 0 & 1 & 0 \\ -(dv/dx)_N & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_{\text{ON}}/\hat{v}^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\tan \hat{\vartheta} & 1 & 0 & 0 \\ -1/\hat{u} & 0 & 1 & 0 \\ -\hat{b}/\hat{u} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Führt man die Multiplikation  $P_{\vartheta,x} \chi^\vartheta$  explizit aus, so ergibt sich  $\chi^x$ . In entsprechender Weise läßt sich der Formelsatz (6.183) aus (6.173) herleiten; siehe Übungsaufgabe 6.4.

Kennt man eine bestimmte Klasse von linearen Beziehungen zwischen den Störungskoeffizienten in einem speziellen Vergleichsvariablen-

System, so lassen sich hieraus die entsprechenden Relationen für andere Vergleichsvariable durch Matrizenmultiplikation rasch und übersichtlich herleiten.

Hinsichtlich der Herleitung der Beziehungen für die Störungskoeffizienten bei Änderungen der Mündungshöhe und deren Vergleichsvariablen-Transformation sei auf Übungsaufgabe 6.5. verwiesen.

### 6.3.5.8. Ein Zahlenbeispiel für die Berechnung des Störungseinflusses von Änderungen des Luftdrucks und der Lufttemperatur am Boden

Zu ermitteln sei der Einfluß, den die Änderungen  $\Delta p_0 = +60$  Torr und  $\Delta \tau_0 = -45$  grad auf die Horizontalschußweite  $\hat{x}_e$  der Normalbahn mit den Parametern

$$\hat{c}_{43} = 0,34 \text{ m}^2/\text{kg}; \quad \hat{v}_0 = 800 \text{ m/s}, \quad \hat{\theta}_0 = 35^\circ$$

ausüben.

Um zu erkennen, inwieweit die Störungseinflüsse getrennt überlagert werden dürfen, werden folgende Fälle untersucht:

- a) Nichtlineare Theorie: alleinige Störung des Luftdrucks am Boden;
- b) nichtlineare Theorie: alleinige Störung der Lufttemperatur am Boden;
- c) nichtlineare Theorie: gleichzeitige Störung der Lufttemperatur und des Luftdrucks am Boden;
- d) lineare Theorie: alleinige Störung des Luftdrucks am Boden;
- e) lineare Theorie: alleinige Störung der Lufttemperatur am Boden;
- f) lineare Theorie: gleichzeitige Störung der Lufttemperatur und des Luftdrucks am Boden.

Die ungestörte Bahn hat im Auftreffpunkt die Bahnelemente (siehe Abschnitt 6.3.4.6.):

$$\hat{x}_e = 25549 \text{ m}; \quad \hat{t}_e = 69,96 \text{ s}; \quad \hat{v}_e = 356 \text{ m/s}; \quad \hat{\theta}_e = -53^\circ 16';$$

( $\tau_{0N} = 288,9^\circ\text{K}$ ;  $p_{0N} = 750$  Torr).

Im folgenden werden die Konstanten benötigt

$$c^* = \hat{c} \frac{p_0}{p_{0N}} = 0,34 \cdot \frac{810}{750} \frac{\text{m}^2}{\text{kg}} = 0,3672 \text{ m}^2/\text{kg};$$

$$\frac{\tau_0}{\tau_{0N}} = \frac{243,9}{288,9} = 0,84424;$$

$$v_0^* = \hat{v}_0 \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_0}} = \frac{800}{\sqrt{0,84424}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 870,67 \text{ m/s}.$$

Fall a: Aus (6.160) folgt

$$x_e(\hat{c}, \hat{v}_0, \hat{\theta}_0; p_0, \tau_{0N}, p_{0N}) = x_e(c^*, v_0^*, \hat{\theta}_0; p_{0N}, \tau_{0N}, p_{0N}).$$

Interpolation in Tafel IXa des Anhangs ergibt:

$c \backslash v_0$	800
0,36	24719
0,3672	24447
0,38	23963

Tabelle 6.1

$$x_e^{(a)} = 24447 \text{ m};$$

$$\Delta x_e^{(a)} = x_e^{(a)} - \hat{x}_e = -1102 \text{ m}; \quad \Delta x_e^{(a)} / \hat{x}_e \cong -4,31\%.$$

Fall b: (6.160) spezialisiert sich zu

$$x_e(\hat{c}, \hat{v}_0, \hat{\vartheta}_0; p_{0N}, \tau_0, y_{0N}) = \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} x_e(\hat{c}, v_0^*, \hat{\vartheta}_0; p_{0N}, \tau_{0N}, y_{0N}).$$

Interpolation in der Tafel IXa bezüglich  $v_0$  liefert:

$c \backslash v_0$	850	870,67	900
0,34	27777	28753	30137

Tabelle 6.2

$$x_e^{(b)} = 0,84424 \cdot 28753 \text{ m} = 24274 \text{ m};$$

$$\Delta x_e^{(b)} = x_e^{(b)} - \hat{x}_e = -1275 \text{ m}; \quad \Delta x_e^{(b)} / \hat{x}_e \cong -4,99\%.$$

Fall c: Die Schußweite  $x_e^{(c)}$  ist zu errechnen aus

$$x_e(\hat{c}, \hat{v}_0, \hat{\vartheta}_0; p_0, \tau_0; y_{0N}) = \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} x_e(c^*, v_0^*, \hat{\vartheta}_0; p_{0N}, \tau_{0N}; y_{0N}).$$

Doppelte Interpolation ergibt:

$c \backslash v_0$	850	870,67	900
0,36	26805	27600	29012
0,3672		27302	
0,38	25918	26772	27985

Tabelle 6.3

$$x_e^{(c)} = 0,84424 \cdot 27302 \text{ m} = 23049 \text{ m};$$

$$\Delta x_e^{(c)} = x_e^{(c)} - \hat{x}_e = -2500 \text{ m}; \quad \Delta x_e^{(c)} / \hat{x}_e \cong -9,78\%.$$



**Fall d:** Für den Störungskoeffizienten bei Änderung des Bodenluftdrucks folgt aus (6.168):

$$X_p^y(t_e|\hat{\mu}) = \frac{\hat{c}}{p_{0N}} X_c^y(\vartheta|\hat{\mu}) = -\frac{0,34}{750} \cdot 43,70 \cdot 10^3 \text{ m/Torr}$$

$$= -19,811 \text{ m/Torr};$$

$$\Delta x_c^{(d)} = X_p^y(t_e|\hat{\mu}) \Delta p_0 = -19,811 \cdot 60 \text{ m} = -1189 \text{ m};$$

$$\Delta x_c^{(d)}/\hat{x}_e \hat{=} -4,65 \%$$

**Fall e:** Der Störungskoeffizient für Änderungen der Lufttemperatur ist (6.182) zu entnehmen:

$$X_\tau^y(t_e|\hat{\mu}) = \frac{1}{\tau_{0N}} [\hat{x}_e - \frac{1}{2} \hat{v}_0 X_v^y(t_e|\hat{\mu})].$$

Der Störungskoeffizient  $X_v^y(t_e|\hat{\mu})$  war bereits in Abschnitt 6.3.3. berechnet worden:

$$X_v^y(t_e|\hat{\mu}) = 43,296 \text{ s.}$$

Damit erhält man

$$X_\tau^y(t_e|\hat{\mu}) = \frac{1}{288,9} [25549 - 400 \cdot 43,30] \frac{\text{m}}{\text{grad}} = 28,484 \text{ m/grad};$$

$$\Delta x_c^{(e)} = X_\tau^y(t_e|\hat{\mu}) \Delta \tau_0 = -28,484 \cdot 45 \text{ m} = -1282 \text{ m};$$

$$\Delta x_c^{(e)}/\hat{x}_e \hat{=} -5,02 \%$$

**Fall f:** Die Störungseinflüsse der Fälle d und e überlagern sich additiv:

$$\Delta x_c^{(f)} = X_p^y(t_e|\hat{\mu}) \Delta p_0 + X_\tau^y(t_e|\hat{\mu}) \Delta \tau_0 = -2471 \text{ m};$$

$$\Delta x_c^{(f)}/\hat{x}_e \hat{=} -9,67 \%$$

Die folgende Tabelle stellt die *Schußweitenfehler* (in %) gegenüber.

Tabelle 6.4

Störung		(1)	(2)	(3)	(4)
		$\Delta p_0 \neq 0$ $\Delta \tau_0 = 0$	$\Delta p_0 = 0$ $\Delta \tau_0 \neq 0$	$\Delta p_0 \neq 0$ $\Delta \tau_0 \neq 0$	Summe (1) + (2)
A	nichtlineare Theorie	-4,31	-4,99	-9,78	-9,30
B	lineare Theorie	-4,65	-5,02	-9,67	-9,67
C	Differenz (B) - (A)	-0,34	-0,03	+0,11	-0,37

Die Ergebnisse der linearen Störungstheorie stimmen – trotz der sehr großen Parameteränderungen – überraschend gut mit der nichtlinearen Rechnung überein. Die größten relativen Abweichungen sind bei der Berechnung des Einflusses der Änderung des Luftdrucks am Boden zu verzeichnen.

Der Gesamtfehler der linearen Störungsrechnung von  $3,7\%$  entspricht etwa der Größe von  $1 St_E$ ; führt also bereits zu einer nicht unerheblichen Genauigkeitseinbuße der berechneten Anfangsangaben des Schießens bei der vollen Vorbereitung.<sup>1)</sup>

## 6.4. Der Einfluß eines homogenen Windes auf die Flugbahn

### 6.4.1. Aufgabenstellung

In Abschnitt 6.2.4. sind die gestörten Bewegungsgleichungen eines Geschosses für den Fall abgeleitet worden, daß sich die Luft der Atmosphäre mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{w} = (W_x, W_y, W_z)^T$  relativ zur Erdoberfläche bewegt. Betrag und Richtung der Windgeschwindigkeit können hierbei beliebige (vorgegebene) Funktionen eines Flugbahnparameters, etwa der Flugzeit  $t$ , sein.

Ist die Windgeschwindigkeit konstant nach Betrag und Richtung, so läßt sich die Integration der gestörten Bewegungsgleichungen umgehen, indem man die gestörten Flugbahnelemente durch die Elemente einer Normalbahn mit geändertem Abgangswinkel und geänderter Anfangsgeschwindigkeit darstellt. Das Vorgehen zur Berechnung der Windstörungen ähnelt damit dem Verfahren, nach dem der Einfluß von Änderungen der Bodenwerte der Normalatmosphäre ermittelt worden ist.

Die Untersuchungen dieses Abschnitts erfolgen unter folgenden Voraussetzungen:

- Die Windgeschwindigkeit  $\mathbf{w}$  ist in einem erdfesten Bezugssystem räumlich und zeitlich konstant.
- Die vertikale Struktur der Atmosphäre (der Druck- und Temperaturverlauf mit der Höhe) wird durch den Wind nicht gestört; insbesondere ist die Aufwindkomponente identisch Null ( $W_z \equiv 0$ ).
- Der Ballistische Koeffizient des Geschosses ist unabhängig von Richtung und Stärke des Windes.

<sup>1)</sup> Zur vollen Vorbereitung der Anfangsangaben des Schießens siehe etwa [34], [47], [48].

$St_E$  ist die Abkürzung für *wahrscheinliche Abweichung in der Entfernung*.

Ein Wind mit der Windgeschwindigkeit  $w$ , der diesen Forderungen genügt, wird im folgenden als *homogener ebener Wind* bezeichnet:

$$w = (W_x, 0, W_z)^T = \text{const.}$$

Um den Anschluß an die in der Ballistik übliche Bezeichnung der Windgeschwindigkeitskomponenten zu erhalten, werden die Indizes  $x, y, z$  tiefgestellt.

Spezialfälle des homogenen ebenen Windes sind

- der homogene Längswind  $w = (W_x, 0, 0)^T$ ,
- der homogene Querwind  $w = (0, 0, W_z)^T$ .

Die im folgenden dargelegte Theorie der Windstörungen ist nichtlinear und gilt für beliebige vertikale, stabile Strukturen der Atmosphäre.

Infolge der Nichtlinearität der Windtheorie setzt sich der Einfluß eines homogenen ebenen Windes auf die Flugbahn im allgemeinen nicht additiv aus den Einflüssen seiner Längs- und Querwindkomponente zusammen.

Ist der Betrag der Windgeschwindigkeit klein gegenüber der Bahngeschwindigkeit ( $|w| \ll |v|$ ), so dürfen die Formeln für die gestörten Flugbahnelemente bezüglich der Windkomponenten  $W_x, W_z$  linearisiert werden.

Im Rahmen der linearen Störungstheorie überlagern sich die Einflüsse von Längs- und Querwind auf die Flugbahn, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen. Die getrennte Berechnung beider Einflüsse und die anschließende Addition zu der resultierenden Windstörung ist dann zulässig. Die praktische Berechnung der Windstörungen vereinfacht sich hierdurch erheblich.

#### 6.4.2. Die Bahnelemente der windgestörten Flugbahn

Charakterisiert man die Bahngeschwindigkeit  $v$  durch ihre Komponenten  $u, w, q$  in  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Richtung, so gilt für den Vektor der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = (u_0, w_0, q_0)^T$ .

Die Koordinaten einer durch homogenen ebenen Wind gestörten Flugbahn können damit in der Form angesetzt werden

$$\begin{aligned} x &= x(t|\hat{c}; \hat{u}_0, \hat{w}_0, 0; W_x, 0, W_z), \\ y &= y(t|\hat{c}; \hat{u}_0, \hat{w}_0, 0; W_x, 0, W_z), \\ z &= z(t|\hat{c}; \hat{u}_0, \hat{w}_0, 0; W_x, 0, W_z). \end{aligned} \tag{6.186}$$

Die spezielle Gestalt dieser Funktionen ergibt sich durch Integration des gestörten Anfangswertproblems (6.52).

Mit der Transformation

$$\begin{aligned}x' &:= x - W_x t; & y' &:= y; & z' &:= z - W_z t; \\u' &:= u - W_x; & w' &:= w; & q' &:= q - W_z\end{aligned}\quad (6.187)$$

geht (6.52) über in

$$\begin{aligned}\ddot{x}' &= -E' u', & x'(0) &= 0, & u'(0) &= u'_0; \\ \ddot{y}' &= -E' w' - g, & y'(0) &= 0, & w'(0) &= w'_0; \\ \ddot{z}' &= -E' q', & z'(0) &= 0, & q'(0) &= q'_0;\end{aligned}\quad (6.188)$$

$$\begin{aligned}E' &= E(c, y', v'), & v' &= \sqrt{u'^2 + w'^2 + q'^2}; \\ u'_0 &= \hat{u}_0 - W_x, & w'_0 &= \hat{w}_0; & q'_0 &= -W_z.\end{aligned}$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems lautet symbolisch

$$\begin{aligned}x' &= x(t|\hat{c}; u'_0, w'_0, q'_0; 0, 0, 0), \\ y' &= y(t|\hat{c}; u'_0, w'_0, q'_0; 0, 0, 0), \\ z' &= z(t|\hat{c}; u'_0, w'_0, q'_0; 0, 0, 0).\end{aligned}\quad (6.189)$$

Da in dem  $x', y', z'$ -System Windstille herrscht, nennt man dieses System mitunter *windfestes Bezugssystem*.

Das Anfangswertproblem (6.188) ist das mathematische Modell einer Normalbahn (im Sinne des klassischen Bahnmodells) mit dem Vektor der Anfangsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}'_0$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'_0 &= (u'_0, w'_0, q'_0)^\top = (\hat{u}_0 - W_x, \hat{w}_0, -W_z)^\top, \\ v'_0 &= |\mathbf{v}'_0| = \sqrt{(\hat{u}_0 - W_x)^2 + \hat{w}_0^2 + W_z^2}.\end{aligned}\quad (6.190)$$

Nach Voraussetzung ist  $q' \neq 0$ , so daß  $\mathbf{v}'_0$  nicht in der  $x', y'$ -Ebene liegt. Die Projektion von  $\mathbf{v}'_0$  auf die horizontale  $x', z'$ -Ebene bildet mit der positiven  $x'$ -Achse den Winkel  $\tilde{\beta}_0$  (siehe Bild 6.5). Der Zahlenwert von  $\tilde{\beta}_0$  folgt aus der Beziehung

$$\tan \tilde{\beta}_0 = \frac{q'_0}{\hat{u}_0} = -\frac{W_z}{\hat{u}_0 - W_x}.\quad (6.191)$$

Bei der Formulierung des klassischen Bahnmodells waren die Richtungen der Koordinatenachsen so gewählt worden, daß die Flugbahn als ebene Kurve vollständig in einer Koordinatenebene verläuft. Um im vorliegenden Fall diese gewohnte Darstellung für die durch (6.188) definierte Normalbahn zu erhalten, führt man ein weiteres rechtwinkliges Koordinatensystem  $x'', y'', z''$  ein, das aus dem  $x', y', z'$ -System durch Drehung um die  $y'$ -Achse hervorgeht. Der Drehwinkel  $\tilde{\beta}_0$  ist durch (6.191) gegeben.

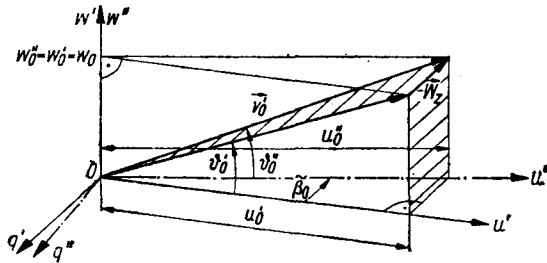


Bild 6.5  
Der Vektor  $v'_0$  der Anfangsgeschwindigkeit im windfesten Koordinatensystem

In dem gedrehten Koordinatensystem liegt der Vektor der Anfangsgeschwindigkeit  $v''_0$  in der  $x'', y''$ -Ebene (siehe Bild 6.5):

$$\begin{aligned} v''_0 &= (u''_0, w''_0, 0)^T; \quad |v''_0| = |v'_0|; \\ u''_0 &= \sqrt{u'^2_0 + W^2_z}; \quad w''_0 = \hat{w}_0. \end{aligned} \quad (6.192)$$

Die Normalbahn (6.189) hat in dem  $x'', y'', z''$ -System die Koordinaten

$$\begin{aligned} x'' &= x(t|\hat{c}; u''_0, w''_0, 0; 0, 0, 0), \\ y'' &= y(t|\hat{c}; u''_0, w''_0, 0; 0, 0, 0), \quad z'' \equiv 0. \end{aligned} \quad (6.193)$$

Die Koordinaten  $x', z'$  eines Flugbahnpunkts  $P$  können in einfacher Weise durch die Flugbahnkoordinate  $x''$  und den Seitenwinkel  $\tilde{\beta}_0$  ausgedrückt werden (siehe Bild 6.6):

$$\begin{aligned} x' &= x'' \cos \tilde{\beta}_0, \quad z' = x'' \sin \tilde{\beta}_0; \\ \cos \tilde{\beta}_0 &= \frac{u'_0}{u''_0} = \frac{\hat{u}_0 - W_x}{\sqrt{(\hat{u}_0 - W_x)^2 + W^2_z}}; \\ \sin \tilde{\beta}_0 &= \frac{q'_0}{u''_0} = -\frac{W_z}{\sqrt{(\hat{u}_0 - W_x)^2 + W^2_z}}. \end{aligned} \quad (6.194)$$

Zusammenfassen von (6.186), (6.187) sowie (6.189) bis (6.194) liefert für die *Koordinaten der windgestörten Flugbahn* den Formelsatz

$$x(t|\hat{c}; \hat{u}_0, \hat{w}_0, 0; W_x, 0, W_z) = W_x t + \frac{\hat{u}_0 - W_x}{\sqrt{(\hat{u}_0 - W_x)^2 + W_z^2}} x(t|\hat{c}; u''_0, \hat{w}_0; 0, 0, 0);$$

$$y(t|\hat{c}; \hat{u}_0, \hat{w}_0, 0; W_x, 0, W_z) = y(t|\hat{c}; u''_0, \hat{w}_0; 0, 0, 0);$$

$$z(t|\hat{c}; \hat{u}_0, \hat{w}_0, 0; W_x, 0, W_z) = W_z \left[ t - \frac{x(t|\hat{c}; u''_0, \hat{w}_0; 0, 0, 0)}{\sqrt{(\hat{u}_0 - W_x)^2 + W_z^2}} \right].$$

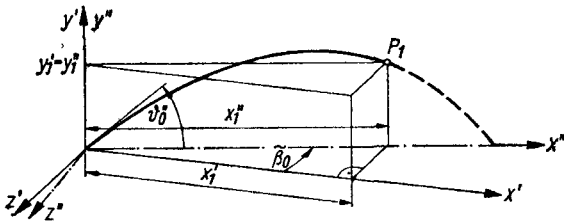


Bild 6.6  
Zur Transformation  
der Flugbahnkoordinaten  
auf ein gedrehtes  
Koordinatensystem

Charakterisiert man den Vektor der Anfangsgeschwindigkeit  $\hat{v}_0$  nicht durch  $\hat{u}_0, \hat{w}_0$ , sondern wie üblich durch Betrag  $\hat{v}_0$  und Richtungswinkel  $\vartheta_0$ , so kann man hierfür auch schreiben

$$x(t|\hat{c}; \hat{v}_0, \vartheta_0; W_x, W_z) = W_x t + (u'_0/u''_0) x(t|\hat{c}; v''_0, \vartheta''_0; 0, 0); \quad (6.195)$$

$$y(t|\hat{c}; \hat{v}_0, \vartheta_0; W_x, W_z) = y(t|\hat{c}; v''_0, \vartheta''_0; 0, 0); \quad (6.196)$$

$$z(t|\hat{c}; \hat{v}_0, \vartheta_0; W_x, W_z) = W_z [t - (1/u''_0) x(t|\hat{c}; v''_0, \vartheta''_0; 0, 0)]; \quad (6.197)$$

$$u'_0 = \hat{u}_0 - W_x; \quad u''_0 = \sqrt{(\hat{u}_0 - W_x)^2 + W_z^2};$$

$v''_0 = v'_0$  ist durch (6.190) gegeben;  $\vartheta''_0$  folgt aus

$$\tan \vartheta''_0 = \frac{w''_0}{u''_0} = \frac{\hat{w}_0}{\sqrt{(\hat{u}_0 - W_x)^2 + W_z^2}} \quad (6.198)$$

oder

$$\sin \vartheta''_0 = \frac{w''_0}{v''_0} = \frac{\hat{w}_0}{\sqrt{(\hat{u}_0 - W_x)^2 + \hat{w}_0^2 + W_z^2}}. \quad (6.199)$$

Für Zahlenrechnungen ist im allgemeinen (6.198), für analytische Untersuchungen hingegen häufig (6.199) günstiger; siehe Übungsaufgabe 6.7.

Die Bahnelemente  $x, y$  der Normalbahn mit den Parametern  $(\hat{c}, v''_0, \vartheta''_0)$  können einem außenballistischen Tafelwerk entnommen werden.

Durch Differentiation von (6.195) bis (6.197) nach  $t$  erhält man die Komponenten  $\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{q}$  der Bahngeschwindigkeit  $\tilde{v}$  der windgestörten Flugbahn:

$$u(t|\hat{c}, \hat{v}_0, \hat{\vartheta}_0; W_x, W_z) = W_x + (u'_0/u''_0) u(t|\hat{c}, v''_0, \vartheta''_0; 0, 0); \quad (6.200)$$

$$w(t|\hat{c}, \hat{v}_0, \hat{\vartheta}_0; W_x, W_z) = w(t|\hat{c}, v''_0, \vartheta''_0; 0, 0); \quad (6.201)$$

$$q(t|\hat{c}, \hat{v}_0, \hat{\vartheta}_0; W_x, W_z) = W_z [1 - (1/u''_0) u(t|\hat{c}, v''_0, \vartheta''_0; 0, 0)]. \quad (6.202)$$

Die ballistischen Tafelwerke geben  $v$  und  $\vartheta$ , nicht  $u$  und  $w$  an. Man ermittelt die Normalelemente  $u'', w''$  der Hilfsbahn deshalb gemäß

$$u'' = v'' \cos \vartheta''; \quad w'' = v'' \sin \vartheta''. \quad (6.203)$$

Die Bahnelemente der windgestörten Flugbahn werden durch das Symbol „~“ gekennzeichnet, die Bahnelemente der ungestörten Normalbahn durch das Symbol „^“.

Die Bahnelemente der Hilfsnormalbahn mit den Parametern  $(\hat{c}, v''_0, \vartheta''_0)$  erhalten die Kennzeichnung „“.

Für die Bahngeschwindigkeit  $\tilde{v}$  der windgestörten Flugbahn kann man dann schreiben

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{w}^2 + \tilde{q}^2} \\ &= \sqrt{[W_x + (u'_0/u''_0) u'']^2 + (w'')^2 + W_z^2 [1 + (1/u''_0) u'']^2} \\ &= \sqrt{[W_x + (u'_0/u''_0) v'' \cos \vartheta'']^2 + (v'' \sin \vartheta'')^2 + W_z^2 [1 + (1/u''_0) v'' \cos \vartheta'']^2}. \end{aligned}$$

Die windgestörte Flugbahn ist im  $x, y, z$ -System keine ebene Kurve; sie tritt seitlich aus der  $x, y$ -Ebene heraus.

Um die Richtung der Bahngeschwindigkeit in einem laufenden Flugbahnpunkt zu charakterisieren, projiziert man  $v_0$  auf die  $x, y$ - und die  $x, z$ -Ebene. Die Neigungswinkel dieser Projektionen gegenüber der positiven  $x$ -Achse sind  $\vartheta$  und  $\beta$ .

Für  $\tan \vartheta$  und  $\tan \beta$  liest man in Bild 6.7 ab:

$$\tan \vartheta = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{\tilde{w}}{\tilde{u}} = \frac{w(t|\tilde{c}, v_0'', \vartheta_0''; 0, 0)}{W_x - (u_0'/u_0'') u(t|\tilde{c}, v_0'', \vartheta_0''; 0, 0)}, \quad (6.204)$$

$$\tan \beta = \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{x}} = \frac{\tilde{q}}{\tilde{u}} = \frac{W_z [1 - (1/u_0'') u(t|\tilde{c}, v_0'', \vartheta_0''; 0, 0)]}{W_x + (u_0'/u_0'') u(t|\tilde{c}, v_0'', \vartheta_0''; 0, 0)}. \quad (6.205)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten  $u''$ ,  $w''$  können wieder gemäß (6.203) durch  $v''$  und  $\vartheta''$  ersetzt werden.

Der lokale Richtungswinkel  $\beta$  der Flugbahntangente ist streng zu unterscheiden vom Azimut (Seitenwinkel)  $\tilde{\psi}$ , unter dem der betreffende

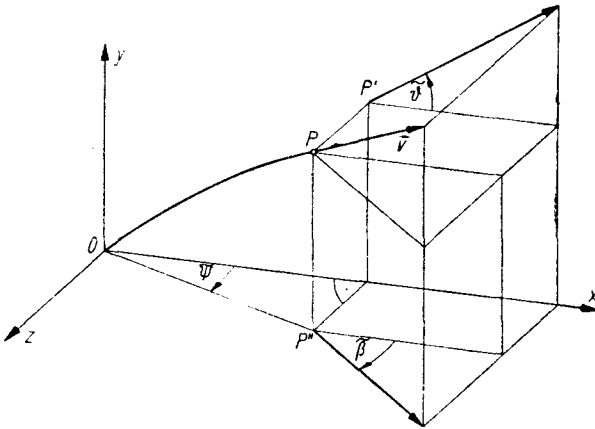


Bild 6.7  
Zur Definition der Neigungswinkel  $\vartheta$ ,  $\beta$  der Bahntangente und des Azimuts  $\tilde{\psi}$

Flugbahnpunkt vom Abgangspunkt aus erscheint (siehe Bild 6.7).

Der Azimut  $\tilde{\psi}$  errechnet sich aus

$$\tan \tilde{\psi} = \frac{\tilde{z}}{\tilde{x}} = \frac{W_z [t - (1/u_0'') x(t|\tilde{c}, v_0'', \vartheta_0''; 0, 0, 0)]}{W_x t + (u_0'/u_0'') x(t|\tilde{c}, v_0'', \vartheta_0''; 0, 0, 0)}. \quad (6.206)$$

In den Artillerieschußtafeln wird als Seitenwindkorrektur der negative Azimutwinkel  $-\tilde{\psi}$  angegeben.



### 6.4.3. Die Bahnelemente der windgestörten Flugbahn im Auftreffpunkt in der Mündungsebene

Die Bahnelemente der windgestörten Flugbahn im Auftreffpunkt in der Mündungsebene erhält man, wenn man die Bedingungsgleichung  $\tilde{y}_e = 0$  nach  $t_e$  auflöst und  $t_e$  in die früher abgeleiteten Beziehungen für die Flugbahnelemente einsetzt.

Aus (6.196) folgt, daß  $t_e$  als Funktion der Parameter  $\hat{c}$ ,  $v_0''$ ,  $\vartheta_0''$  darstellbar ist:

$$t_e = t_e(\hat{c}, v_0'', \vartheta_0''; 0, 0);$$

$v_0'' = v_0'$  ist (6.190),  $\vartheta_0''$  (6.198) bzw. (6.199) zu entnehmen.

Der Formelsatz für die *Flugbahnelemente der windgestörten Flugbahn im Auftreffpunkt in der Mündungsebene* lautet damit

$$\begin{aligned} \bar{x}_e &= W_x \bar{t}_e + (u_0'/u_0'') x_e''; \\ \bar{u}_e &= W_x + (u_0'/u_0'') u_e''; \end{aligned} \quad (6.207)$$

$$\bar{t}_e = t_e''; \quad \bar{w}_e = w_e'';$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_e &= W_z [t_e'' - (1/u_0'') x_e'']; \\ \bar{q}_e &= W_z [1 - (1/u_0'') u_e'']; \end{aligned} \quad (6.208)$$

$$\bar{v}_e = \sqrt{[W_x + (u_0'/u_0'') u_e'']^2 + (w_e'')^2 + W_z^2 [1 - (1/u_0'') u_e'']^2};$$

$$\tan \bar{\vartheta}_e = \frac{w_e''}{W_x - (u_0'/u_0'') u_e''}; \quad (6.209)$$

$$\tan \bar{\beta}_e = \frac{W_z [1 - (1/u_0'') u_e'']}{W_x + (u_0'/u_0'') u_e''}; \quad (6.210)$$

$$\tan \bar{\psi}_e = \frac{W_z [t_e'' - (1/u_0'') x_e'']}{W_x t_e'' + (u_0'/u_0'') x_e''}. \quad (6.211)$$

Analoge Formeln erhält man für die gestörten Flugbahnelemente im Gipfelpunkt (siehe Übungsaufgabe 6.8.).

Die abgeleiteten Formeln lassen erkennen, daß die Einflüsse von Längs- und Seitenwind in komplizierter Weise gekoppelt sind, sich also keineswegs additiv überlagern. Die Nichtlinearität der Überlagerung ist um so stärker ausgeprägt, je größer die Windgeschwindigkeit im Vergleich zur ungestörten Bahngeschwindigkeit ist.

#### 6.4.4. Die Störung der Flugbahnelemente im Auftreffpunkt durch homogenen Längswind

Ist die Querwindkomponente gleich Null ( $W_z = 0$ ), so vereinfachen sich die abgeleiteten Formeln für die Flugbahnelemente im Auftreffpunkt in der Mündungsebene zu

$$\begin{aligned}\tilde{x}_e &= W_x t_e'' + x_e''; & \tilde{u}_e &= W_x + u_e''; \\ \tilde{t}_e &= t_e''; & \tilde{w}_e &= w_e''; & \tilde{z}_e &= 0; & \tilde{q}_e &= 0; \\ \tan \tilde{\vartheta}_e &= \frac{w_e''}{W_x - u_e''}; & \tilde{\beta}_e &= \tilde{\psi}_e = 0; \\ \tilde{v}_0'' &= \sqrt{(\hat{u}_0 - W_x)^2 + w_0''^2} \\ &= \hat{v}_0 \sqrt{1 - 2(W_x/\hat{v}_0) \cos \vartheta_0 + (W_x/\hat{v}_0)^2}; \\ \tan \vartheta_0'' &= \frac{\hat{w}_0}{\hat{u}_0 - W_x} = \frac{\tan \hat{\vartheta}_0}{1 - (W_x/\hat{u}_0)}.\end{aligned}$$

Unter dem Einfluß eines homogenen Längswindes bleibt die Flugbahn eben und tritt an keiner Stelle aus der Abgangsebene heraus, die nach Voraussetzung mit der  $x,y$ -Ebene übereinstimmt.

#### 6.4.5. Die Störung der Flugbahnelemente im Auftreffpunkt durch homogenen Querwind

Die Flugbahnelemente im Auftreffpunkt in der Mündungsebene einer durch homogenen Querwind gestörten Flugbahn folgen aus (6.207) bis (6.211), wenn man dort  $W_x = 0$  setzt:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_e &= \frac{x_e''}{\sqrt{1 + (W_z/\hat{u}_0)^2}}; & \tilde{u}_e &= \frac{u_e''}{\sqrt{1 + (W_z/\hat{u}_0)^2}}; \\ \tilde{t}_e &= t_e''; & \tilde{w}_e &= w_e''; \\ \tilde{z}_e &= W_z \left( t_e'' - \frac{1}{\sqrt{\hat{u}_0^2 + W_z^2}} x_e'' \right), \\ \tilde{q}_e &= W_z \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\hat{u}_0^2 + W_z^2}} u_e'' \right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \tilde{\vartheta}_e &= \frac{w_e''}{u_e''} \sqrt{1 + \left(\frac{W_z}{\hat{u}_0}\right)^2}; \\ \tan \tilde{\beta}_e &= \frac{W_z}{u_e''} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{W_z}{\hat{u}_0}\right)^2} - \left(\frac{u_e''}{\hat{u}_0}\right)^2 \right]; \\ \tan \tilde{\psi}_e &= \frac{\tilde{z}_e}{\tilde{x}_e} = \frac{W_z}{\hat{u}_0} \left[ \frac{\hat{u}_0 t_e''}{x_e''} \sqrt{1 + \left(\frac{W_z}{\hat{u}_0}\right)^2} - 1 \right]; \\ v_0'' &= \sqrt{\hat{v}_0^2 + W_z^2} = \hat{v}_0 \sqrt{1 + (W_z/\hat{v}_0)^2}; \\ \tan \vartheta_0'' &= \frac{\hat{w}_0}{\sqrt{\hat{u}_0^2 + W_z^2}} = \frac{\tan \vartheta_0}{\sqrt{1 + (W_z/\hat{u}_0)^2}}. \end{aligned}$$

In erster Näherung werden die Abgangswinkel und die Anfangsgeschwindigkeit nicht geändert, und es gilt

$$\tilde{t}_e \approx t_e; \quad \tilde{x}_e \approx x_e; \quad \tilde{u}_e \approx \hat{u}_e; \quad \tilde{w}_e \approx \hat{w}_e; \quad \tilde{\vartheta}_e \approx \vartheta_e$$

(siehe Übungsaufgabe 6.9.).

Die eingangs gestellte Aufgabe, die Flugbahnelemente der windgestörten Flugbahn durch die Bahnelemente einer Normalbahn darzustellen, ist damit gelöst.

#### 6.4.6. Die Störungskoeffizienten für Längswindeinfluß

Kann der Windeinfluß auf die Flugbahn als verhältnismäßig gering vorausgesetzt werden, so dürfen die Formeln für die Bahnelemente der windgestörten Flugbahn bezüglich  $W_x$  und  $W_z$  linearisiert werden.

Die Störungskoeffizienten für den Einfluß eines Längswindes auf die Flugbahnelemente findet man am einfachsten durch partielle Differentiation des Formelsatzes (6.195), (6.196), (6.200), (6.201) für die Bahnelemente der windgestörten Flugbahn nach  $W_x$ .

Gemäß der Definition der Störungskoeffizienten sind die partiellen Ableitungen für die Punkte der Normalbahn zu berechnen, im Anschluß an die Differentiation ist also  $W_x = 0$  zu setzen.

Da in diesem Abschnitt nur der Einfluß eines Längswindes untersucht wird, kann von vornherein  $W_z = 0$  angenommen werden.

Unter Beachtung der Beziehungen

$$u'_0/u''_0 = 1; \quad u''_0 = \hat{u}_0 - W_x;$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial W_x} \frac{1}{u''_0} \right)_N = \frac{1}{\hat{u}_0^2};$$

$$\left( \frac{\partial v''_0}{\partial W_x} \right)_N = -\frac{\hat{u}_0}{\hat{v}_0}; \quad \left( \frac{\partial \vartheta''_0}{\partial W_x} \right)_N = \frac{\hat{w}_0}{\hat{v}_0^2}$$

erhält man als Störungskoeffizienten für den Längswindeinfluß (Vergleichsvariable  $t$ ):

$$\left( \frac{\partial x}{\partial W_x} \right)_N^t = \hat{t} - \left[ \frac{\hat{u}_0}{\hat{v}_0} \left( \frac{\partial x}{\partial v_0} \right)_N^t - \frac{\hat{w}_0}{\hat{v}_0^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \vartheta_0} \right)_N^t \right],$$

$$\left( \frac{\partial y}{\partial W_x} \right)_N^t = - \left[ \frac{\hat{u}_0}{\hat{v}_0} \left( \frac{\partial y}{\partial v_0} \right)_N^t - \frac{\hat{w}_0}{\hat{v}_0^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \vartheta_0} \right)_N^t \right],$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial W_x} \right)_N^t = 1 - \left[ \frac{\hat{u}_0}{\hat{v}_0} \left( \frac{\partial u}{\partial v_0} \right)_N^t - \frac{\hat{w}_0}{\hat{v}_0^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \vartheta_0} \right)_N^t \right],$$

$$\left( \frac{\partial w}{\partial W_x} \right)_N^t = - \left[ \frac{\hat{u}_0}{\hat{v}_0} \left( \frac{\partial w}{\partial v_0} \right)_N^t - \frac{\hat{w}_0}{\hat{v}_0^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \vartheta_0} \right)_N^t \right].$$

Die Störungskoeffizienten werden, wie gewohnt, durch Großbuchstaben bezeichnet, so daß die vorstehenden Beziehungen übergehen in

$$X_{W_x}^t + \cos \vartheta_0 \cdot X_v^t - \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{v}_0} X_\vartheta^t = \hat{t};$$

$$Y_{W_x}^t + \cos \vartheta_0 \cdot Y_v^t - \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{v}_0} Y_\vartheta^t = 0;$$

$$U_{W_x}^t + \cos \vartheta_0 \cdot U_v^t - \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{v}_0} U_\vartheta^t = 1;$$

$$W_{W_x}^t + \cos \vartheta_0 \cdot W_v^t - \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{v}_0} W_\vartheta^t = 0.$$
(6.212)

Diese Beziehungen drücken die Störungskoeffizienten für Längswindeinfluß durch die Störungskoeffizienten für Änderungen des Abgangswinkels und der Anfangsgeschwindigkeit sowie die Elemente der ungestörten Normalbahn aus.

### 6.4.7. Die Vergleichsvariablen-Transformation der Störungskoeffizienten für Längswindeinfluß

In der Ballistik interessieren die Störungskoeffizienten für die Vertikal- und die Horizontalkomponente  $u, w$  der Bahngeschwindigkeit im allgemeinen nicht; man benutzt vielmehr die Störungskoeffizienten für  $v$  und  $\vartheta$ .

Um den Formelsatz (6.212) von dem Variablensystem  $\Sigma_{(1)} = \{t; x, y, u, w\}$  in das Variablensystem  $\Sigma_{(2)} = \{t; x, y, v, \vartheta\}$  zu transformieren, kann man das in Abschnitt 6.3.5.7. angegebene Verfahren benutzen.

Nach Multiplikation des Formelsatzes (6.212) von links mit der VT-Matrix  $P_{(1,2)}$  (6.129) ergibt sich<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} X_{w_x}^t + \cos \vartheta_0 \cdot X_v^t - \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{v}_0} X_\vartheta^t &= \hat{t}; \\ Y_{w_x}^t + \cos \vartheta_0 \cdot Y_v^t - \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{v}_0} Y_\vartheta^t &= 0; \\ V_{w_x}^t + \cos \vartheta_0 \cdot V_v^t - \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{v}_0} V_\vartheta^t &= \cos \vartheta; \\ \theta_{w_x}^t + \cos \vartheta_0 \cdot \theta_v^t - \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{v}_0} \theta_\vartheta^t &= -\frac{\sin \vartheta}{\hat{v}}. \end{aligned} \quad (6.213)$$

Analog hierzu läßt sich die Transformation von der Vergleichsvariablen  $t$  auf die Vergleichsvariable  $x$  ausführen.

Dem Übergang von dem Variablensystem  $\Sigma_{(2)} = \{t; x, y, v, \vartheta\}$  zu dem System  $\Sigma_{(3)} = \{x; t, y, v, \vartheta\}$  ist die VT-Matrix  $P_{(2,3)}$  (6.130) zugeordnet:

$$\begin{aligned} P_{(2,3)} &= \begin{bmatrix} -(dt/dx)_N & 0 & 0 & 0 \\ -(dy/dx)_N & 1 & 0 & 0 \\ -(dv/dx)_N & 0 & 1 & 0 \\ -(d\vartheta/dx)_N & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1/\hat{u} & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{p} & 1 & 0 & 0 \\ -\hat{b}/\hat{u} & 0 & 1 & 0 \\ +\hat{g}/\hat{v}^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.214)$$

$$\det P_{(2,3)} = -\hat{u}^{-1}.$$

<sup>1)</sup> Man denkt sich hierfür (6.212) durch eine Matrizengleichung des Typs (6.64) ersetzt.

Multiplikation von (6.213) mit (6.214) liefert die *Störungskoeffizienten für Längswindeinfluß, bezogen auf die Vergleichsvariable x*:

$$\begin{aligned}
 T_{\tilde{w}_x}^x + \cos \vartheta_0 \cdot T_v^x - \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{v}_0} T_\theta^x &= -\hat{t} \hat{u}; \\
 Y_{\tilde{w}_x}^x + \cos \vartheta_0 \cdot Y_v^x - \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{v}_0} Y_\theta^x &= -\hat{p} \hat{t}; \\
 V_{\tilde{w}_x}^x + \cos \vartheta_0 \cdot V_v^x - \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{v}_0} V_\theta^x &= -\hat{b} \hat{t} / \hat{u} + \cos \vartheta; \\
 \theta_{\tilde{w}_x}^x + \cos \vartheta_0 \cdot \theta_v^x - \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{v}_0} \theta_\theta^x &= (\hat{g} \hat{t} - \hat{w}) / \hat{v}^2.
 \end{aligned} \tag{6.215}$$

Um (6.213) von dem Variablensystem  $\Sigma_{(2)}$ , in das System  $\Sigma'_{(4)} = \{y; x, t, v, \vartheta\}$  überzuführen, benötigt man die VT-Matrix  $P_{(3,4')}$ :

$$\begin{aligned}
 P_{(3,4')} &= \begin{bmatrix} 1 & -(dx/dy)_N & 0 & 0 \\ 0 & -(dt/dy)_N & 0 & 0 \\ 0 & -(dv/dy)_N & 1 & 0 \\ 0 & -(d\vartheta/dy)_N & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -1/\hat{p} & 0 & 0 \\ 0 & -1/\hat{w} & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{b}/\hat{w} & 1 & 0 \\ 0 & \hat{g}/(\hat{p} \hat{v}^2) & 0 & 1 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{6.216}$$

$$\det P_{(3,4')} = -1/\hat{w}.$$

Durch Multiplikation von (6.213) mit (6.216) erhält man die *Störungskoeffizienten für Längswindeinfluß, bezogen auf die Vergleichsvariable y*:

$$\begin{aligned}
 X_{\tilde{w}_x}^y + \cos \vartheta_0 \cdot X_v^y - \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{v}_0} X_\theta^y &= \hat{t}; \\
 T_{\tilde{w}_x}^y + \cos \vartheta_0 \cdot T_v^y - \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{v}_0} T_\theta^y &= 0; \\
 V_{\tilde{w}_x}^y + \cos \vartheta_0 \cdot V_v^y - \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{v}_0} V_\theta^y &= \cos \vartheta; \\
 \theta_{\tilde{w}_x}^y + \cos \vartheta_0 \cdot \theta_v^y - \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{v}_0} \theta_\theta^y &= -\frac{\sin \vartheta}{\hat{v}}.
 \end{aligned} \tag{6.217}$$

Die linearen Beziehungen zwischen den Störungskoeffizienten haben in der Vergleichsvariablen  $y$  die gleiche Struktur wie für die Vergleichsvariable  $t$ . Diese Übereinstimmung ist verständlich, da bei der Herleitung der Formeln für die Bahnelemente der windgestörten Flugbahn  $t$  und  $y$  untransformiert geblieben sind.

#### 6.4.8. Die linearisierten Störungsformeln für den Seitenwindeinfluß

Im Rahmen der linearen Störungstheorie werden in den Formeln für die durch Seitenwind gestörten Bahnelemente nur die ersten Potenzen der Windgeschwindigkeitskomponente  $W_z$  beibehalten, außerdem wird  $W_x = 0$  gesetzt. Die Formeln des Abschnitts 6.4.2. vereinfachen sich damit zu

$$\begin{aligned} v''_0 &= \hat{v}_0, & \vartheta''_0 &= \hat{\vartheta}_0; \\ \tilde{x} &= \hat{x}; & \tilde{t} &= \hat{t}; & \tilde{u} &= \hat{u}; & \tilde{w} &= \hat{w}; & \tilde{\vartheta} &= \hat{\vartheta}. \end{aligned}$$

Bei linearer Behandlung des Seitenwindeinflusses erfahren die Horizontalschußweite  $\hat{x}_e$ , die Flugzeit  $\hat{t}_e$  und der Auftreffwinkel  $\hat{\vartheta}_e$  keine Änderung. Auch die Auftreffgeschwindigkeit  $\hat{v}_e$  ändert sich nicht:

$$\tilde{v}_e = \sqrt{\tilde{u}_e^2 + \tilde{w}_e^2 + \tilde{q}_e^2} \approx \sqrt{\hat{u}_e^2 + \hat{w}_e^2} = \hat{v}_e.$$

Für die *Seitenabweichung*  $\tilde{z}$ , die *Geschwindigkeit*  $\tilde{q}$  in  $z$ -Richtung, den *Seitenwinkel*  $\tilde{\beta}$  und den *Azimutwinkel*  $\tilde{\psi}$  erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= W_z \left( \hat{t} - \frac{\hat{x}}{\hat{u}_0} \right), & Z^i_{W_z}(t|\boldsymbol{\mu}) &= \hat{t} - \frac{\hat{x}}{\hat{u}_0}; \\ \tilde{q} &= W_z \left( 1 - \frac{\hat{u}}{\hat{u}_0} \right), & Q^i_{W_z}(t|\boldsymbol{\mu}) &= 1 - \frac{\hat{u}}{\hat{u}_0}; \\ \tan \tilde{\beta} &= \frac{W_z}{\hat{u}} \left( 1 - \frac{\hat{u}}{\hat{u}_0} \right), & \tan \tilde{\psi} &= \frac{W_z}{\hat{u}_0} \left( \frac{\hat{u}_0}{\hat{x}} \hat{t} - 1 \right). \end{aligned} \quad (6.218)$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß die Beziehungen für die Störungskoeffizienten  $Z^i_{W_z}$  und  $Q^i_{W_z}$  bei Übergang zu den Vergleichsvariablen  $x$  und  $y$  ungeändert gültig bleiben (siehe Übungsaufgabe 6.10.).

Für die *Bewegung eines Geschosses im Vakuum* gilt:  $\hat{u} = \hat{u}_0$ ;  $\hat{x} = \hat{u}_0 \hat{t}$ .

Setzt man dies in die abgeleiteten Formeln ein, so erhält man, wie erwartet:

$$\ddot{z} \equiv 0; \quad \ddot{q} \equiv 0; \quad \ddot{\beta} \equiv \ddot{\varphi} \equiv 0.$$

Der Einfluß eines Querwindes auf den Flugbahnverlauf ist um so größer, je stärker die Flugbahn im luftgefüllten Raum von der entsprechenden Vakuumflugbahn abweicht ( $v_0, \vartheta_0 : \text{const}$ ). Der Seitenwind einfluß wächst folglich mit zunehmender Größe des Ballistischen Koeffizienten: Leichte Geschosse mit geringer Querschnittsbelastung werden durch einen Seitenwind vorgegebener Größe stärker abgelenkt als schwere Geschosse mit großer Querschnittsbelastung.

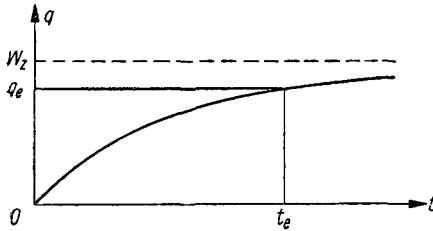


Bild 6.8  
Geschwindigkeit  $\bar{q}_e$  eines Geschosses  
in z-Richtung

Aus (6.218) ist ersichtlich, daß die Translationsgeschwindigkeit  $\bar{q}$  des Geschosses in z-Richtung kleiner ist als Geschwindigkeit  $W_z$  des Seitenwinds.

Da im luftgefüllten Raum die Horizontalgeschwindigkeit  $u$  des Geschosses monoton abnimmt und für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null strebt, ergibt sich für die seitliche Geschwindigkeit  $\bar{q}$  der in Bild 6.8 skizzierte Verlauf.

#### 6.4.9. Ein Zahlenbeispiel für die Berechnung der Windstörungen

Das Anliegen dieses Abschnitts besteht darin, am Beispiel der bereits wiederholt benutzten Musterbahn mit den Flugbahnparametern

$$\hat{c}_{43} = 0,34 \text{ m}^2/\text{kg}; \quad \hat{v}_0 = 800 \text{ m/s}; \quad \hat{\vartheta}_0 = 35^\circ$$

die Berechnung der Windstörungen zu zeigen.

Die Normalbahn werde durch einen homogenen Wind der Geschwindigkeit  $w$ ,

$$w = (W_x, 0, W_z)^T; \quad W_x = W_y = 20 \text{ m/s},$$

gestört. Zu ermitteln sind die Verlagerung des Auftreffpunkts in der Mündungsebene sowie die Änderung der Flugzeit bis zum Auftreffen.



Um zu prüfen, ob die Einflüsse des Längs- und des Seitenwindes getrennt berechnet und anschließend additiv überlagert werden dürfen, werden folgende *Fälle* untersucht:

- a) Nichtlineare Theorie: Längswind ( $W_x \neq 0; W_z = 0$ );
- b) Nichtlineare Theorie: Querwind ( $W_x = 0; W_z \neq 0$ );
- c) Nichtlineare Theorie: homogener ebener Wind ( $W_x \neq 0; W_z \neq 0$ );
- d) Lineare Theorie: Längswind ( $W_x \neq 0; W_z = 0$ );
- e) Lineare Theorie: Querwind ( $W_x = 0; W_z \neq 0$ );
- f) Lineare Theorie: homogener ebener Wind ( $W_x \neq 0; W_z \neq 0$ ).

Die Bahnelemente der ungestörten Bahn sind in Abschnitt 6.3.5.8. zusammengestellt. Hiermit folgt

$$\hat{u}_0 = \hat{v}_0 \cos \hat{\vartheta}_0 = 800 \cdot 0,81915 \text{ m/s} = 655,320 \text{ m/s};$$

$$\hat{w}_0 = \hat{v}_0 \sin \hat{\vartheta}_0 = 800 \cdot 0,57358 \text{ m/s} = 458,864 \text{ m/s}.$$

*Fall a:* Die Horizontalschußweite  $\tilde{x}_e$  der gestörten Bahn wird nach der Formel berechnet

$$\tilde{x}_e = W_x t_e'' + x_e''.$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten erhält man

$$v_0'' = \sqrt{(\hat{u}_0 - W_x)^2 + \hat{w}_0^2} = 783,70 \text{ m/s};$$

$$\tan \vartheta_0'' = \frac{\hat{w}_0}{\hat{u}_0 - W_x} = 0,722257; \quad \vartheta_0'' = 35^\circ 50' 20''.$$

$x_e'' = x_e(\hat{c}, v_0'', \vartheta_0'')$  und  $t_e'' = t_e(\hat{c}, v_0'', \vartheta_0'')$  folgen durch doppelte Interpolation in den Tafeln IXa, b des Anhangs, siehe Tabelle 6.5.

Tabelle 6.5

$c = 0,34$		$x_e''$			$t_e''$		
		$v_0$	750	783,70	800	750	783,70
$\vartheta_0$	35,000	23455	24866,4	25549	66,42	68,806	69,96
	35,839		25047,6			70,103	
	40,000	24459	25946,5	26666	73,82	76,536	77,85

Man findet  $x_e'' = 25047,6 \text{ m}$ ;  $t_e'' = \hat{t}_e = 70,103 \text{ s}$ .

Damit folgt

$$\tilde{x}_e^{(a)} = (20 \cdot 70,103 + 25047,6) \text{ m} = 26450 \text{ m};$$

$$\Delta \tilde{x}_e^{(a)} = \tilde{x}_e^{(a)} - \hat{x}_e = 901 \text{ m}; \quad \Delta x_e^{(a)} / \hat{x}_e \cong 3,53 \%;$$

$$\Delta t_e^{(a)} = \hat{t}_e^{(a)} - \hat{t}_e = 0,14 \text{ s}; \quad \Delta t_e^{(a)} / \hat{t}_e \cong 0,20 \%.$$

Die Schußweite vergrößert sich infolge des Längswinds um 901 m  $\cong$  3,53%, die Flugzeit um 0,14 s  $\cong$  0,20%.

Fall b: Die gestörte Schußweite  $\tilde{x}_e$  und die Seitenabweichung  $\tilde{z}_e$  folgen aus

$$\tilde{x}_e = \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{\hat{u}_0^2 + W_z^2}} x_e''; \quad \hat{i}_e = t_e'';$$

$$\tilde{z}_e = W_z \left( t_e'' - \frac{x_e''}{\sqrt{\hat{u}_0^2 + W_z^2}} \right); \quad \tan \tilde{\varphi}_e = \frac{\tilde{z}_e}{\tilde{x}_e}.$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten ergibt sich

$$\sqrt{\hat{u}_0^2 + W_z^2} = 655,625 \text{ m/s}; \quad v_0^g = \sqrt{\hat{v}_0^2 + W_z^2} = 800,250 \text{ m/s};$$

$$\tan \vartheta_0'' = \frac{\hat{w}_0}{\sqrt{\hat{u}_0^2 + W_z^2}} = 0,699888; \quad \vartheta_0'' = 34^\circ 59' 16''.$$

Doppelte Interpolation in der  $x_e$ - und der  $t_e$ -Tafel liefert die in Tabelle 6.6 angegebenen Werte.

Tabelle 6.6

$c = 0,34$		$x_e''$			$t_e''$		
$\vartheta_0$	$v_0$	800	800,25	850	800	800,25	850
30,000		24041	24051,2	26080	61,78	61,795	64,83
34,988			25556,5			69,958	
35,000		25549	25560,1	27777	69,96	69,978	73,47

Man erhält somit:  $x_e'' = 25556,5 \text{ m}$ ;  $t_e'' = \hat{i}_e = 69,958 \text{ s}$ .

Damit folgt

$$\tilde{x}_e^{(b)} = \frac{655,320}{655,625} \cdot 25556,5 \text{ m} = 25545 \text{ m};$$

$$\Delta x_e^{(b)} = \tilde{x}_e^{(b)} - \hat{x}_e = -4 \text{ m}; \quad \Delta x_e^{(b)}/\hat{x}_e \cong -0,02\%;$$

$$\Delta t_e^{(b)} = t_e'' - \hat{i}_e = 0;$$

$$\tilde{z}_e^{(b)} = 20 \cdot \left( 69,958 - \frac{25556,5}{655,625} \right) \text{ m} = 20 \cdot 30,978 \text{ m} = 619,6 \text{ m};$$

$$\tan \tilde{\varphi}_e^{(b)} = \tilde{z}_e^{(b)}/\tilde{x}_e^{(b)} = 0,02426; \quad \tilde{\varphi}_e^{(b)} = 1^\circ 23' 23''.$$

Die Schußweitenverkürzung um 5 m ist in der Praxis vernachlässigbar klein, da die wahrscheinliche Abweichung des mittleren Treffpunkts in der Entfernung mit (0,2 ... 0,3) % angenommen werden muß. Die Flugzeit erfährt im Rahmen der mitgeführten Stellenzahl keine Änderung.

Nicht vernachlässigbar klein ist jedoch die Seitenabweichung von 620 m. Sie wird beim praktischen Schießen durch eine Änderung der Seitenrichtung um  $-\tilde{\varphi}_e$  korrigiert.

Fall c: Zur Berechnung der gestörten Schußweite  $\tilde{x}_e$  und der Seitenabweichung  $\tilde{z}_e$  sind die allgemeinen Beziehungen des Abschnitts 6.4.2. zu benutzen:

$$\tilde{x}_e = W_x t_e'' + \frac{\hat{u}_0 - W_x}{\sqrt{(\hat{u}_0 - W_x)^2 + W_z^2}} x_e''; \quad \hat{i}_e = t_e'';$$

$$\tilde{z}_e = W_z \left[ t_e'' - \frac{x_e''}{\sqrt{(\hat{u}_0 - W_x)^2 + W_z^2}} \right]; \quad \tan \tilde{\psi}_e = \frac{\tilde{z}_e}{\tilde{x}_e}.$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten erhält man

$$\sqrt{(\hat{u}_0 - W_x)^2 + W_z^2} = 635,635 \text{ m/s};$$

$$v_0'' = \sqrt{(\hat{u}_0 - W_x)^2 + \hat{w}_0^2 + W_z^2} = 783,956 \text{ m/s};$$

$$\sin \hat{\theta}_0'' = \frac{\hat{w}_0}{v_0''} = \frac{458,864}{783,956} = 0,585319; \quad \hat{\theta}_0'' = 35^\circ 49' 32''.$$

$\hat{\theta}_0''$  und  $t_e''$  ergeben sich wieder durch doppelte Interpolation in den Tafeln IX des Anhangs, siehe Tabelle 6.7.

Tabelle 6.7

$c = 0,34$		$x_e''$			$t_e''$		
$\hat{\theta}_0$	$v_0$	750	783,96	800	750	783,96	800
35,000	23455	24877,2	25549	66,42	68,824	69,96	
35,826		25055,7			70,101		
40,000	24459	25958,0	26666	73,82	76,557	77,85	

Man findet  $x_e'' = 25055,7 \text{ m}$ ;  $t_e'' = \hat{i}_e = 70,101 \text{ s}$ .

Damit folgt

$$\tilde{x}_e^{(c)} = \left( 20 \cdot 70,101 + \frac{635,320}{635,635} \cdot 25055,7 \right) \text{ m} = 26455 \text{ m};$$

$$\Delta x_e^{(c)} = \tilde{x}_e^{(c)} - \hat{x}_e = 896 \text{ m}; \quad \Delta x_e^{(c)} / \hat{x}_e \cong 3,51 \%;$$

$$\Delta t_e^{(c)} = \hat{i}_e^{(c)} - \hat{i}_e = 0,14 \text{ s}; \quad \Delta t_e^{(c)} / \hat{i}_e \cong 0,20 \%;$$

$$\tilde{z}_e^{(c)} = 20 \cdot \left( 70,101 - \frac{25055,7}{635,635} \right) \text{ m} = 20 \cdot 30,683 \text{ m} = 613,6 \text{ m};$$

$$\tan \tilde{\psi}_e^{(c)} = \tilde{z}_e^{(c)} / \tilde{x}_e^{(c)} = 0,02320; \quad \tilde{\psi}_e^{(c)} = 1^\circ 19' 44''.$$

Die Schußweite vergrößert sich durch den homogenen ebenen Wind der Geschwindigkeit  $w$ ,

$$w = (20 \text{ m/s}; \quad 0; \quad 20 \text{ m/s})^T; \quad |w| = 28,28 \text{ m/s},$$

um  $896 \text{ m} \cong 3,51 \%$ , die Flugzeit um  $0,14 \text{ s} \cong 0,20 \%$ .

Die Seitenabweichung beträgt 614 m, der Azimutwinkel des Auftreffpunkts in der Mündungsebene  $1^{\circ}19'44''$ .

Der Vergleich der unter a) bis c) erzielten Ergebnisse zeigt, daß zur Ermittlung des Einflusses eines (beliebigen) homogenen Windes auf die Flugbahnelemente die Einflüsse von Längs- und Seitenwind getrennt voneinander berechnet und anschließend addiert werden dürfen. Die hierbei erzielte Genauigkeit ist für die Belange des praktischen Schießens ausreichend.

*Fall d:* Der Störungskoeffizient für Längswindeinfluß ist (6.217) zu entnehmen:

$$X_{W_x}^y(\hat{t}_e|\hat{\mu}) = \hat{t}_e - \cos \hat{\vartheta}_0 \cdot X_v^y(\hat{t}_e|\hat{\mu}) + \frac{\sin \hat{\vartheta}_0}{\hat{v}_0} X_{\vartheta}^y(\hat{t}_e|\hat{\mu}).$$

Die Störungskoeffizienten  $X_v^y$  und  $X_{\vartheta}^y$  waren bereits in Abschnitt 6.3.3. berechnet worden:

$$X_v^y(\hat{t}_e|\hat{\mu}) = 43,296 \text{ s};$$

$$X_{\vartheta}^y(\hat{t}_e|\hat{\mu}) = 259,94 \text{ m/Grd} = 259,94 \cdot \frac{360}{2\pi} \frac{\text{m}}{\text{rad}} = 1,4893 \cdot 10^4 \text{ m/rad}.$$

Ferner ist

$$\sin \hat{\vartheta}_0 = 0,57358; \quad \cos \hat{\vartheta}_0 = 0,81915,$$

so daß man erhält

$$X_{W_x}^y(\hat{t}_e|\hat{\mu}) = \left( 69,96 - 0,81915 \cdot 43,296 + \frac{0,57358 \cdot 1,4893 \cdot 10^4}{800} \right) \text{ s}$$

$$= (69,96 - 35,466 + 10,678) \text{ s} = 45,17 \text{ s};$$

$$X_{W_x}^y(\hat{t}_e|\hat{\mu}) = 45,17 \text{ s}.$$

Der Fehler der Horizontalschußweite beträgt damit

$$\delta x_e^{(d)} = X_{W_x}^y(\hat{t}_e|\hat{\mu}) \cdot W_x = 20 \cdot 45,17 \text{ m} = 903,4 \text{ m};$$

$$\delta x_e^{(d)}/\hat{x}_e \cong 3,54 \%.$$

Der Störungskoeffizient für den Längswindeinfluß auf die Flugzeit läßt sich analog ermitteln. Gemäß (6.217) gilt

$$T_{W_x}^y(\hat{t}_e|\hat{\mu}) = \frac{\sin \hat{\vartheta}_0}{\hat{v}_0} T_{\vartheta}^y(\hat{t}_e|\hat{\mu}) - \cos \hat{\vartheta}_0 \cdot T_v^y(\hat{t}_e|\hat{\mu}).$$

Die Störungskoeffizienten  $T_{\vartheta}^y$  und  $T_v^y$  entnimmt man Abschnitt 6.3.3.:

$$T_{\vartheta}^y(\hat{t}_e|\hat{\mu}) = 1,6042 \text{ s/Grd} = 1,6042 \cdot \frac{360}{2\pi} \frac{\text{s}}{\text{rad}} = 91,914 \text{ s/rad};$$

$$T_v^y(\hat{t}_e|\hat{\mu}) = 0,07058 \text{ s}^2/\text{m}.$$

Damit folgt für  $T_{W_x}^y$ :

$$T_{W_x}^y(\hat{t}_e|\hat{\mu}) = \left( \frac{0,57358 \cdot 91,914}{800} - 0,81915 \cdot 0,07058 \right) \text{ s}^2/\text{m};$$

$$T_{W_x}^y(\hat{t}_e|\hat{\mu}) = (0,06590 - 0,05782) \text{ s}^2/\text{m} = 8,08 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}.$$

Der Flugzeitfehler infolge des Längswindeinflusses beträgt somit

$$\delta t_e^{(d)} = T_{W_x}^y(\hat{t}_e|\hat{\mu}) \cdot W_x = 0,16 \text{ s}; \quad \delta t_e^{(d)}/\hat{t}_e \cong 0,23 \text{ \%}.$$

Die Ergebnisse der linearen Störungsrechnung stimmen im vorliegenden Fall mit einer für die Praxis ausreichenden Genauigkeit mit den Resultaten der nichtlinearen Störungsrechnung überein.

*Fall e:* Die Seitenabweichung  $\hat{z}_e$ , die Seitengeschwindigkeit  $\hat{q}_e$ , der Richtungswinkel  $\hat{\beta}_e$  der Flugbahntangente im Auftreffpunkt und der Azimut  $\hat{\psi}_e$  des Auftreffpunkts sind durch den Formelsatz (6.218) gegeben.

Die Horizontalgeschwindigkeit der ungestörten Bahn beträgt im Auftreffpunkt

$$\hat{u}_e = \hat{v}_e \cos \hat{\theta}_e = 356 \cdot \cos 53^\circ 16' \text{ m/s} = 356 \cdot 0,59809 \text{ m/s} = 212,9 \text{ m/s}.$$

Damit ergibt sich

$$\hat{z}_e^{(e)} = 20 \cdot \left( 69,96 - \frac{25\,549}{655,320} \right) \text{ m} = 20 \cdot 30,972 \text{ m} = 619,5 \text{ m};$$

$$\hat{q}_e^{(e)} = 20 \cdot \left( 1 - \frac{212,9}{655,3} \right) \text{ m/s} = 20 \cdot 0,6751 \text{ m/s} = 13,5 \text{ m/s};$$

$$\tan \hat{\beta}_e^{(e)} = \hat{q}_e^{(e)}/\hat{u}_e = 0,06342; \quad \hat{\beta}_e^{(e)} = 3^\circ 37' 43'';$$

$$\tan \hat{\psi}_e^{(e)} = \hat{z}_e^{(e)}/\hat{x}_e = 0,02425; \quad \hat{\psi}_e^{(e)} = 1^\circ 23' 21''.$$

Die unter Verwendung der linearen Störungsformeln erhaltenen Ergebnisse stimmen mit hoher Genauigkeit mit den Resultaten der nichtlinearen Störungsrechnung (Fall b) überein.

*Fall f:* Die Ergebnisse der Fälle d) und e) überlagern sich additiv.

Die wichtigsten der erzielten Resultate sind in Tabelle 6.8 gegenübergestellt:

Tabelle 6.8

Fall \ Element	$\Delta x_e$ in m	$\Delta t_e$ in s	$\hat{z}_e$ in m	$\hat{\psi}_e$ in Grad
a	901	0,14	0	0
b	-4	0,00	620	1° 23' 23''
c	896	0,14	614	1° 19' 44''
d	903	0,16	0	0
e	0	0	620	1° 23' 21''
f	903	0,16	620	1° 23' 21''

Aufgaben der in diesem Abschnitt behandelten Art können, wie die numerischen Resultate zeigen, unbedenklich mit Hilfe der linearen Störungstheorie gelöst werden. In dem Maße, wie das Verhältnis  $|\mathbf{w}|/|v|$  zunimmt, muß mit größeren Unterschieden zwischen den Resultaten der linearen und der nichtlinearen Störungstheorie gerechnet werden.

## 6.5. Die Tafeln der Störungskoeffizienten für die Horizontalschußweite

In den vorangegangenen Abschnitten ist gezeigt worden, wie die Störungskoeffizienten beliebiger Bahnelemente für  $c$ -,  $v_0$ -,  $\vartheta_0$ -,  $p_0$ - und  $\tau_0$ -Änderungen sowie für Längs- und Querwind einfluß  $W_x$ ,  $W_z$  berechnet werden können.

Bei Bahnen der Klasse Boden – Boden ist die Horizontalschußweite  $x_e$  das wichtigste Bahnelement. Für die Störungskoeffizienten der Horizontalschußweite sind deshalb besondere Tafeln aufgestellt worden.

Den Tafeln der Störungskoeffizienten für die Horizontalschußweite, die in Tafel X des Anhangs auszugsweise wiedergegeben sind, liegen das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 und die Normalatmosphäre ANA zugrunde. Sie sind durch numerische Differentiation der Bahnelemente des Tafelwerks [6] ermittelt worden, unterscheiden sich hier von jedoch durch eine andere Anordnung der Tafelgänge und größere Schrittweiten der Flugbahnparameter.

Die Tafeln der Störungskoeffizienten enthalten:

- den Störungskoeffizienten  $Q_c$  der Horizontalschußweite  $x_e$  für eine Änderung des Ballistischen Koeffizienten  $c$  (bzw. des Luftdrucks  $p_0$  am Boden) um 1 %;
- den Störungskoeffizienten  $Q_{v_0}$  der Horizontalschußweite  $x_e$  für eine Änderung der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  um 1 m/s;
- den Störungskoeffizienten  $Q_{\vartheta_0}$  der Horizontalschußweite  $x_e$  für eine Änderung des Abgangswinkels  $\vartheta_0$  um 1' ;
- den Störungskoeffizienten  $Q_{\tau_0}$  der Horizontalschußweite  $x_e$  für eine Änderung der Lufttemperatur  $\tau_0$  am Boden um 1 grd ;
- den Störungskoeffizienten  $Q_{W_x}$  der Horizontalschußweite  $x_e$  für den Einfluß eines Längswindes mit der Geschwindigkeit  $W_x = 1$  m/s sowie
- den Störungskoeffizienten  $Q_{W_z}$  der Seitenabweichung  $z_e$  des Geschosses für einen Querwind mit der Geschwindigkeit  $W_z = 1$  m/s.

Die Störungskoeffizienten sind in der Einheit Meter (m) angegeben.

Benutzt man die Tafel des Störungskoeffizienten  $Q_{\vartheta_0}$  für Abgangswinkeländerungen  $\Delta\vartheta_0 \leq 30'$ , so reicht die erzielbare Genauigkeit der Schußweitenkorrektur für alle in der Praxis auftretenden Aufgaben aus. Bei größeren Abgangswinkeländerungen liefert die lineare Störungstheorie nur Orientierungswerte.

Zwischen den Störungskoeffizienten  $Q_\mu$  und den in der ballistischen Störungstheorie definierten Störungskoeffizienten  $X_\mu^y(\hat{i}_e|\hat{\mu})$  bestehen die Beziehungen

$$Q_c = \frac{\hat{c}}{100} X_c^y(\hat{i}_e|\hat{\mu}); \quad Q_{v_0} = X_{v_0}^y(\hat{i}_e|\hat{\mu}) \cdot \text{m/s};$$

$$Q_{\vartheta_0} = X_{\vartheta_0}^y(\hat{i}_e|\hat{\mu}) \cdot 1'; \quad Q_{\tau_0} = X_{\tau_0}^y(\hat{i}_e|\hat{\mu}) \cdot \text{grd};$$

$$Q_{w_x} = X_{w_x}^y(\hat{i}_e|\hat{\mu}) \cdot \text{m/s}; \quad Q_{w_z} = Z_{w_z}^{x,y}(\hat{i}_e|\hat{\mu}) \cdot \text{m/s}.$$

Die Störungskoeffizienten  $Q_\mu$  der Horizontalschußweite  $x_e$  für die Normalbahn mit den Flugbahnparametern  $\hat{c}_{43} = 0,34 \text{ m}^2/\text{kg}$ ;  $\hat{v}_0 = 800 \text{ m/s}$ ;  $\hat{\vartheta}_0 = 35^\circ$  sind in Tabelle 6.9 angeführt. Spalte 1 enthält die aus Tafel X des Anhangs entnommenen Zahlenwerte, Spalte 2 die in den vorangegangenen Abschnitten berechneten Störungskoeffizienten, Spalte 3 die relativen Abweichungen der in den Spalten 1 und 2 angegebenen Resultate.

Tabelle 6.9

Störungs- koeffizient	(1)	(2)	(3)
	nach Tafel X in m	berechnet in m	[(2) - (1)]:(2) in %
$Q_c$	-146,8	-148,6	+1,23
$Q_{v_0}$	44,00	43,30	-1,59
$Q_{\vartheta_0}$	4,50	4,33	-3,78
$Q_{\tau_0}$	28,38	28,48	-0,35
$Q_{w_x}$	44,98	45,17	+0,42
$Q_{w_z}$	30,66	30,97	+1,01

Die Übereinstimmung der berechneten Störungskoeffizienten mit den Werten, die der Tafel X des Anhangs entnommen worden sind, ist für die Belange der ballistischen Praxis völlig ausreichend.

## 6.6. Die Störungskoeffizienten der Horizontalschußweite nach dem Näherungsverfahren von Siacci

Den bisher durchgeführten Untersuchungen zur Störungstheorie liegt das klassische Bahnmodell zugrunde, wobei als Atmosphäre eine Normalatmosphäre mit konstantem Temperaturgradienten benutzt worden ist. Analog läßt sich jedoch auch eine lineare Störungstheorie für die in Kapitel 5 abgeleiteten Näherungslösungen des Hauptproblems der Äußeren Ballistik aufbauen.

Die Ausführungen dieses Abschnitts verfolgen das Ziel, die Störungskoeffizienten der Horizontalschußweite  $x_e$  infolge von  $c$ -,  $v_0$ - und  $\vartheta_0$ -Änderungen abzuleiten, wenn die Bahnelemente der Normalbahn durch das Näherungsverfahren von *Siacci* approximiert werden. Der Einfachheit halber soll hierbei von dem speziellen *Siacci*-Formelsatz VII (Tabelle 5.11, Seite 263) ausgegangen werden.

### 6.6.1. Der Störungskoeffizient der Horizontalschußweite für Änderungen des Ballistischen Koeffizienten

Im Auftreffpunkt in der Mündungsebene müssen die beiden Beziehungen erfüllt sein<sup>1)</sup>:

$$c x_e = D_e - D_0; \quad (6.219)$$

$$c \sin 2\vartheta_0 = \frac{A_e - A_0}{D_e - D_0} - J_0 =: Z. \quad (6.220)$$

Partielle Differentiation von (6.219) und (6.220) nach  $c$  liefert bei konstant gehaltenem  $y$ :

$$x_e + \frac{\partial x_e}{\partial c} = \frac{\partial D_e}{\partial U_e} \frac{\partial U_e}{\partial c}, \quad (6.221)$$

$$\sin 2\vartheta_0 = \frac{\partial Z}{\partial U_e} \frac{\partial U_e}{\partial c}. \quad (6.222)$$

Für die Ableitung  $\partial Z/\partial U_e$  erhält man

$$\frac{\partial Z}{\partial U_e} = \frac{(D_e - D_0) (\partial A_e/\partial U_e) - (A_e - A_0) (\partial D_e/\partial U_e)}{(D_e - D_0)^2}. \quad (6.223)$$

Aus (5.82) entnimmt man

$$\frac{\partial A_e}{\partial U_e} = -\frac{J_e}{G_e}; \quad \frac{\partial D_e}{\partial U_e} = -\frac{1}{G_e},$$

<sup>1)</sup> Im folgenden wird die abkürzende Schreibweise  $D_e := D(U_e)$ ,  $D_0 := D(v_0)$  benutzt. Entsprechende Abkürzungen werden auch für die anderen Primären *Siacci*-Funktionen eingeführt.



so daß (6.223) übergeht in

$$\frac{\partial Z}{\partial U_e} = \frac{1}{G_e (D_e - D_0)} \left( \frac{A_e - A_0}{D_e - D_0} - J_c \right).$$

Unter Beachtung von (5.103) und (6.219) folgt somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial U_e} &= \frac{1}{G_e c x_e} 2 c \cos^2 \vartheta_0 \tan \vartheta_e \\ &= \frac{\partial D_e}{\partial U_e} \frac{2 \cos^2 \vartheta_0 \tan |\vartheta_e|}{x_e}. \end{aligned} \quad (6.224)$$

Dies eingesetzt in (6.222) liefert

$$\frac{\partial D_e}{\partial U_e} \frac{\partial U_e}{\partial c} = \frac{x_e \sin 2\vartheta_0}{2 \cos^2 \vartheta_0 \tan |\vartheta_e|} = x_e \frac{\tan \vartheta_0}{\tan |\vartheta_e|}.$$

Durch Kombination dieser Gleichung mit (6.221) erhält man

$$c \frac{\partial x_e}{\partial c} = x_e \left( \frac{\tan \vartheta_0}{\tan |\vartheta_e|} - 1 \right).$$

Zur Abkürzung setzt man

$$\hat{\gamma} := \frac{\tan \vartheta_0}{\tan |\vartheta_e|} = \frac{1}{f_2(\hat{x}_e, \hat{v}_0)}$$

(siehe Tabelle 5.7, Seite 255).

Damit lautet der *Störungskoeffizient der Horizontalschußweite für Änderungen des Ballistischen Koeffizienten*

$$X_c^y(f_e|\hat{\mu}) = \frac{\hat{x}_e}{\hat{c}} (\hat{\gamma} - 1). \quad (6.225)$$

### 6.6.2. Der Störungskoeffizient der Horizontalschußweite für Änderungen des Abgangswinkels

Um den Störungskoeffizienten für Änderungen des Abgangswinkels zu erhalten, sind (6.219) und (6.220) partiell nach  $\vartheta_0$  zu differenzieren:

$$c \frac{\partial x_e}{\partial \vartheta_0} = \frac{\partial D_e}{\partial U_e} \frac{\partial U_e}{\partial \vartheta_0}; \quad 2c \cos 2\vartheta_0 = \frac{\partial Z}{\partial U_e} \frac{\partial U_e}{\partial \vartheta_0}.$$

Elimination von  $\partial U_e / \partial \vartheta_0$  ergibt unter Beachtung von (6.224):

$$\frac{\partial x_e}{\partial \vartheta_0} = 2 \cos 2\vartheta_0 \frac{\partial D_e / \partial U_e}{\partial Z / \partial U_e} = \frac{x_e \cos 2\vartheta_0}{\cos^2 \vartheta_0 \tan |\vartheta_e|}.$$

Der Störungskoeffizient der Horizontalschußweite für Änderungen des Abgangswinkels beträgt somit

$$X_{\vartheta}^y(\hat{i}_e | \hat{\mu}) = \left( \frac{\partial x_e}{\partial \vartheta_0} \right)_N = \frac{\hat{x}_e \cos 2\vartheta_0}{\cos^2 \vartheta_0 \tan |\vartheta_e|} \quad (6.226)$$

oder

$$X_{\vartheta}^y(\hat{i}_e | \hat{\mu}) = \frac{\hat{x}_e (1 - \tan^2 \vartheta_0)}{\tan |\vartheta_e|}. \quad (6.227)$$

### 6.6.3. Der Störungskoeffizient der Horizontalschußweite für Änderungen der Anfangsgeschwindigkeit

Der Störungskoeffizient für Änderungen der Anfangsgeschwindigkeit folgt durch Differentiation von (6.219) und (6.220) nach  $v_0$ :

$$c \frac{\partial x_e}{\partial v_0} = \frac{\partial D_e}{\partial U_e} \frac{\partial U_e}{\partial v_0} - \frac{\partial D_0}{\partial v_0}; \quad (6.228)$$

$$0 = \frac{\partial Z}{\partial U_e} \frac{\partial U_e}{\partial v_0} + \frac{\partial Z}{\partial v_0} - \frac{\partial J_0}{\partial v_0}. \quad (6.229)$$

Nun ist

$$\frac{\partial D_0}{\partial v_0} = -\frac{1}{G_0}; \quad \frac{\partial J_0}{\partial v_0} = -\frac{2g_0}{G_0 v_0^2};$$

$$\frac{\partial Z}{\partial v_0} = \frac{1}{G_0 (D_0 - D_e)} \left( \frac{A_e - A_0}{D_e - D_0} - J_0 \right) = -\frac{\sin 2\vartheta_0}{G_0 x_e}.$$

Einsetzen dieser Beziehungen in (6.228) und (6.229) liefert unter Beachtung von (6.224):

$$c \frac{\partial x_e}{\partial v_0} - \frac{1}{G_0} = \frac{\partial D_e}{\partial U_e} \frac{\partial U_e}{\partial v_0};$$

$$\frac{\sin 2\vartheta_0}{G_0 x_e} - \frac{2g_0}{G_0 v_0^2} = \frac{\partial D_e}{\partial U_e} \frac{\partial U_e}{\partial v_0} \cdot \frac{2 \cos^2 \vartheta_0 \tan |\vartheta_e|}{x_e}.$$

Elimination von  $(\partial \mathbf{D}_e / \partial U_e)$   $(\partial U_e / \partial v_0)$  ergibt

$$\frac{\partial x_e}{\partial v_0} = \frac{1}{c G_0} \left( 1 + \frac{\tan \vartheta_0}{\tan |\vartheta_e|} - \frac{g_0 x_e}{v_0^2 \cos^2 \vartheta_0 \tan |\vartheta_e|} \right).$$

Die Schußweite im Vakuum beträgt bei der gleichen Anfangsgeschwindigkeit und dem gleichen Abgangswinkel

$$\tilde{x}_e = \frac{v_0^2}{g_0} \sin 2\vartheta_0 = \frac{2 v_0^2}{g_0} \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0.$$

Damit kann man den Störungskoeffizienten  $(\partial x_e / \partial v_0)_N^y$  schreiben

$$\left( \frac{\partial x_e}{\partial v_0} \right)_N^y = \frac{1}{\hat{c} \hat{G}_0} \left[ 1 + \hat{\gamma} \left( 1 - \frac{2 \hat{x}_e}{\tilde{x}_e} \right) \right].$$

Es ist üblich, eine neue Sekundäre *Siacci*-Funktion  $f_{v_0}$  einzuführen:

$$\begin{aligned} f_{v_0}(c x_e, v_0) &:= \frac{v_0}{c x_e G_0} \left[ 1 + \gamma \left( 1 - \frac{2 x_e}{\tilde{x}_e} \right) \right] \\ &= \frac{1}{c x_e} \frac{v_0}{G_0} \left\{ 1 + \frac{1}{f_2(c x_e, v_0)} \left[ 1 - \frac{2 g_0}{f_1(c x_e, v_0)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.230)$$

Ein Auszug aus der Tafel der Funktion  $f_{v_0}$  ist im Anhang, Tafel VIg, wiedergegeben.

Mit (6.230) erhält man für den *Störungskoeffizienten der Horizontal-schußweite infolge von Änderungen der Anfangsgeschwindigkeit*

$$X_v^y(\hat{c} | \hat{\mu}) = \frac{\hat{x}_e}{\hat{v}_0} f_{v_0}(\hat{c} \hat{x}_e, \hat{v}_0). \quad (6.231)$$

Entsprechend lassen sich die Störungskoeffizienten für andere Bahnelemente und andere Vergleichsvariable ableiten. So gelten z.B., wie man sich leicht an Hand einer Skizze überlegt, die Beziehungen

$$Y_\mu^x(\hat{c} | \hat{\mu}) = X_\mu^y(\hat{c} | \hat{\mu}) \tan |\hat{\vartheta}_e| \quad (\mu = \hat{c}, \hat{v}, \hat{\vartheta}). \quad (6.232)$$

## 6.7. Das lineare Störungsanfangswertproblem und dessen Integration (Mathematische Grundlagen)

### 6.7.1. Überblick

In Abschnitt 6.2. war dargestellt worden, wie sich das Anfangswertproblem für die Normalflugbahn ändert, wenn Abweichungen von den physikalischen Voraussetzungen des klassischen Bahnmodells auftreten. Hieran anschließend konnte gezeigt werden, daß sich die Störungskoeffizienten für Änderungen des Luftdrucks am Boden, der Lufttemperatur am Boden und der Mündungshöhe sowie die Störungskoeffizienten für homogenen Wind auf die Störungskoeffizienten für die Grundstörungen ( $c$ -,  $v_0$ - und  $\vartheta_0$ -Änderungen) zurückführen lassen. Diese Reduktion auf Grundstörungen ist von Vorteil, da die Störungskoeffizienten für  $c$ -,  $v_0$ - und  $\vartheta_0$ -Änderungen in einfacher Weise durch numerische Differentiation der Daten des Tafelwerks für die Bahnelemente oder (bei rasanten Bahnen) mit Hilfe des Verfahrens von *Siacci* ermittelt werden können.

Die Reduktion auf Grundstörungen ist im allgemeinen nicht unmittelbar möglich, wenn die Störeinflüsse zum Auftreten von „Zusatzbeschleunigungen“ in den Bewegungsgleichungen führen. Das gilt z. B. für den Einfluß eines nichthomogenen Windes, dessen Geschwindigkeit und Richtung als Funktion der Höhe variieren, den Einfluß der Richtungsänderung der Fallbeschleunigung sowie den Einfluß der *Coriolis*-Beschleunigung.

In den genannten Fällen müssen die Störungen der Flugbahnelemente durch Integration der linearen Störungsdifferentialgleichungen ermittelt werden.

In dieser Weise ist auch bei der Ermittlung des Einflusses von Änderungen des Luftdrucks und der Lufttemperatur am Boden zu verfahren, wenn die Voraussetzungen<sup>1)</sup> der Reduktionstheorie nicht erfüllt sind.

Wie die folgenden Ausführungen zeigen, können auch die Störungskoeffizienten für die Grundstörungen durch Integration der linearen Störungsdifferentialgleichungen gewonnen werden.

In der ballistischen Störungstheorie wird im allgemeinen angenommen, daß die Störungseinflüsse nur relativ geringe Änderungen der Bahnelemente zur Folge haben. Unter diesen Voraussetzungen darf das Anfangswertproblem für die Flugbahn bezüglich der Störungen lineari-

<sup>1)</sup> Hinsichtlich der Voraussetzungen der Reduktionstheorie siehe Abschnitt 6.3.1.

siert werden. Die mathematische Behandlung der Störungsprobleme vereinfacht sich hierdurch erheblich.

Die Ausführungen dieses Abschnitts verfolgen das Ziel, die mathematischen Grundlagen der Herleitung, Transformation und Integration von linearen Störungsanfangswertproblemen zusammenzustellen, soweit diese für die ballistische Störungstheorie von Bedeutung sind. Auf eine tiefer gehende mathematische Begründung der einzelnen Ansätze muß, dem Charakter dieses Buches entsprechend, jedoch weitgehend verzichtet werden.<sup>1)</sup>

Die Herleitung der speziellen ballistischen Störungsdifferentialgleichungen erfolgt in Abschnitt 6.8.

### 6.7.2. Das zugeordnete lineare Störungsanfangswertproblem

Gegeben sei ein (nichtlineares) skalares Anfangswertproblem:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (6.233)$$

mit der Lösung  $x = q(t; t_0, x_0)$ . Durch irgendwelche (kleinen) Störeinflüsse sei (6.233), dessen Lösung als bekannt vorausgesetzt wird, in das *gestörte Anfangswertproblem*

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(t, x) =: f(t, x) + e(t, x), \quad (6.234)$$

$$x(t_0) = \tilde{x}_0 =: x_0 + \delta x_0$$

abgeändert worden, dessen Lösung  $x = \tilde{q}(t; t_0, \tilde{x}_0)$  unbekannt ist und ermittelt werden soll.

Die Abweichung der Lösung des gestörten Anfangswertproblems (6.234) von der Lösung des ungestörten Anfangswertproblems (6.233) werde mit  $\delta x$  bezeichnet:

$$\delta x(t; t_0, x_0, \tilde{x}_0) := \tilde{q}(t; t_0, \tilde{x}_0) - q(t; t_0, x_0). \quad (6.235)$$

Der Vergleich von gestörter und ungestörter Lösung erfolgt für gleiche  $t$ -Werte, wie aus (6.235) ersichtlich ist.

<sup>1)</sup> Der interessierte Leser findet detaillierte Ausführungen zur Transformation von Störungsanfangswertproblemen in den Arbeiten [24], [38] bis [42] des Verfassers.

Differenziert man (6.235) nach  $t$  und beachtet (6.233), (6.234), so erkennt man, daß  $\delta x(t; t_0, x_0, \tilde{x}_0)$  die Lösung der Anfangswertaufgabe ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \tilde{f}[t, q(t; t_0, x_0) + \xi] - f[t, q(t; t_0, x_0)], \\ \xi(t_0) &= \xi_0, \quad \xi_0 := \tilde{x}_0 - x_0 = \delta x_0. \end{aligned} \tag{6.236}$$

Man bezeichnet (6.236) als *nichtlineares Störungsanfangswertproblem*. Die Differentialgleichung (6.236) läßt sich in der Form schreiben

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= f[t, q(t; t_0, x_0) + \xi] - f[t, q(t; t_0, x_0)] \\ &\quad + \tilde{f}[t, q(t; t_0, x_0) + \xi] - f[t, q(t; t_0, x_0) + \xi], \end{aligned}$$

und mit  $e(t, x) := \tilde{f}(t, x) - f(t, x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= f[t, q(t; t_0, x_0) + \xi] - f[t, q(t; t_0, x_0)] \\ &\quad + e[t, q(t; t_0, x_0) + \xi]. \end{aligned}$$

Das Verfahren der Linearisierung besteht darin, den ersten und dritten Term auf der rechten Seite nach Potenzen von  $\xi$  in *Taylor-Reihen* zu entwickeln, wobei die Glieder mit  $\xi^n$  ( $n \geq 2$ ) sowie die Produkte von  $\xi^k$  ( $k \geq 1$ ) mit den Ableitungen der Störfunktion  $e$  als vernachlässigbar klein angesehen werden.

Das nichtlineare Störungsanfangswertproblem (6.236) geht damit in das *lineare Störungsanfangswertproblem* über:

$$\frac{d\xi}{dt} = a(t) \xi + e(t); \quad \xi(t_0) = \xi_0; \tag{6.237}$$

$$a(t) := \left[ \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right]_{x=q(t; t_0, x_0)}; \quad e(t) := e[t, q(t; t_0, x_0)].$$

Man nennt  $\xi_0$  *Anfangsstörung*,  $e(t)$  *Störfunktion*.

Die Lösung  $\xi = \varkappa(t; t_0, x_0, \tilde{x}_0)$  des Anfangswertproblems (6.237) approximiert die Lösung des nichtlinearen Störungsanfangswertproblems (6.236) um so besser, je kleiner die Störungseinflüsse sind. Die Güte der Approximation kann hierbei durch Schranken für die Abweichung der nichtlinearen von der linearen Störung charakterisiert werden (siehe [24]).

Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, so schreibt man die Lösung von (6.237) auch kurz  $\xi = \xi(t)$ .

Die Überlegungen, die für das skalare Anfangswertproblem (6.233) durchgeführt worden sind, lassen sich unschwer auf ein Anfangswertproblem für ein System von  $n$  gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung übertragen.

Die Darstellung wird übersichtlich, wenn man sich wieder der Matrixschreibweise bedient. Es sei

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0; \quad (6.238)$$

$$x = (x^1, \dots, x^n)^T; \quad f = (f^1, \dots, f^n)^T$$

das *ungestörte Anfangswertproblem* mit der Lösung  $x = q(t; t_0, x_0)$  und

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(t, x) =: f(t, x) + e(t, x),$$

$$x(t_0) = \tilde{x}_0 =: x_0 + \delta x_0;$$

$$\tilde{f} = (\tilde{f}^1, \dots, \tilde{f}^n)^T, \quad e = (e^1, \dots, e^n)^T$$

das *gestörte Anfangswertproblem* mit der unbekannt (gesuchten) Lösung  $x = \tilde{q}(t; t_0, \tilde{x}_0)$ .

Die Abweichung  $\delta x$  der gestörten von der ungestörten Lösung,

$$\delta x(t; t_0, x_0, \tilde{x}_0) := \tilde{q}(t; t_0, x_0) - q(t; t_0, x_0), \quad (6.239)$$

kann dann approximiert werden durch die Lösung  $\xi = \chi(t; t_0, x_0, \tilde{x}_0)$  des *linearen Störungsanfangswertproblems*

$$\frac{d\xi}{dt} = A(t)\xi + e(t), \quad \xi(t_0) = \xi_0 = \delta x_0. \quad (6.240)$$

Hierin bedeuten  $\xi, \xi_0, e$  Spaltenvektoren und  $A(t)$  eine quadratische Matrix der Ordnung  $n$ :

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{bmatrix}; \quad \xi_0 = \begin{bmatrix} \xi_0^1 \\ \xi_0^2 \\ \vdots \\ \xi_0^n \end{bmatrix}; \quad e(t) = \begin{bmatrix} e^1(t) \\ e^2(t) \\ \vdots \\ e^n(t) \end{bmatrix};$$

$$e^i(t) := e^i[t, q(t; t_0, x_0)]$$

$$:= \tilde{f}^i[t, q(t; t_0, x_0)] - f^i[t, q(t; t_0, x_0)]; \quad (6.241)$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} a^{11}(t) & a^{12}(t) & \dots & a^{1n}(t) \\ a^{21}(t) & a^{22}(t) & \dots & a^{2n}(t) \\ \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ a^{n1}(t) & a^{n2}(t) & \dots & a^{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad (6.242)$$

$$a^{ik}(t) := a^{ik}[t, \mathbf{q}(t; t_0, \mathbf{x}_0)] := \left[ \frac{\partial f^i(t, \mathbf{x})}{\partial x^k} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{q}(t; t_0, \mathbf{x}_0)},$$

$$i, k = 1(1)n.$$

Wie aus den vorstehenden Beziehungen ersichtlich, sind die Koeffizientenmatrix  $A(t)$  und die Störfunktion  $e(t)$  des linearen Störungsanfangswertproblems (6.240) für die (als bekannt vorausgesetzte) ungestörte Lösung zu berechnen und damit ebenfalls bekannte Funktionen.

Die Ermittlung der Störungen der Flugbahnelemente reduziert sich damit darauf, das System von  $n$  linearen Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten (6.240) zu integrieren.

### 6.7.3. Die linearen Störungsdifferentialgleichungen für das transformierte nichtlineare Störungsanfangswertproblem

Durch die umkehrbar-eindeutige Transformation (6.92), (6.93) wird das ungestörte *Anfangswertproblem* (6.233) übergeführt in das Anfangswertproblem

$$\frac{dz}{ds} = \mathbf{g}(s, \mathbf{z}), \quad \mathbf{z}(s_0) = \mathbf{z}_0 \quad (6.243)$$

mit der Lösung  $\mathbf{z} = \mathbf{p}(s; s_0, \mathbf{z}_0)$ . Erfahren die Anfangsbedingung und die „rechte Seite“ der Differentialgleichung die Änderungen  $\mathbf{z}_0 \rightarrow \tilde{\mathbf{z}}_0$ ,  $\mathbf{g} \rightarrow \tilde{\mathbf{g}}$ , so erhält man das gestörte Anfangswertproblem

$$\frac{dz}{ds} = \tilde{\mathbf{g}}(s, \mathbf{z}) =: \mathbf{g}(s, \mathbf{z}) + \varepsilon(s, \mathbf{z}); \quad (6.244)$$

$$\mathbf{z}(s_0) = \tilde{\mathbf{z}}_0 =: \mathbf{z}_0 + \delta \mathbf{z}_0$$



mit der unbekannt (gesuchten) Lösung  $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{p}}(s; s_0, \mathbf{z}_0)$ . Die Abweichung der gestörten von der ungestörten Lösung  $\delta \mathbf{z}$ ,

$$\delta \mathbf{z}(s; s_0, \mathbf{z}_0, \tilde{\mathbf{z}}_0) := \tilde{\mathbf{p}}(s; s_0, \tilde{\mathbf{z}}_0) - \mathbf{p}(s; s_0, \mathbf{z}_0) \quad (6.245)$$

kann approximiert werden durch die Lösung  $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\pi}(s; s_0, \mathbf{z}_0, \tilde{\mathbf{z}}_0)$  des (6.243) zugeordneten *linearen Störungsanfangswertproblems*

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{ds} = \mathbf{B}(s) \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\varepsilon}(s), \quad \boldsymbol{\zeta}(s_0) = \boldsymbol{\zeta}_0 = \delta_{\mathbf{z}_0}; \quad (6.246)$$

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta}_0 = \begin{bmatrix} \zeta_0^1 \\ \zeta_0^2 \\ \vdots \\ \zeta_0^n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(s) = \begin{bmatrix} \varepsilon^1(s) \\ \varepsilon^2(s) \\ \vdots \\ \varepsilon^n(s) \end{bmatrix};$$

$$\varepsilon^i(s) := \varepsilon^i[s, \mathbf{p}(s; s_0, \mathbf{z}_0)]$$

$$= \tilde{g}^i[s, \mathbf{p}(s; s_0, \mathbf{z}_0)] - g^i[s, \mathbf{p}(s; s_0, \mathbf{z}_0)],$$

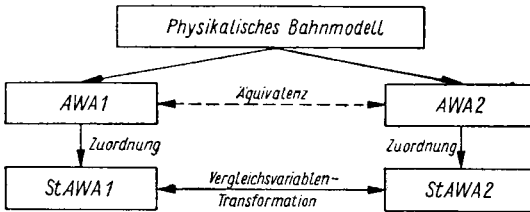
$$\mathbf{B}(s) = \begin{bmatrix} b^{11}(s) & b^{12}(s) & \dots & b^{1n}(s) \\ b^{21}(s) & b^{22}(s) & \dots & b^{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{n1}(s) & b^{n2}(s) & \dots & b^{nn}(s) \end{bmatrix}, \quad (6.247)$$

$$b^{ik}(s) := b^{ik}[s, \mathbf{p}(s; s_0, \mathbf{z}_0)] := \left[ \frac{\partial g^i(s, \mathbf{z})}{\partial z^k} \right]_{\mathbf{z}=\mathbf{p}(s; s_0, \mathbf{z}_0)}, \quad (6.248)$$

$$i, k = 1(1)n.$$

Die Zuordnung von linearen Störungsanfangswertproblemen zu dem ursprünglichen nichtlinearen Anfangswertproblem (6.238) und zu dem transformierten nichtlinearen Anfangswertproblem (6.243) erfolgt methodisch in der gleichen Weise. Die entstehenden linearen Störungsanfangswertprobleme (6.240) und (6.246), deren Lösungen  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\kappa}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{x}}_0)$  und  $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\pi}(s; s_0, \mathbf{z}_0, \tilde{\mathbf{z}}_0)$  die Abweichungen  $\delta \mathbf{x}$  (6.239) bzw.  $\delta \mathbf{z}$  (6.245) approximieren, unterscheiden sich jedoch bezüglich der zugrunde liegenden Vergleichsvariablen: Im ersten Fall werden Punkte von gestörter und ungestörter Lösung verglichen, die auf „Isochronen“  $t = \text{const}$  liegen, im zweiten Fall erfolgt der Vergleich für  $s = \text{const}$ .

Die (physikalische) Gleichwertigkeit (Äquivalenz) der ungestörten Anfangswertprobleme (6.238) und (6.243), die durch entsprechende einschränkende Forderungen an die Wahl der Transformationsfunktionen (6.92), (6.93) gesichert werden kann, bleibt bei dem Übergang zu den entsprechenden linearen Störungsanfangswertproblemen somit nicht erhalten: *Der eindeutigen Transformation zwischen den Koordinaten der ungestörten Anfangswertprobleme entspricht eine Vergleichsvariablen-Transformation zwischen den Störungsvektoren der zugeordneten linearen Störungsanfangswertprobleme.*



**Bild 6.9** Schematische Darstellung der Beziehungen zwischen den ungestörten Anfangswertaufgaben AWA 1, AWA 2 und den zugeordneten Störungsanfangswertaufgaben StAWA 1, StAWA 2

Bild 6.9 veranschaulicht dies für den Fall, daß ein (physikalisches) Bahnmodell durch die gleichwertigen Anfangswertaufgaben AWA 1 und AWA 2 beschrieben werden kann, denen ihrerseits die Störungsanfangswertaufgaben StAWA 1 und StAWA 2 zugeordnet sind.

Setzt man das  $(t, \mathbf{x})$ -Variablensystem als Grundvariablensystem voraus, so ist es empfehlenswert, in dem linearen Störungsanfangswertproblem (6.246) (Vergleichsvariable:  $s$ ) die Integrationsvariable  $t$  zu benutzen. Mit  $s(t) := \varphi^0[t, \mathbf{q}(t; t_0, \mathbf{x}_0)]$  geht (6.246) über in

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathbf{B}^0(t) \zeta + \varepsilon^0(t); \quad \zeta(t_0) = \zeta_0 = \delta \mathbf{z}_0, \quad (6.249)$$

$$\mathbf{B}^0(t) := \frac{ds(t)}{dt} \mathbf{B}[s(t)]; \quad \varepsilon^0(t) = \frac{ds(t)}{dt} \varepsilon[s(t)].$$

Dieser Wechsel der unabhängigen Variablen geschieht lediglich zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung, er hat keinen Einfluß auf die Vergleichsvariable (die Zuordnungsvorschrift für den Vergleich von ungestörter und gestörter Lösung).

#### 6.7.4. Das V-transformierte Störungsanfangswertproblem

Aus den Ausführungen des vorangegangenen Abschnitts ist ersichtlich, daß sich die Störungsanfangswertprobleme (6.240) und (6.249) hinsichtlich der Vergleichsvariablen unterscheiden, die ihnen zugrunde liegen. In Abschnitt 6.3.4. war andererseits gezeigt worden, daß die Vergleichsvariablen-Transformationen des Störungskoeffizienten-Vektors  $\sigma_\mu^t(t)$  in den Störungskoeffizienten-Vektor  $\sigma_\mu^s(t)$  durch Multiplikation von  $\sigma_\mu^t(t)$  mit der entsprechenden VT-Matrix  $P_{(1,2)}(t)$  bewirkt werden kann:

$$\sigma_\mu^s(t) = P_{(1,2)}(t) \sigma_\mu^t(t).$$

Die VT-Matrix  $P_{(1,2)}(t)$  ist dem Übergang von dem Variablensystem  $\Sigma_{(1)} = \{t, \mathbf{x}\}$  zu dem Variablensystem  $\Sigma_{(2)} = \{s, \mathbf{z}\}$  zugeordnet; sie war früher mit  $P_{t,s}(t)$  bezeichnet worden.

Es liegt somit nahe zu fragen, ob das lineare Störungsanfangswertproblem (6.249) aus (6.240) dadurch hergeleitet werden kann, daß man den Störungsvektor  $\xi$  mit der VT-Matrix  $P_{(1,2)}(t)$  multipliziert.

Differentiation von  $\eta = P_{(1,2)}(t) \xi$  nach  $t$  liefert

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \dot{P}_{(1,2)}(t) \xi + P_{(1,2)}(t) \dot{\xi}, \\ &= \dot{P}_{(1,2)}(t) \xi + P_{(1,2)}(t) [A(t) \xi + e(t)], \\ &= [\dot{P}_{(1,2)}(t) + P_{(1,2)}(t) A(t)] \xi + P_{(1,2)}(t) e(t), \\ &= [\dot{P}_{(1,2)}(t) + P_{(1,2)}(t) A(t)] P_{(2,1)}(t) \eta + P_{(1,2)}(t) e(t). \end{aligned}$$

Der Vektor  $\chi(t; t_0, \mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{x}}_0) = P_{(1,2)}(t) \kappa(t; t_0, \mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{x}}_0)$  ist damit die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\eta}{dt} = B^*(t) \eta + \varepsilon^*(t), \quad \eta(t_0) = \eta_0; \quad (6.250)$$

$$\varepsilon^*(t) := P_{(1,2)}(t) \varepsilon(t); \quad \eta_0 := P_{(1,2)}(t_0) \delta \mathbf{x}_0; \quad (6.251)$$

$$B^*(t) := \dot{P}_{(1,2)}(t) P_{(2,1)}(t) + P_{(1,2)}(t) A(t) P_{(2,1)}(t).$$

Man bezeichnet (6.250) als *V-transformiertes Störungsanfangswertproblem*.

Wie hier nicht bewiesen werden soll, bestehen die Beziehungen<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^\circ(t) &\equiv \mathbf{B}^*(t); \\ \zeta_0 &\approx \boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{P}_{(1,2)}(t_0) \delta \mathbf{x}_0; \\ \boldsymbol{\varepsilon}^\circ(t) &\equiv \varrho(t) \boldsymbol{\varepsilon}^*(t) = \varrho(t) \mathbf{P}_{(1,2)}(t) \mathbf{e}(t); \\ \varrho(t) &:= \frac{\dot{s}(t)}{\dot{s}(t) + \mathbf{j}^\top(t) \mathbf{e}(t)}; \end{aligned} \quad (6.252)$$

mit  $\mathbf{j}(t)$  aus (6.95). Für  $\mathbf{j}^\top(t) \mathbf{e}(t)/\dot{s}(t) \leq M \ll 1$  strebt  $\varrho(t) \rightarrow 1$ .

Bei der Behandlung von angewandten Aufgaben der Ballistik wird im allgemeinen von vornherein  $\varrho(t) \equiv 1$  angenommen (sogenannte *2. Linearisierung*). Die linearen Störungsanfangswertprobleme (6.249) und (6.250) sind dann gleichwertig.

Benötigt man die Elemente der Matrix  $\mathbf{B}^\circ(t)$  explizit, so empfiehlt es sich in der Regel, zunächst das transformierte ungestörte Anfangswertproblem aufzustellen und die Beziehungen (6.247) bis (6.248) zu benutzen.

Bei der Anwendung der Beziehung (6.251) ist zu beachten, daß  $\dot{\mathbf{P}}_{(1,2)}(t) \neq \dot{\mathbf{P}}_{(2,1)}(t)$  ist.

Es sei  $\mathbf{C}(t)$  eine differenzierbare und nichtsinguläre, sonst aber beliebige quadratische Matrix. Wie man durch Differentiation von  $\mathbf{C}(t) \mathbf{C}^{-1}(t) = \mathbf{I}_n$  nach  $t$  zeigt, gilt

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{C}^{-1}(t)] = -\mathbf{C}^{-1}(t) \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{C}(t) \right] \mathbf{C}^{-1}(t).$$

Hieraus folgt mit  $\mathbf{C}(t) = \mathbf{P}_{(1,2)}(t)$  und  $\mathbf{C}^{-1}(t) = \mathbf{P}_{(2,1)}(t)$ :

$$\dot{\mathbf{P}}_{(2,1)}(t) = -\mathbf{P}_{(2,1)}(t) \dot{\mathbf{P}}_{(1,2)}(t) \mathbf{P}_{(2,1)}(t).$$

### 6.7.5. Die Lösung des inhomogenen Störungsanfangswertproblems<sup>2)</sup>

Die allgemeine Lösung eines Systems von  $n$  inhomogenen linearen Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung setzt sich zusammen aus  $n$  linear unabhängigen Lösungen des homogenen Systems, dem sogenannten *Fundamentalsystem*, und einer speziellen Lösung des inhomogenen

<sup>1)</sup> Hinsichtlich der Beweise siehe [24].

<sup>2)</sup> In diesem Abschnitt werden Grundkenntnisse über die Integration von Systemen linearer Differentialgleichungen vorausgesetzt.

Differentialgleichungssystems.<sup>1)</sup> Die Matrix, die die  $n$ -Fundamentallösungen als Spaltenvektoren enthält, heißt *Fundamentalmatrix*.

Es sei  $\Phi_{(1)}(t)$  für  $t \in [t_0, t_e]$  eine Fundamentalmatrix des linearen homogenen Differentialgleichungssystems

$$\frac{d\xi}{dt} = A(t) \xi, \quad (6.253)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{(1)}(t) &= [\kappa^1(t), \kappa^2(t), \dots, \kappa^n(t)] \\ &= \begin{bmatrix} \kappa^{11}(t) & \kappa^{12}(t) & \dots & \kappa^{1n}(t) \\ \kappa^{21}(t) & \kappa^{22}(t) & \dots & \kappa^{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa^{n1}(t) & \kappa^{n2}(t) & \dots & \kappa^{nn}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ferner sei  $\Psi_{(1)}(t)$  eine Fundamentalmatrix des zu (6.253) adjungierten Differentialgleichungssystems

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dt} = -A^T(t) \tilde{\xi}. \quad (6.254)$$

Dann kann die Lösung  $\xi = \kappa(t; t_0, \xi_0)$  des homogenen Anfangswertproblems

$$\frac{d\xi}{dt} = A(t) \xi, \quad \xi(t_0) = \xi_0 \quad (6.255)$$

in der Form dargestellt werden

$$\xi = \kappa(t; t_0, \xi_0) \equiv \Omega_{(1)}(t, t_0) \xi_0. \quad (6.256)$$

Die Matrix  $\Omega_{(1)}(t, \tau)$ , die im folgenden *Cauchy-Matrix* genannt werden soll, kann explizit angegeben werden, wenn entweder eine Fundamentalmatrix  $\Phi_{(1)}(t)$  des homogenen Systems (6.253) oder eine Fundamentalmatrix  $\Psi_{(1)}(t)$  des adjungierten Systems (6.254) bekannt ist. Es gilt

$$\Omega_{(1)}(t, \tau) = \begin{cases} \Phi_{(1)}(t) [\Phi_{(1)}(\tau)]^{-1}, \\ [\Psi_{(1)}^T(t)]^{-1} \Psi_{(1)}^T(\tau). \end{cases} \quad (6.257)$$

<sup>1)</sup> Siehe etwa *Petrowski, I. G.: Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*. Leipzig 1954.

<sup>2)</sup> Der Index „(1)“ deutet an, daß die Fundamentalmatrix zu den zugeordneten linearen Störungsdifferentialgleichungen im  $\Sigma_{(1)}$ -System gehört.

Als Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\frac{d\xi}{dt} = A(t)\xi + e(t), \quad \xi(t_0) = \xi_0 \quad (6.258)$$

ergibt sich damit<sup>1)</sup>:

$$\xi = \kappa(t; t_0, \xi_0) \equiv \Omega_{(1)}(t, t_0) \xi_0 + \int_{t_0}^t \Omega_{(1)}(t, \tau) e(\tau) d\tau. \quad (6.259)$$

Die Cauchy-Matrix hat, wie sich leicht beweisen läßt, folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \Omega_{(1)}(t, \tau) &= \Omega_{(1)}(t, s) \Omega_{(1)}(s, \tau); \\ \Omega_{(1)}(t, t) &= I_n; \end{aligned} \quad (6.260)$$

$$\begin{aligned} [\Omega_{(1)}(t, \tau)]^{-1} &= \Omega_{(1)}(\tau, t); \\ \frac{\partial}{\partial t} \Omega_{(1)}(t, \tau) &= A(t) \Omega_{(1)}(t, \tau); \end{aligned} \quad (6.261)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \Omega_{(1)}(t, \tau) &= -\Omega_{(1)}(t, \tau) A(\tau); \\ \frac{\partial}{\partial t} [\Omega_{(1)}(t, \tau)]^{-1} &= -\Omega_{(1)}(\tau, t) A(t); \end{aligned} \quad (6.262)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} [\Omega_{(1)}(t, \tau)]^{-1} &= A(\tau) \Omega_{(1)}(\tau, t); \\ \det \Omega_{(1)}(t, t_0) &= \exp \left\{ \int_{t_0}^t \text{sp } A(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (6.263)$$

Unter Benutzung dieser Beziehungen kann man leicht nachweisen, daß (6.259) das Anfangswertproblem (6.258) identisch erfüllt.

Differentiation von (6.259) nach  $t$  ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \Omega_{(1)}(t, t_0) \xi_0 + \Omega_{(1)}(t, t) e(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} \Omega_{(1)}(t, \tau) e(\tau) d\tau.$$

<sup>1)</sup> Die Herleitung erfolgt nach der Methode der „Variation der Konstanten“.

Mit (6.260) und (6.261) folgt hieraus

$$\begin{aligned} & A(t) \Omega_{(1)}(t, t_0) \xi_0 + \int_{t_0}^t A(\tau) \Omega_{(1)}(t, \tau) e(\tau) d\tau + e(t) \\ &= A(t) \left[ \Omega_{(1)}(t, t_0) \xi_0 + \int_{t_0}^t \Omega_{(1)}(t, \tau) e(\tau) d\tau \right] + e(t) \\ &= A(t) \kappa(t; t_0, \xi_0) + e(t). \end{aligned}$$

Kennt man *eine* Fundamentalmatrix der homogenen Differentialgleichungssysteme (6.253) bzw. (6.254), so kann man hieraus – ohne erneute Integration von Differentialgleichungen – eine Fundamentalmatrix der homogenen V-transformierten Störungsdifferentialgleichungen (6.250) gewinnen.

Die homogenen V-transformierten Störungsdifferentialgleichungen lauten

$$\frac{d\eta}{dt} = B^*(t) \eta, \quad \eta = P_{(1,2)}(t) \xi, \quad (6.264)$$

das hierzu adjungierte System hat die Gestalt

$$\frac{d\tilde{\eta}}{dt} = -[B^*(t)]^T \tilde{\eta}. \quad (6.265)$$

Dann ist

$$\Phi_{(2)}(t) = P_{(1,2)}(t) \Phi_{(1)}(t) \quad (6.266)$$

eine Fundamentalmatrix von (6.264) und

$$\Psi_{(2)}(t) = [P_{(2,1)}(t)]^T \Psi_{(1)}(t) \quad (6.267)$$

eine Fundamentalmatrix des adjungierten Systems (6.265).

Zum Beweis dieser Behauptungen hat man zu zeigen, daß die Beziehungen

$$\frac{d}{dt} [\Phi_{(2)}(t)] = B^*(t) \Phi_{(2)}(t);$$

$$\frac{d}{dt} [\Psi_{(2)}(t)] = -[B^*(t)]^T \Psi_{(2)}(t)$$

mit (6.266) bzw. (6.267) identisch erfüllt sind (siehe Übungsaufgabe 6.16.).

## 6.7.6. Normierung der Fundamentalmatrix

### 6.7.6.1. Aufgabenstellung

Dem klassischen Bahnmodell für die Flugbahnelemente im luftgefüllten Raum liegen die *Newton'schen* Bewegungsgleichungen für einen Massenpunkt zugrunde. Die physikalischen Überlegungen zur Herleitung der Anfangsstörungen und Störfunktionen liefern die Störungsterme deshalb zunächst für die Vergleichsvariable  $t$  (siehe Abschnitt 6.2.). Die Flugzeit  $t$  ist (auf Grund der Struktur der benutzten physikalischen Theorie) somit als „natürliche Vergleichsvariable“ anzusehen.

In der Ballistik von Bahnen der Klasse Boden – Boden ist die Vergleichsvariable  $t$  von untergeordneter Bedeutung: Die Ergebnisse der Störungsrechnung werden vorwiegend bezüglich der Vergleichsvariablen  $x$  (Beschluß vertikaler Ziele) oder der Vergleichsvariablen  $y$  (Beschluß von horizontalen Flächenzielen) benötigt.

Um die Störungen der Bahnelemente in dem gewünschten Vergleichsvariablen-System zu erhalten, kann man in unterschiedlicher Weise vorgehen:

- Man integriert das Störungsanfangswertproblem, das den *Newton'schen* Bewegungsgleichungen zugeordnet ist, und transformiert den Störungsvektor anschließend von der Vergleichsvariablen  $t$  auf die gewünschte Vergleichsvariable.
- Aus dem „natürlichen“ linearen Anfangswertproblem (Vergleichsvariable:  $t$ ) wird durch eine Vergleichsvariablen-Transformation das  $V$ -transformierte lineare Störungsanfangswertproblem hergeleitet, das die gewünschte Vergleichsvariable besitzt. Durch Integration dieses neuen Störungsanfangswertproblems erhält man den resultierenden Störungsvektor der Bahnelemente unmittelbar (d.h. ohne weitere Transformationen).

Zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung von Störungsproblemen wird häufig ein dritter Weg eingeschlagen: Man transformiert das „natürliche“ Störungsanfangswertproblem zunächst in ein Vergleichsvariablen-System, das für die Integration der Störungsdifferentialgleichungen besonders gut geeignet ist. Im Anschluß an die Integration wird der ermittelte Störungsvektor (bzw. die Fundamentalmatrix) auf die in der Aufgabenstellung geforderte endgültige Vergleichsvariable transformiert.

Wie aus (6.257) und (6.259) ersichtlich ist, reduziert sich die Aufgabe,



den Einfluß von Störungen auf die Bahnelemente zu ermitteln, mathematisch im wesentlichen darauf, eine Fundamentalmatrix der homogenen Störungsdifferentialgleichungen (in einem beliebigen Variablen-system) zu finden. Bei einem Anfangswertproblem, das aus  $n$  Differentialgleichungen besteht, müssen somit  $n$  linear unabhängige Lösungen bekannt sein.

Bei dem außenballistischen Störungsanfangswertproblem für das klassische Bahnmodell sind die Elemente der Koeffizientenmatrix komplizierte, im allgemeinen nur tabellarisch gegebene Funktionen von  $t$ , so daß die Fundamentallösungen durch wiederholte numerische Integration der homogenen Störungsdifferentialgleichungen gewonnen werden müssen.<sup>1)</sup>

### 6.7.6.2. Die verallgemeinerte Cauchy-Matrix

Die Anfangsstörungen und die Störfunktionen seien bezüglich des  $(t, \mathbf{x})$ -Systems in der Form  $\xi_0 = \delta \mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{e} = \mathbf{e}(t)$  gegeben. Die Fundamentalmatrix werde durch wiederholte ( $n$ -malige) Integration eines der V-transformierten linearen Störungsdifferentialgleichungssysteme (6.264) oder (6.265) ermittelt, während der resultierende Störungsvektor  $\lambda$  in einem Variablensystem  $\Sigma_{(3)}$  anzugeben sei, dem die Vergleichsvariable  $r$  zugrunde liege.

Der resultierende Störungsvektor  $\lambda$  folge aus dem Lösungsvektor  $\chi(t)$  des V-transformierten Störungsanfangswertproblems (6.250) durch Multiplikation mit der VT-Matrix  $P_{(2,3)}(t)$ :

$$\lambda(t) = P_{(2,3)}(t) \chi(t). \quad (6.268)$$

In Analogie zu (6.259) ist für den resultierenden Störungsvektor  $\lambda$  die Darstellung möglich

$$\lambda(t) = \Omega_{(3)}(t, t_0) \lambda_0 + \int_{t_0}^t \Omega_{(3)}(t, \tau) \tilde{\mathbf{e}}(\tau) d\tau, \quad (6.269)$$

$$\lambda_0 = P_{(1,3)}(t_0) \xi_0; \quad \tilde{\mathbf{e}}(t) = P_{(1,3)}(t) \mathbf{e}(t).$$

Da die Ermittlung der Fundamentalmatrix nach Voraussetzung durch Integration des homogenen Systems (6.264) bzw. des hierzu adjungierten Systems (6.265) erfolgt, sind die Fundamentalmatrizen  $\Phi_{(2)}(t)$ ,

<sup>1)</sup> Hinsichtlich der Ermittlung der Fundamentallösungen siehe auch Abschnitt 6.7.7.

$\Psi_{(2)}(t)$  als bekannt anzusehen, so daß man unter Beachtung von (6.266) für  $\Omega_{(3)}(t, \tau)$  schreiben kann

$$\begin{aligned}\Omega_{(3)}(t, \tau) &= \Phi_{(3)}(t) [\Phi_{(3)}(\tau)]^{-1} \\ &= P_{(2,3)}(t) \Phi_{(2)}(t) [P_{(2,3)}(\tau) \Phi_{(2)}(\tau)]^{-1} \\ &= P_{(2,3)}(t) \Phi_{(2)}(t) [\Phi_{(2)}(\tau)]^{-1} P_{(3,2)}(\tau), \\ \Omega_{(3)}(t, \tau) &= P_{(2,3)}(t) \Omega_{(2)}(t, \tau) P_{(3,2)}(\tau).\end{aligned}\quad (6.270)$$

Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn man die *Cauchy-Matrix* durch die *Fundamentalmatrix* des adjungierten Systems darstellt und (6.267) beachtet.

Einsetzen von (6.270) in (6.269) liefert für  $\lambda(t)$ :

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= P_{(2,3)}(t) \Omega_{(2)}(t, t_0) P_{(3,2)}(t_0) P_{(1,3)}(t_0) \xi_0 \\ &\quad + \int_{t_0}^t P_{(2,3)}(t) \Omega_{(2)}(t, \tau) P_{(3,2)}(\tau) P_{(1,3)}(\tau) e(\tau) d\tau.\end{aligned}\quad (6.271)$$

Auf Grund der Eigenschaft (6.99) der VT-Matrizen gilt

$$P_{(3,2)}(t_0) P_{(1,3)}(t_0) = P_{(1,2)}(t_0);$$

$$P_{(3,2)}(\tau) P_{(1,3)}(\tau) = P_{(1,2)}(\tau).$$

Führt man eine *verallgemeinerte Cauchy-Matrix*  $H_{(2)}^{(1,3)}(t, \tau)$  ein gemäß

$$H_{(2)}^{(1,3)}(t, \tau) := P_{(2,3)}(t) \Omega_{(2)}(t, \tau) P_{(1,2)}(\tau),$$

so erhält man für den resultierenden Störungsvektor

$$\lambda(t) = H_{(2)}^{(1,3)}(t, t_0) \xi_0 + \int_{t_0}^t H_{(2)}^{(1,3)}(t, \tau) e(\tau) d\tau.\quad (6.272)$$

Die verallgemeinerte *Cauchy-Matrix* lautet ausführlich:

$$H_{(2)}^{(1,3)}(t, \tau) = \begin{cases} P_{(2,3)}(t) \Phi_{(2)}(t) [\Phi_{(2)}(\tau)]^{-1} P_{(1,2)}(\tau); \\ P_{(2,3)}(t) [\Psi_{(2)}^T(t)]^{-1} \Psi_{(2)}^T(\tau) P_{(1,2)}(\tau). \end{cases}$$

Der Rechenaufwand zur Ermittlung der verallgemeinerten *Cauchy-Matrix* läßt sich merklich verringern, wenn man die Anfangsbedingungen der Fundamentallösungen in geeigneter Weise wählt.

Bei dieser *Normierung der Fundamentalmatrizen* unterscheidet man zweckmäßigerweise zwei Fälle:

- Der resultierende Störungsvektor  $\lambda(t)$  wird (von der Aufgabenstellung her) nur in einem einzigen Punkt  $t = t^* > t_0$  benötigt.
- Der resultierende Störungsvektor  $\lambda(t)$  ist in  $n$  ( $n > 1$ ) Flugbahnpunkten  $t = t_i, t_i \in [t_0, t_e]$  gefragt.

### 6.7.6.3. Normierung der Fundamentalmatrix bei festem Endpunkt des Integrationsintervalls

Wird der resultierende Störungsvektor nur in einem einzigen Punkt  $t = t^* > t_0$  benötigt, normiert man die Fundamentalmatrizen  $\Phi_{(2)}(t), \Psi_{(2)}(t)$  zweckmäßigerweise so, daß die Bedingungen erfüllt sind

$$\begin{aligned} P_{(2,3)}(t^*) \Phi_{(2)}(t^*) &= I_n; \\ P_{(2,3)}(t^*) [\Psi_{(2)}^T(t^*)]^{-1} &= I_n. \end{aligned} \quad (6.273)$$

Um (6.273) zu genügen, hat man die Störungsdifferentialgleichungen (6.264) mit der Anfangsbedingung

$$\Phi_{(2)}(t^*) = P_{(3,2)}(t^*) \quad (6.274)$$

beziehungsweise die adjungierten Störungsdifferentialgleichungen (6.265) mit der Anfangsbedingung

$$\Psi_{(2)}(t^*) = [P_{(2,3)}(t^*)]^T \quad (6.275)$$

„rückwärts“ von  $t = t^* > t_0$  bis  $t = t_0$  zu integrieren.

Ist (6.273) erfüllt, so vereinfacht sich die Störungsformel (6.272) zu

$$\begin{aligned} \lambda(t^*) &= [\Phi_{(2)}(t_0)]^{-1} P_{(1,2)}(t_0) \xi_0 \\ &+ \int_{t_0}^{t^*} [\Phi_{(2)}(\tau)]^{-1} P_{(1,2)}(\tau) e(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6.276)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \lambda(t^*) &= [\Psi_{(2)}(t_0)]^T P_{(1,2)}(t_0) \xi_0 \\ &+ \int_{t_0}^{t^*} [\Psi_{(2)}(\tau)]^T P_{(1,2)}(\tau) e(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6.277)$$

Im allgemeinen wird man der letzten Formel den Vorzug geben, da hier keine Invertierung der Fundamentalmatrix erforderlich ist.

Ist nur eine einzige Komponente des resultierenden Störungsvektors  $\lambda(t^*)$  gefragt [etwa  $\lambda^k(t^*)$ ], so ist die Darstellung (6.277), die auf der Fundamentalmatrix des adjungierten Differentialgleichungssystems aufbaut, der Formel (6.276) überlegen: Um (6.276) benutzen zu können, muß das normierte Fundamentalsystem vollständig bekannt sein, während man bei Formel (6.277) mit einer einzigen Lösung des adjungierten Differentialgleichungssystems (6.265) auskommt.

Es sei  $\psi^k(t)$  der Lösungsvektor des adjungierten Differentialgleichungssystems (6.265) mit der Anfangsbedingung

$$\psi^k(t^*) = \begin{bmatrix} P_{(2,3)}^{k1}(t^*) \\ P_{(2,3)}^{k2}(t^*) \\ \vdots \\ P_{(2,3)}^{kn}(t^*) \end{bmatrix};$$

$$p_{(2,3)}^{ij}(t) = [P_{(2,3)}(t)]^{ij} \quad (i, j = 1(1)n).$$

Damit folgt für die Komponente  $\lambda^k(t^*)$  des resultierenden Störungsvektors

$$\lambda^k(t^*) = [\psi^k(t_0)]^T P_{(1,2)}(t_0) \xi_0 + \int_{t_0}^{t^*} [\psi^k(\tau)]^T P_{(1,2)}(\tau) e(\tau) d\tau. \quad (6.278)$$

#### 6.7.6.4. Normierung der Fundamentalmatrix bei variablem Endpunkt des Integrationsintervalls

Wird der resultierende Störungsvektor  $\lambda(t)$  nicht nur in einem einzigen Punkt  $t = t^*$ , sondern für mehrere  $t$ -Werte benötigt ( $t_0 < t \leq t_e$ ), so empfiehlt es sich, die Normierungsbedingungen zu stellen:

$$\begin{aligned} [\Phi_{(2)}(t_0)]^{-1} P_{(1,2)}(t_0) &= I_n; \\ [\Psi_{(2)}(t_0)]^T P_{(1,2)}(t_0) &= I_n. \end{aligned} \quad (6.279)$$

Zur Ermittlung der Fundamentalmatrizen  $\Phi_{(2)}(t)$ ,  $\Psi_{(2)}(t)$  ist damit von den Anfangsbedingungen auszugehen

$$\Phi_{(2)}(t_0) = P_{(1,2)}(t_0); \quad \Psi_{(2)}(t_0) = [P_{(2,1)}(t_0)]^T; \quad (6.280)$$

die Integration erfolgt von  $t = t_0$  bis (in der Regel)  $t = t_e$ .

Infolge der Normierungsbedingungen (6.279) vereinfacht sich die Formel für den resultierenden Störungsvektor zu

$$\lambda(t) = P_{(2,3)}(t) \Phi_{(2)}(t) \left\{ \xi_0 + \int_{t_0}^t [\Phi_{(2)}(\tau)]^{-1} P_{(1,2)}(\tau) e(\tau) d\tau \right\}, \quad (6.281)$$

beziehungsweise bei Verwendung der Fundamentalmatrix des adjungierten Störungsangfangswertproblems:

$$\lambda(t) = P_{(2,3)}(t) \{ [\Psi_{(2)}(t)]^T \}^{-1} \left\{ \xi_0 + \int_{t_0}^t [\Psi_{(2)}(\tau)]^T P_{(1,2)}(\tau) e(\tau) d\tau \right\}. \quad (6.282)$$

Die Anfangsbedingungen für die Ermittlung der Fundamentalmatrizen sind in Tabelle 6.10 zusammengestellt.

Tabelle 6.10 *Anfangsbedingungen für die Ermittlung der Fundamentalmatrizen*

Fundamentalmatrix	Endpunkt des Integrationsintervalls	
	fest ( $t = t^*$ )	variabel
$\Phi_{(2)}(t)$	$\Phi_{(2)}(t^*) = P_{(3,2)}(t^*)$	$\Psi_{(2)}(t_0) = P_{(1,2)}(t_0)$
$\Psi_{(2)}(t)$	$\Psi_{(2)}(t^*) = [P_{(2,3)}(t^*)]^T$	$\Psi_{(2)}(t_0) = [P_{(2,1)}(t_0)]^T$

### \*6.7.7. Ermittlung und Invertierung von Fundamentalmatrizen

In diesem Abschnitt werden einige Fragen erörtert, die für die explizite Ermittlung und Invertierung von Fundamentalmatrizen von Bedeutung sind.

#### 6.7.7.1. Lineare Unabhängigkeit der Fundamentallösungen

Eine Fundamentalmatrix enthält als Spaltenvektoren linear unabhängige Lösungen der betreffenden homogenen Störungsdifferentialgleichungen, die im allgemeinen Fall durch wiederholte numerische Integration gewonnen werden müssen.

Die ermittelten Lösungen sind linear unabhängig, wenn für alle  $t \in [t_0, t^*]$  die Bedingungen

$$\det \Phi_{(2)}(t) \neq 0; \quad \det \Psi_{(2)}(t) \neq 0 \quad (6.283)$$

erfüllt sind.

Unter Beachtung der Definition (6.257) der *Cauchy-Matrix* folgt aus (6.263) die sogenannte *Formel von Liouville*:

$$\det \Phi_{(2)}(t) = \det \Phi_{(2)}(t_0) \cdot \exp \left\{ \int_{t_0}^t \text{sp } B^*(\tau) \, d\tau \right\}.$$

Entsprechend gilt

$$\det \Psi_{(2)}(t) = \det \Psi_{(2)}(t_0) \cdot \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \text{sp } B^*(\tau) \, d\tau \right\}. \quad (6.284)$$

Die Bedingungen (6.283) sind somit dann für alle  $t \in [t_0, t^*]$  erfüllt, wenn in *einem* Punkt des Integrationsintervalls  $t = t_0$  (bzw.  $t = t^*$ ) die Determinanten der Fundamentalmatrizen von Null verschieden sind.

Um die lineare Unabhängigkeit der Fundamentallösungen zu gewährleisten, genügt es, die Anfangsbedingungen so zu wählen, daß

$$\det \Phi_{(2)}(t_0) \neq 0, \quad \det \Psi_{(2)}(t_0) \neq 0$$

oder

$$\det \Phi_{(2)}(t^*) \neq 0, \quad \det \Psi_{(2)}(t^*) \neq 0$$

gewährleistet ist. Bei Normierung der Fundamentalmatrizen gemäß Tabelle 6.10 können diese Bedingungen durch Forderungen an die VT-Matrizen in den Punkten  $t = t_0$  bzw.  $t = t^*$  ersetzt werden.

#### 6.7.7.2. Ermittlung der Fundamentallösungen bei einem dynamischen System

Ein Differentialgleichungssystem, dessen „rechte Seiten“ die unabhängige Variable nicht explizit enthalten, wird in der Mechanik als *dynamisches System* bezeichnet. Von den in der Außenballistik verwendeten Systemen der Bewegungsgleichungen sind das  $t$ -System (4.9) und das  $x$ -System (4.25) dynamische Systeme.

Die dynamischen Systeme haben eine bemerkenswerte Eigenschaft: Die „rechten Seiten“ des ungestörten Anfangswertproblems, berechnet für die Normalbahn, sind zugleich Lösung der zugeordneten linearen homogenen Störungsdifferentialgleichungen.

Diese Behauptung läßt sich leicht beweisen.

## Das ungestörte Anfangswertproblem

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(t_0) = x_0$$

habe die Lösung  $x = x(t)$ . Die zugeordneten linearen homogenen Störungsdifferentialgleichungen lauten:

$$\frac{d\xi}{dt} = A(t) \xi, \quad A(t) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=x(t)}. \quad (6.285)$$

Differentiation von  $f[x(t)]$  nach  $t$  ergibt

$$\frac{df[x(t)]}{dt} = \frac{\partial f[x(t)]}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial f[x(t)]}{\partial x} f[x(t)]. \quad (6.286)$$

Der Vergleich von (6.286) mit (6.285) zeigt, daß  $\xi = f[x(t)]$  eine Lösung von (6.285) ist.

Bei einem dynamischen System kann man also *eine* Lösung der zugeordneten linearen homogenen Störungsdifferentialgleichungen sofort angeben. Die Anzahl der dann noch durch (numerische) Integration der Störungsdifferentialgleichungen zu ermittelnden Lösungen reduziert sich damit auf  $(n - 1)$ .

### 6.7.7.3. Ermittlung der Fundamentallösungen bei einem System von zwei gekoppelten linearen Differentialgleichungen

Umfaßt das System von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung, dessen Fundamentallösungen zu ermitteln sind, nur zwei homogene Differentialgleichungen 1. Ordnung, so genügt es, eine einzige Lösung durch numerische Integration zu ermitteln. Die zweite Fundamentallösung kann dann unter Verwendung der Formel von *Liouville* stets durch Quadraturen gewonnen werden.

Das vorgegebene Differentialgleichungssystem laute<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}^1 &= b^{11}(t) \zeta^1 + b^{12}(t) \zeta^2; \\ \dot{\zeta}^2 &= b^{21}(t) \zeta^1 + b^{22}(t) \zeta^2. \end{aligned} \quad (6.287)$$

<sup>1)</sup> Hochgestellte Indizes kennzeichnen die Komponenten der Störungsvektoren, die Elemente von Matrizen und die Nummern der Lösung. Ausdrücke, die zur Potenz erhoben werden sollen, werden in Klammern eingeschlossen.

Es sei

$$\zeta^1(t) = \begin{bmatrix} \zeta^{11}(t) \\ \zeta^{12}(t) \end{bmatrix}, \quad \zeta_0^1 = \begin{bmatrix} \zeta^{11}(t_0) \\ \zeta^{21}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.288)$$

die durch numerische Integration ermittelte Lösung von (6.287). Die zweite, noch zu ermittelnde und von (6.288) linear unabhängige Lösung sei

$$\zeta^2(t) = \begin{bmatrix} \zeta^{12}(t) \\ \zeta^{22}(t) \end{bmatrix}, \quad \zeta_0^2 = \begin{bmatrix} \zeta^{12}(t_0) \\ \zeta^{22}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.289)$$

Damit folgt

$$\det \Phi_{(2)}(t) = \begin{vmatrix} \zeta^{11}(t) & \zeta^{12}(t) \\ \zeta^{21}(t) & \zeta^{22}(t) \end{vmatrix}; \quad \det \Phi_{(2)}(t_0) = 1,$$

$$\text{sp } \mathbf{B}^*(t) = b^{11}(t) + b^{22}(t).$$

Nach der Formel von *Liouville* (6.284) muß gelten

$$\begin{aligned} & \zeta^{11}(t) \zeta^{22}(t) - \zeta^{21}(t) \zeta^{12}(t) \\ &= \exp \left\{ \int_{t_0}^t [b^{11}(\tau) + b^{22}(\tau)] d\tau \right\} =: D(t). \end{aligned} \quad (6.290)$$

Man bildet

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\zeta^{12}(t)}{\zeta^{11}(t)} \right] = \frac{\dot{\zeta}^{12}(t) \zeta^{11}(t) - \dot{\zeta}^{11}(t) \zeta^{12}(t)}{[\zeta^{11}(t)]^2}.$$

Die Ableitungen  $\dot{\zeta}^{12}(t)$  und  $\dot{\zeta}^{11}(t)$  können mit (6.287) eliminiert werden. Man erhält unter Beachtung von (6.290):

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\zeta^{12}(t)}{\zeta^{11}(t)} \right] = \frac{b^{12}(t)}{[\zeta^{11}(t)]^2} D(t).$$

Die Integration liefert

$$\zeta^{12}(t) = \zeta^{11}(t) \int_{t_0}^t \frac{b^{12}(\tau) D(\tau)}{[\zeta^{11}(\tau)]^2} d\tau. \quad (6.291)$$

Nachdem  $\zeta^{12}(t)$  bekannt ist, kann  $\zeta^{22}(t)$  aus (6.290) ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \zeta^{22}(t) &= \frac{\zeta^{12}(t) \zeta^{21}(t) + D(t)}{\zeta^{11}(t)} \\ &= \frac{D(t)}{\zeta^{11}(t)} + \int_{t_0}^t \frac{b^{12}(\tau) D(\tau)}{[\zeta^{11}(\tau)]^2} d\tau. \end{aligned} \quad (6.292)$$

Die zweite Lösung (6.289) ist damit berechnet.



Steht zur Bearbeitung eines vorgegebenen Störungsproblems ein leistungsfähiger Reihenautomat zur Verfügung, so wird man die zweite Fundamentallösung in der Regel auch durch numerische Integration der Störungsdifferentialgleichungen (6.287) ermitteln. Dies geht häufig rascher als die Berechnung nach (6.291), (6.292).

#### 6.7.7.4. Invertierung von Fundamentalmatrizen durch Integration der Störungsdifferentialgleichungen

Eine der Fundamentalmatrizen  $\Phi_{(2)}(t)$ ,  $\Psi_{(2)}(t)$  sei bekannt. Die Hauptschwierigkeit bei der numerischen Auswertung der Störungsformeln (6.281) und (6.282) besteht dann darin, die Fundamentalmatrizen invertieren zu müssen, und zwar an jeder Stützstelle des (numerischen) Quadraturalgorithmus.

Für die numerische Invertierung von beliebigen nichtsingulären Matrizen hat die praktische Mathematik leistungsfähige Verfahren bereitgestellt. Die Ermittlung der inversen Matrizen  $[\Phi_{(2)}(t)]^{-1}$  und  $[\Psi_{(2)}(t)]^{-1}$  kann jedoch im allgemeinen erheblich erleichtert werden, wenn man beachtet, daß  $\Phi_{(2)}(t)$  und  $\Psi_{(2)}(t)$  Fundamentalmatrizen sind.

Wie man leicht nachprüft, genügen die Matrizen  $\Phi_{(2)}(t)$  und  $\{[\Psi_{(2)}(t)]^T\}^{-1}$  der homogenen Matrizen-Differentialgleichung

$$\frac{d\Phi_*}{dt} = B^*(t) \Phi_*, \quad (6.293)$$

die Matrizen  $[\Phi_{(2)}(t)]^{-1}$  und  $[\Psi_{(2)}(t)]^T$  hingegen der zu (6.293) adjungierten Matrizen-Differentialgleichung

$$\frac{d\Psi_*}{dt} = -\Psi_* B^*(t). \quad (6.294)$$

Bei variablem Endpunkt des Integrationsintervalls und unter Wahrung der in Tabelle 6.10 angegebenen Normierungsbedingungen ist für den resultierenden Störungsvektor somit die Darstellung möglich

$$\lambda(t) = P_{(2,3)}(t) \Phi_*(t) \left[ \xi_0 + \int_{t_0}^t \Psi_*(\tau) P_{(1,2)}(\tau) e(\tau) d\tau \right], \quad (6.295)$$

mit  $\Phi_*(t)$  aus

$$\frac{d\Phi_*}{dt} = B^*(t) \Phi_*, \quad \Phi_*(t_0) = P_{(1,2)}(t_0) \quad (6.296)$$

und  $\Psi_*(t)$  aus

$$\frac{d\Psi_*}{dt} = -\Psi_* B^*(t), \quad \Psi_*(t_0) = P_{(2,1)}(t_0). \quad (6.297)$$

Gegenüber dem in Abschnitt 6.7.6. geschilderten Vorgehen ist jetzt die doppelte Anzahl von Integrationen erforderlich [Parallelintegration der Störungsdifferentialgleichungen (6.286) und (6.287)], dafür erübrigt sich die sehr aufwendige (numerische) Invertierung der Fundamentalmatrizen.

Entsprechend kann man bei der Normierungsbedingung für festen Endpunkt des Integrationsintervalls verfahren.

#### 6.7.7.5. Invertierung der Fundamentalmatrix durch Zerlegung in Blöcke

Die Invertierung von Fundamentalmatrizen kann häufig auch dadurch rechnerisch vereinfacht werden, daß man die Beziehungen zwischen der Struktur des speziellen Anfangswertproblems und der Struktur der Fundamentalmatrix beachtet. Das im folgenden skizzierte Verfahren benutzt das Fehlen der Kopplung zwischen einzelnen Differentialgleichungen für die Zerlegung der Fundamentalmatrix in Blöcke.

Treten in der Funktion  $f(t, \mathbf{x}) \equiv f(t, x^1, \dots, x^n)$  des ungestörten Anfangswertproblems

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.298)$$

nur die ersten  $p$  abhängigen Variablen  $x^1, x^2, \dots, x^p$  explizit auf, so sind die  $(n - p)$  Differentialgleichungen

$$\frac{dx^j}{dt} = f^j(t, x^1, \dots, x^p), \quad j = (p + 1)(1) n$$

nicht mit den ersten  $p$  Gleichungen von (6.298) gekoppelt, und die Koeffizientenmatrix  $A(t)$  der zugeordneten Störungsdifferentialgleichungen

$$\frac{d\xi}{dt} = A(t) \xi \quad (6.299)$$

hat die Struktur

$$A(t) = [A_1(t) \mid A_2(t)] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} a^{11}(t) & \dots & a^{1p}(t) & 0 & \dots & 0 \\ a^{21}(t) & \dots & a^{2p}(t) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n1}(t) & \dots & a^{np}(t) & 0 & \dots & 0 \end{array} \right],$$

$$[A_1(t)]^{ij} = a_1^{ij}(t) \neq 0; \quad [A_2(t)]^{ik} = a_2^{ik}(t) \equiv 0,$$

$$i = 1(1)n; \quad j = 1(1)p; \quad k = (p+1)(1)n.$$

Die spezielle Gestalt der Koeffizientenmatrix  $A(t)$  ermöglicht, die Invertierung der  $n \times n$ -Matrix  $\Phi_{(1)}(t)$  auf die Invertierung einer Matrix vom Format  $p \times p$  plus Matrizenmultiplikationen zurückzuführen.

Es seien

$$\xi^i(t) = [\xi^{1i}(t), \dots, \xi^{ni}(t)]^T, \quad i = 1(1)n$$

die Lösungen der  $n$  Anfangswertaufgaben:

$$\frac{d\xi}{dt} = A(t)\xi, \quad \xi(t_0) = \delta_n^i,$$

$$\delta_n^i := (\delta^{1i}, \dots, \delta^{ni})^T; \quad \delta^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu, \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Ferner seien  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$  und  $I_{n-p}$  Matrizen mit den Elementen

$$[C_1(t)]^{ik} = c_1^{ik}(t) = \zeta^{ik}(t), \quad i, k = 1(1)p;$$

$$[C_2(t)]^{jk} = c_2^{jk}(t) = \zeta^{jk}(t), \quad j = (p+1)(1)n;$$

$$[J_{n-p}]^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1(1)(n-p).$$

Dann ist  $\Phi_{(1)}(t)$ ,

$$\Phi_{(1)}(t) = \left[ \begin{array}{c|c} C_1(t) & \mathbf{0} \\ \hline C_2(t) & I_{n-p} \end{array} \right], \quad \Phi_{(1)}(t_0) = I_n \quad (6.300)$$

eine Fundamentalmatrix von (6.299), und ihre Inverse lautet<sup>1)</sup>:

$$[\Phi_{(1)}(t)]^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} [C_1(t)]^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline -C_2(t) [C_1(t)]^{-1} & I_{n-p} \end{array} \right]. \quad (6.301)$$

Man prüft sofort nach, daß  $\Phi_{(1)}(t) [\Phi_{(1)}(t)]^{-1} = I_n$  erfüllt ist.

<sup>1)</sup> Es wird vorausgesetzt, daß  $[C(t)]^{-1}$  für alle  $t \in [t_0, t_e]$  existiert.

Zur Herleitung von (6.301) setzt man die Kehrmatrix in der Form

$$\Phi_{(1)}^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline U & V \end{array} \right]$$

an, worin  $X, Y, U, V$  unbekannte Blockmatrizen sind, die sich aus der Bedingungsgleichung  $\Phi_{(1)} \Phi_{(1)}^{-1} = I_n$  berechnen lassen.

## 6.8. Die linearen ballistischen Störungsdifferentialgleichungen

Ausgehend von den allgemeinen Ausführungen in Abschnitt 6.7. zur Aufstellung, Transformation und Integration von linearen Störungsdifferentialgleichungen, beschäftigt sich dieser Abschnitt mit der Integration der linearen ballistischen Störungsdifferentialgleichungen für das klassische Bahnmodell.

### 6.8.1. Die linearen Störungsdifferentialgleichungen im $t$ -System

Um die wesentlichen Besonderheiten der Ableitungen klar hervortreten und die auftretenden Matrizen nicht zu unhandlich werden zu lassen, werden zunächst nur *die* Störeinflüsse auf die Bahnelemente berücksichtigt, die keine Seitenabweichungen hervorrufen. Diejenigen Störeinflüsse, die zu einer Seitenabweichung führen, werden getrennt in Abschnitt 6.8.4. behandelt. Im Rahmen der linearen Störungstheorie ist die nachträgliche Überlagerung beider Gruppen von Störungen zulässig.

#### 6.8.1.1. Die Berechnung der Koeffizientenmatrix

Um die Koeffizientenmatrix  $A_{(1)}(t)$  der linearen Störungsdifferentialgleichungen im  $t$ -System  $\Sigma_{(1)} = \{t; x, y, u, w\}$  zu berechnen, hat man die „rechten Seiten“ des Differentialgleichungssystems (4.9),

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u && =: f_{(1)}^x, \\ \frac{dy}{dt} &= w && =: f_{(1)}^y, \\ \frac{du}{dt} &= -E u && =: f_{(1)}^u, \\ \frac{dw}{dt} &= -E w - g_0 && =: f_{(1)}^w \end{aligned} \tag{6.302}$$

partiell nach  $x, y, u, w$  zu differenzieren. Diese partiellen Ableitungen, bezogen auf die Normalbahn, bilden die Elemente  $a_{(1)}^{ij}(t)$  der Matrix  $A_{(1)}(t)$ :

$$\begin{aligned}
 A_{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} a_{(1)}^{11}(t) & a_{(1)}^{12}(t) & a_{(1)}^{13}(t) & a_{(1)}^{14}(t) \\ a_{(1)}^{21}(t) & a_{(1)}^{22}(t) & a_{(1)}^{23}(t) & a_{(1)}^{24}(t) \\ a_{(1)}^{31}(t) & a_{(1)}^{32}(t) & a_{(1)}^{33}(t) & a_{(1)}^{34}(t) \\ a_{(1)}^{41}(t) & a_{(1)}^{42}(t) & a_{(1)}^{43}(t) & a_{(1)}^{44}(t) \end{bmatrix} \quad (6.303) \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{(1)}^x}{\partial x} & \frac{\partial f_{(1)}^x}{\partial y} & \frac{\partial f_{(1)}^x}{\partial u} & \frac{\partial f_{(1)}^x}{\partial w} \\ \frac{\partial f_{(1)}^y}{\partial x} & \frac{\partial f_{(1)}^y}{\partial y} & \frac{\partial f_{(1)}^y}{\partial u} & \frac{\partial f_{(1)}^y}{\partial w} \\ \frac{\partial f_{(1)}^u}{\partial x} & \frac{\partial f_{(1)}^u}{\partial y} & \frac{\partial f_{(1)}^u}{\partial u} & \frac{\partial f_{(1)}^u}{\partial w} \\ \frac{\partial f_{(1)}^w}{\partial x} & \frac{\partial f_{(1)}^w}{\partial y} & \frac{\partial f_{(1)}^w}{\partial u} & \frac{\partial f_{(1)}^w}{\partial w} \end{bmatrix}_N \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\partial E}{\partial y} u & -E - \frac{\partial E}{\partial u} u & -\frac{\partial E}{\partial w} u \\ 0 & -\frac{\partial E}{\partial y} w & -\frac{\partial E}{\partial w} w & -E - \frac{\partial E}{\partial w} w \end{bmatrix}_N.
 \end{aligned}$$

Die Fallbeschleunigung  $g$  ist bei der Differentiation als konstant vorausgesetzt worden:  $g = g_0 = \text{const.}$

Die Ableitungen  $\partial E/\partial y$  und  $\partial E/\partial v$  können Abschnitt 5.5.3. entnommen werden:

$$\frac{\partial E}{\partial y} = E\chi; \quad \chi := -\frac{\Lambda_{1N}^*}{\tau} \left[ \frac{n(v_r)}{2} - \sigma_1 \right];$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{E}{v} [n(v_r) - 1]; \quad v = \sqrt{u^2 + w^2}.$$

Damit ergibt sich für  $\partial E/\partial u$  und  $\partial E/\partial w$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E}{\partial u} &= \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u} = \frac{E u}{v^2} (n - 1); \\
 \frac{\partial E}{\partial w} &= \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w} = \frac{E w}{v^2} (n - 1).
 \end{aligned} \quad (6.304)$$

Setzt man dies in (6.303) ein, so nimmt  $A_{(1)}(t)$  die endgültige Gestalt an

$$A_{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -Eu\chi & -E[1 + (\hat{n} - 1) \cos^2 \vartheta] & -\frac{1}{2} E (\hat{n} - 1) \sin 2\vartheta \\ 0 & -Ew\chi & -\frac{1}{2} E (\hat{n} - 1) \sin 2\vartheta & -E[1 + (\hat{n} - 1) \sin^2 \vartheta] \end{bmatrix}_N. \quad (6.305)$$

Der Störungsvektor

$$\xi_{(1)}(t) = [\xi_{(1)}^x(t), \xi_{(1)}^y(t), \xi_{(1)}^u(t), \xi_{(1)}^w(t)]^T,$$

der den Einfluß der Anfangsstörung  $\xi_{(1)}(t_0)$  und der Störfunktion  $e_{(1)}(t)$  auf die Bahnelemente  $x, y, u, w$  für die Vergleichsvariable  $t$  angibt, ist der Lösungsvektor des linearen inhomogenen Störungsanfangswertproblems

$$\frac{d\xi_{(1)}}{dt} = A_{(1)}(t) \xi_{(1)} + e_{(1)}(t), \quad \xi_{(1)}(t_0) = (\xi_{(1)})_0. \quad (6.306)$$

Gemäß der Definition des Variablensystems  $\Sigma'_{(1)}$  bezieht sich dieses Störungsanfangswertproblem auf die Vergleichsvariable  $t$ . Will man nur auf die Vergleichsvariable, nicht auf das Variablensystem hinweisen, so kann man an Stelle von  $\xi_{(1)}$  auch kurz  $\xi^r$  schreiben.<sup>1)</sup>

Das Störungsanfangswertproblem (6.306) lautet ausführlich:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^x &= \xi^u + e_{(1)}^x(t); \\ \dot{\xi}^y &= \xi^w + e_{(1)}^y(t); \\ \dot{\xi}^u &= a_{(1)}^{32}(t) \xi^y + a_{(1)}^{33}(t) \xi^u + a_{(1)}^{34}(t) \xi^w + e_{(1)}^u(t); \\ \dot{\xi}^w &= a_{(1)}^{42}(t) \xi^y + a_{(1)}^{43}(t) \xi^u + a_{(1)}^{44}(t) \xi^w + e_{(1)}^w(t); \end{aligned} \quad (6.307)$$

$$\begin{aligned} a_{(1)}^{32}(t) &= -\hat{E} \hat{u} \hat{\lambda}; \\ a_{(1)}^{33}(t) &= -\hat{E} [1 + (\hat{n} - 1) \cos^2 \vartheta]; \\ a_{(1)}^{34}(t) &= a_{(1)}^{43}(t) = -\frac{1}{2} \hat{E} (\hat{n} - 1) \sin 2\vartheta; \\ a_{(1)}^{42}(t) &= -\hat{E} \hat{w} \hat{\lambda}; \\ a_{(1)}^{44}(t) &= -\hat{E} [1 + (\hat{n} - 1) \sin^2 \vartheta]; \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Diese Bezeichnungsweise ist z. B. in Abschnitt 6.3.2. benutzt worden.

mit den Anfangsbedingungen

$$\xi_{(1)}(t_0) = [(\xi_{(1)}^x)_0, (\xi_{(1)}^y)_0, (\xi_{(1)}^w)_0]^T, \quad (6.308)$$

oder in anderer Schreibweise

$$\xi_0^t = (\xi_0^{x,t}, \xi_0^{y,t}, \xi_0^{u,t}, \xi_0^{w,t})^T. \quad (6.309)$$

Die Darstellung (6.309) ist, falls keine Mißverständnisse zu befürchten sind, auf Grund ihrer Übersichtlichkeit zu bevorzugen.

Entsprechend kann man die Störfunktion  $e_{(1)}(t)$  ansetzen:

$$e_{(1)}(t) \hat{=} e^t(t) = [e^{x,t}(t), e^{y,t}(t), e^{u,t}(t), e^{w,t}(t)]^T. \quad (6.310)$$

Wie man erkennt, sind in (6.307) nur die letzten drei Gleichungen gekoppelt.

Die explizite Gestalt der Anfangsstörung  $\xi_{(1)}(t_0)$  und der Störfunktion  $e_{(1)}(t)$  ist Abschnitt 6.2. zu entnehmen.

### 6.8.1.2. Die Störfunktion bei Änderung des Ballistischen Koeffizienten

Ändert sich allein der Ballistische Koeffizient des Geschosses, so tritt keine Anfangsstörung auf, jedoch gemäß (6.3) eine von Null verschiedene Störfunktion:

$$\begin{aligned} e_c^t(t) &= \begin{bmatrix} e_c^{x,t}(t) \\ e_c^{y,t}(t) \\ e_c^{u,t}(t) \\ e_c^{w,t}(t) \end{bmatrix} \equiv \frac{\delta c}{\hat{c}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{E}\hat{u} \\ -\hat{E}\hat{w} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{\delta c}{\hat{c}} \hat{E} \hat{u} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \tan \vartheta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.311)$$

Mit dem Hilfsvektor  $v^t(t)$ ,

$$v^t(t) := -E u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \tan \vartheta \end{bmatrix}, \quad (6.312)$$

erhält man bei Änderung des Ballistischen Koeffizienten:

$$\xi_c^t(t_0) = 0; \quad e_c^t(t) = \hat{v}^t(t) \frac{\delta c}{\hat{c}}. \quad (6.313)$$

Diese Darstellung läßt sich verallgemeinern für den Fall, daß sich die Verzögerungsfunktion  $E$ , die den Einfluß des Luftwiderstands auf die Geschosßbewegung charakterisiert, durch irgendwelche anderen Störeinflüsse um  $\delta E$  ändert:

$$\xi_E^t(t_0) = 0; \quad e_E^t(t) = \hat{v}^t(t) \frac{\delta E}{\hat{E}}. \quad (6.314)$$

Störungen von  $E$  treten bei Abweichungen des Luftdrucks und der Lufttemperatur von den Verteilungen der Normalatmosphäre sowie bei Änderungen des Standard-Luftwiderstandsgesetzes auf.

Der Störungskoeffizienten-Vektor  $\sigma_c^t(t|\hat{\mu})$ ,

$$\sigma_c^t(t|\hat{\mu}) = \begin{bmatrix} X_c^t(t|\hat{\mu}) \\ Y_c^t(t|\hat{\mu}) \\ U_c^t(t|\hat{\mu}) \\ W_c^t(t|\hat{\mu}) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{v}_0 \\ \hat{\vartheta}_0 \end{bmatrix} \quad (6.315)$$

unterscheidet sich von der Lösung des Anfangswertproblems (6.306), (6.307) nur um den Faktor  $\delta c$ :

$$\xi_c^{(1)}(t|\hat{\mu}) = \sigma_c^{(1)}(t|\hat{\mu}) \cdot \delta c. \quad (6.316)$$

Entsprechendes gilt für die anderen Parameterstörungen.

### 6.8.1.3. Die Anfangsstörung bei Änderung der Mündungsgeschwindigkeit

Gemäß (6.3) und (6.5) erhält man

$$\xi_{v_0}^t(t_0) = \begin{bmatrix} \xi_{0,v_0}^{x,t} \\ \xi_{0,v_0}^{y,t} \\ \xi_{0,v_0}^{\mu,t} \\ \xi_{0,v_0}^{w,t} \end{bmatrix} \equiv \frac{\delta v_0}{\hat{v}_0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{u}_0 \\ \hat{w}_0 \end{bmatrix}; \quad (6.317)$$

$$e_{v_0}^t(t) \equiv 0.$$



#### 6.8.1.4. Die Anfangsstörung bei Änderung des Abgangswinkels

Die Beziehungen (6.3) und (6.5) spezialisieren sich zu

$$\xi_{\vartheta_0}^t(t_0) = \begin{bmatrix} \xi_{0,\vartheta_0}^{x,t} \\ \xi_{0,\vartheta_0}^{y,t} \\ \xi_{0,\vartheta_0}^{u,t} \\ \xi_{0,\vartheta_0}^{w,t} \end{bmatrix} \equiv \delta \vartheta_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{w}_0 \\ \hat{u}_0 \end{bmatrix}; \quad (6.318)$$

$$e_{\vartheta_0}^t(t) \equiv 0.$$

#### 6.8.1.5. Die Störfunktion für die Richtungsänderung der Fallbeschleunigung

Zur Berechnung des Einflusses der Richtungsänderung der Fallbeschleunigung hat man auf Grund von (6.35) zu setzen

$$e_g^t(t) = \begin{bmatrix} e_g^{x,t}(t) \\ e_g^{y,t}(t) \\ e_g^{u,t}(t) \\ e_g^{w,t}(t) \end{bmatrix} \equiv -\frac{g_{0N}\hat{x}}{R_E} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_N; \quad \xi_g^t(t_0) = 0. \quad (6.319)$$

Sind bei der Berechnung der Normalbahn sowohl die Höhen- wie auch die Richtungsabhängigkeit der Fallbeschleunigung unberücksichtigt geblieben, so benutzt man an Stelle von (6.319) die Störfunktion:

$$\bar{e}_g^t(t) = \frac{g_{0N}}{R_E} [0, 0, -\hat{x}, 2\hat{y}]^T. \quad (6.320)$$

#### 6.8.1.6. Die Störfunktion zur Berücksichtigung der Coriolis-Beschleunigung

Zur Berechnung des Einflusses der *Coriolis*-Beschleunigung auf die Flugbahnelemente  $x, y, u, w$  entnimmt man die Störbeschleunigung aus (6.37):

$$e_c^t(t) = \begin{bmatrix} e_c^{x,t}(t) \\ e_c^{y,t}(t) \\ e_c^{u,t}(t) \\ e_c^{w,t}(t) \end{bmatrix} \equiv 2\omega \cos \varphi \sin \psi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{w} \\ \hat{u} \end{bmatrix}; \quad (6.321)$$

$$\xi_c^t(t_0) = 0.$$

Der Einfluß der *Coriolis*-Beschleunigung auf die Seitenabweichung des Geschosses wird in Abschnitt 6.8.4.3. behandelt.

6.8.1.7. Die Störfunktion zur Berücksichtigung  
eines variablen Längswindes

Die Störfunktionen für den Einfluß eines beliebigen (nichtkonstanten) Längswindes sind in (6.53) angegeben:

$$\begin{aligned} e_{W_x}^{x,t}(t) &= e_{W_x}^{y,t}(t) \equiv 0; \\ e_{W_x}^{u,t}(t) &= E u - E_r (u - W_x); \\ e_{W_x}^{w,t}(t) &= (E - E_r) w; \\ E_r &= E(c, y, v_r), \quad v_r = \sqrt{(u - W_x)^2 + w^2}. \end{aligned} \quad (6.322)$$

Ist die Geschwindigkeit des Längswindes klein gegenüber der Bahngeschwindigkeit, so können die Störfunktionen bezüglich  $W_x$  linearisiert werden (sogenannte 2. Linearisierung).

Taylor-Entwicklung von  $E_r$  ergibt

$$E_r = E + \left( \frac{\partial E_r}{\partial W_x} \right)_{W_x=0} \cdot W_x + \dots \quad (6.323)$$

Für die Ableitung  $\partial E_r / \partial W_x$  findet man

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_r}{\partial W_x} &= \frac{\partial E_r}{\partial v_r} \frac{\partial v_r}{\partial W_x} = \frac{E_r}{v_r} [n(v_{rx}) - 1] \left( -\frac{u - W_x}{v_r} \right), \\ \left( \frac{\partial E_r}{\partial W_x} \right)_{W_x=0} &= -\frac{E u}{v^2} (n - 1). \end{aligned}$$

Dies eingesetzt in (6.323) liefert

$$E_r = E - \frac{E u}{v^2} (n - 1) W_x.$$

Die linearisierten Störfunktionen lauten somit

$$\begin{aligned} e_{W_x}^{u,t}(t) &= \hat{E} \hat{u} - \left[ \hat{E} - \frac{\hat{E} \hat{u}}{\hat{v}^2} (\hat{n} - 1) W_x \right] \hat{u} + \hat{E} W_x \\ &= \hat{E} [1 + (\hat{n} - 1) \cos^2 \hat{\vartheta}] W_x = -a_{(1)}^{33}(t) \cdot W_x; \\ e_{W_x}^{w,t}(t) &= \hat{E} \hat{w} - \left[ \hat{E} - \frac{\hat{E} \hat{u}}{\hat{v}^2} (\hat{n} - 1) W_x \right] \hat{w} \\ &= \frac{1}{2} \hat{E} (\hat{n} - 1) \sin 2\hat{\vartheta} \cdot W_x = -a_{(1)}^{34}(t) \cdot W_x. \end{aligned}$$

Für  $e_{w_x}^t(t)$  und  $\xi_{w_x}^t(t_0)$  ergibt sich damit die Darstellung

$$e_{w_x}^t(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E[1 + (n-1)\cos^2\vartheta] \\ \frac{1}{2} E(n-1)\sin 2\vartheta \end{bmatrix}_N W_x; \quad (6.324)$$

$$\xi_{w_x}^t(t_0) = 0.$$

Der Querwind einfluß wird in Abschnitt 6.8.4. behandelt.

## 6.8.2. Die linearen Störungsdifferentialgleichungen im $p$ -System

### 6.8.2.1. Die Koeffizientenmatrix des $V$ -transformierten Systems

Das  $t$ -System  $\Sigma_{(1)} = \{t; x, y, u, w\}$  wird in der ballistischen Störungstheorie als Grundsystem angesehen, da die Störungsterme bei den physikalischen Ableitungen in diesem System anfallen.

Um die Störungsdifferentialgleichungen in einem anderen als dem  $t$ -System aufzustellen, benötigt man die Koeffizientenmatrix  $B_{(t)}^*(t)$  der  $V$ -transformierten linearen Störungsdifferentialgleichungen sowie die VT-Matrix  $P_{(1,t)}(t)$ , die die Anfangsstörungen und Störfunktionen von dem  $t$ -System in das neue Vergleichsvariablensystem  $\Sigma_{(t)}$  transformieren.

Für die numerische Integration der Störungsdifferentialgleichungen ist das  $p$ -System  $\Sigma_{(6)} = \{p; t, x, y, u\}$  vorteilhaft, da in diesem System von den vier Differentialgleichungen nur zwei gekoppelt sind.

Im  $p$ -System ist das ungestörte Anfangswertproblem durch (4.26) gegeben. Hieraus erhält man durch Differentiation die Koeffizientenmatrix der Störungsdifferentialgleichungen  $B_{(6)}(t)$ :

$$B_{(6)}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/g_0 \\ 0 & 0 & 0 & -2u/g_0 \\ 0 & 0 & 0 & -2up/g_0 \\ 0 & 0 & (u^2/g_0)(\partial E/\partial y) & (u/g_0)[2E + u(\partial E/\partial u)] \end{bmatrix}_N.$$

Die Koeffizientenmatrix  $B_{(\zeta)}^*(t)$  des V-transformierten Störungswertproblems

$$\frac{d\zeta_{(\zeta)}}{dt} = B_{(\zeta)}^*(t) \zeta_{(\zeta)} + \varepsilon_{(\zeta)}^*(t), \quad \zeta_{(\zeta)}(t_0) = (\zeta_{(\zeta)})_0 \quad (6.325)$$

folgt aus  $B_{(\zeta)}(t)$  durch Multiplikation mit  $(dp/dt)_N = -g_0/\hat{u}$ :

$$B_{(\zeta)}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/u \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2p \\ 0 & 0 & -u(\partial E/\partial y) & -2E - u(\partial E/\partial u) \end{bmatrix}_N.$$

Mit  $\partial E/\partial y = E\chi$  und

$$\frac{\partial E}{\partial u} = \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} [u \sqrt{1+p^2}] = \frac{E}{u} (n-1)$$

erhält  $B_{(\zeta)}^*(t)$  die Gestalt

$$B_{(\zeta)}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/u \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2p \\ 0 & 0 & -Eu\chi & -E(n+1) \end{bmatrix}_N. \quad (6.326)$$

Die Störungsdifferentialgleichungen lauten damit explizit

$$\begin{aligned} \zeta^t &= (1/\hat{u}) \zeta^u + \varepsilon_{(\zeta)}^{*t}(t), \\ \zeta^x &= 2 \zeta^u + \varepsilon_{(\zeta)}^{*x}(t), \\ \zeta^y &= 2 \hat{p} \zeta^u + \varepsilon_{(\zeta)}^{*y}(t), \\ \zeta^u &= -\hat{E} \hat{u} \hat{\chi} \cdot \zeta^y - \hat{E} (\hat{n} + 1) \zeta^u + \varepsilon_{(\zeta)}^{*u}(t), \end{aligned} \quad (6.327)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\zeta_{(\zeta)}(t_0) = [(\zeta_{(\zeta)}^t)_0, (\zeta_{(\zeta)}^x)_0, (\zeta_{(\zeta)}^y)_0, (\zeta_{(\zeta)}^u)_0]^T. \quad (6.328)$$

Gekoppelt sind nur die letzten beiden Gleichungen. Nachdem  $\zeta_{(\zeta)}^u(t)$  bekannt ist, können  $\zeta_{(\zeta)}^x(t)$  und  $\zeta_{(\zeta)}^y(t)$  durch Quadraturen gewonnen werden.

### 6.8.2.2. Die Aufstellung der VT-Matrix $P_{(1,6)}(t)$

Zur Ermittlung der VT-Matrix  $P_{(1,6)}(t)$  geht man zweckmäßigerweise von dem allgemeinen Ansatz (6.96) aus.

Die Transformationsformeln für den Übergang von dem System

$$\Sigma_{(1)} = \{s_{(1)}; \mathbf{z}_{(1)}\},$$

$$s_{(1)} \equiv t; \quad \mathbf{z}_{(1)} = [z_{(1)}^1, z_{(1)}^2, z_{(1)}^3, z_{(1)}^4]^T \equiv [x, y, u, w]^T$$

zu dem Variablensystem

$$\Sigma_{(6)} = \{s_{(6)}; \mathbf{z}_{(6)}\},$$

$$s_{(6)} \equiv p; \quad \mathbf{z}_{(6)} = [z_{(6)}^1, z_{(6)}^2, z_{(6)}^3, z_{(6)}^4]^T \equiv [t, x, y, u]^T$$

lauten explizit

$$\mathbf{z}_{(6)} = \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{(1,6)}^1 \\ \varphi_{(1,6)}^2 \\ \varphi_{(1,6)}^3 \\ \varphi_{(1,6)}^4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} (t) \\ x \\ y \\ u \end{bmatrix}; \quad s_{(6)} = \varphi_{(1,6)}^0 \equiv \frac{w}{u}.$$

Damit folgt

$$J_{(1,6)}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad j_{(1,6)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -w/u^2 \\ 1/u \end{bmatrix}_N;$$

$$\mathbf{g}_{(6)}(t) = [dt/dp, dx/dp, dy/dp, du/dp]^T_N,$$

$$P_{(1,6)}(t) = J_{(1,6)}(t) - \mathbf{g}_{(6)}(t) j_{(1,6)}^T(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} dt/dp \\ dx/dp \\ dy/dp \\ du/dp \end{bmatrix}_N [0, 0, -w/u^2, 1/u]_N$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & p/g_0 & -1/g_0 \\ 0 & 0 & w/g_0 & -u/g_0 \\ 0 & 0 & wp/g_0 & -w/g_0 \\ 0 & 0 & -Ew/g_0 & Eu/g_0 \end{bmatrix}_N.$$

Die gesuchte VT-Matrix lautet damit

$$P_{(1,6)}(t) = \frac{1}{g_{0N}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -p & 1 \\ g_0 & 0 & -w & u \\ 0 & g_0 & -p w & w \\ 0 & 0 & E w + g_0 & -E u \end{bmatrix}_N, \quad (6.329)$$

$$\det P_{(1,6)}(t) = -g_{0N}^{-1} = \text{const.}$$

### 6.8.2.3. Die Anfangsstörungen und Störfunktionen im $p$ -System

Die Anfangsstörungen und Störfunktionen im  $p$ -System erhält man dadurch, daß man die für  $\xi_{0,\mu}^t$  und  $e_\mu^t(t)$  in Abschnitt 6.8.1. abgeleiteten Ausdrücke von links mit der Matrix (6.329) multipliziert.

#### a) Änderung des Ballistischen Koeffizienten

Mit  $\hat{v}^t(t)$  aus (6.312) erhält man im  $\Sigma_{(6)}$ -System den Vektor  $\hat{v}^p(t)$ :

$$\hat{v}^p(t) = P_{(1,6)}(t) \hat{v}^t(t) = -\hat{E} \hat{u} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.330)$$

Die Störfunktion für Änderungen des Ballistischen Koeffizienten lautet damit

$$\varepsilon_c^{*p}(t) = \hat{v}^p(t) \frac{\delta c}{\hat{c}}, \quad \zeta_{0,c}^p = 0. \quad (6.331)$$

#### b) Änderung der Anfangsgeschwindigkeit

Multiplikation von (6.317) mit (6.329) ergibt ( $t = t_0$ ):

$$\zeta_{v_0}^p(t_0) = \frac{\delta t_0}{\hat{v}_0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{u}_0 \end{bmatrix} = \delta v_0 \cdot \cos \vartheta_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (6.332)$$

$$\varepsilon_{v_0}^{*p}(t) \equiv 0.$$

c) *Änderung des Abgangswinkels*

Durch Multiplikation von (6.318) mit (6.329) erhält man

$$\zeta_{\vartheta_0}^p(\vartheta_0) = \frac{\delta \vartheta_0}{g_{0N}} \begin{bmatrix} p_0 w_0 + u_0 \\ w_0^2 + u_0^2 \\ p_0 w_0^2 + u_0 w_0 \\ -E_0 (w_0^2 + u_0^2) - g_{0N} w_0 \end{bmatrix}_N = \delta \vartheta_0 \frac{\hat{v}_0^2}{g_{0N}} \begin{bmatrix} 1/\hat{u}_0 \\ 1 \\ \hat{p}_0 \\ \hat{b}_0/\hat{v}_0 \end{bmatrix} \quad (6.333)$$

$$\varepsilon_{\vartheta_0}^{*p}(t) \equiv 0, \quad b_0 := -E_0 v_0 - g_0 \sin \vartheta_0.$$

d) *Richtungsänderung der Fallbeschleunigung*

Multiplikation von (6.319) mit (6.329) liefert

$$\zeta_{\sigma}^p(t_0) = 0; \quad \varepsilon_{\sigma}^{*p}(t) = \frac{\hat{x}}{R_E} \begin{bmatrix} p \\ w \\ p w \\ -E w - g_0 \end{bmatrix}_N. \quad (6.334)$$

e) *Einfluß der Coriolis-Beschleunigung*

Aus (6.321) und (6.329) ergibt sich

$$\varepsilon_C^{*p}(t) = \frac{2\omega}{g_{0N}} \cos \varphi \sin \psi \begin{bmatrix} v \sec \vartheta \\ v^2 \\ p v^2 \\ -E v^2 - g_0 \end{bmatrix}_N, \quad (6.335)$$

$$\zeta_C^p(t_0) = 0.$$

f) *Einfluß eines Längswindes variabler Stärke*

Durch Multiplikation von (6.324) mit (6.329) findet man

$$\varepsilon_{W_x}^{*p}(t) = \frac{\hat{E}}{g_{0N}} \begin{bmatrix} -p \\ -w \\ -p w \\ E w + g_0 [1 + (n-1) \cos^2 \vartheta] \end{bmatrix}_N \cdot W_x; \quad (6.336)$$

$$\zeta_{W_x}^p(t_0) = 0.$$

In ähnlicher Weise lassen sich die Störfunktionen in anderen Variablen-  
systemen gewinnen.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß alle VT-Transformationen  
mathematisch-formal nach einem eindeutigen Algorithmus ablaufen.  
Das ist bei komplizierteren Bewegungsgleichungen und schwer überseh-  
baren kinematischen Beziehungen zwischen den alten und den neuen  
Variablen von außerordentlichem Vorteil.

### 6.8.3. Die Integration der Störungsdifferentialgleichungen im $p$ -System

Nach dem in Abschnitt 6.7. angegebenen Verfahren lassen sich für be-  
liebige Variablensysteme, Anfangsstörungen, Störfunktionen und Nor-  
mierungsbedingungen die resultierenden Störungsvektoren ermitteln.  
Als Beispiel soll die Integration der Störungsdifferentialgleichungen  
im  $p$ -System (6.327) näher betrachtet werden.

#### 6.8.3.1. Die Ermittlung der Fundamentalmatrix

Das Störungsanfangswertproblem (6.327) hat die Struktur<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta}^t &= b^{14}(t) \zeta^u + \bar{\varepsilon}^t(t), & \zeta^t(t_0) &= \zeta_0^t; \\
 \dot{\zeta}^x &= b^{24}(t) \zeta^u + \bar{\varepsilon}^x(t), & \zeta^x(t_0) &= \zeta_0^x; \\
 \dot{\zeta}^y &= b^{34}(t) \zeta^u + \bar{\varepsilon}^y(t), & \zeta^y(t_0) &= \zeta_0^y; \\
 \dot{\zeta}^u &= b^{43}(t) \zeta^y + b^{44}(t) \zeta^u + \bar{\varepsilon}^u(t), & \zeta^u(t_0) &= \zeta_0^u.
 \end{aligned} \tag{6.337}$$

Da nur die letzten beiden Gleichungen gekoppelt sind, braucht man  
durch numerische Integration nur *eine* Lösung  $\zeta^{y1}(t)$ ,  $\zeta^{u1}(t)$  der homo-  
genen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta}^y &= b^{34}(t) \zeta^u, \\
 \dot{\zeta}^u &= b^{43}(t) \zeta^y + b^{44}(t) \zeta^u
 \end{aligned} \tag{6.338}$$

<sup>1)</sup> Die Bedeutung der in (6.337) benutzten Symbole  $b^{ij}$  und  $\bar{\varepsilon}^k$  ist bei einem Vergleich  
mit (6.327) sofort ersichtlich.



zu ermitteln. Die zweite Fundamentallösung erfolgt dann nach dem in Abschnitt 6.7.7.3. beschriebenen Verfahren.

Die Fundamentalmatrix von (6.338) werde mit  $Q(t)$  bezeichnet:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} \zeta^{y^1}(t) & \zeta^{y^2}(t) \\ \zeta^{u^1}(t) & \zeta^{u^2}(t) \end{bmatrix};$$

$$Q^{-1}(t) = \frac{1}{D(t)} \begin{bmatrix} \zeta^{u^2}(t) & -\zeta^{y^2}(t) \\ -\zeta^{u^1}(t) & \zeta^{y^1}(t) \end{bmatrix}, \quad (6.339)$$

$$D(t) = \zeta^{y^1}(t) \zeta^{u^2}(t) - \zeta^{u^1}(t) \zeta^{y^2}(t).$$

Damit ist auch die Fundamentalmatrix  $\Phi(t)$  des Gesamtsystems bekannt:

$$\Phi(t) = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \zeta^{x^1}(t) & \zeta^{x^2}(t) \\ 0 & 1 & \zeta^{x^1}(t) & \zeta^{x^2}(t) \\ \hline 0 & 0 & \zeta^{y^1}(t) & \zeta^{y^2}(t) \\ 0 & 0 & \zeta^{u^1}(t) & \zeta^{u^2}(t) \end{array} \right], \quad (6.340)$$

$$\zeta^{xi}(t) = \int_{t_0}^t b^{14}(\tau) \zeta^{ui}(\tau) d\tau; \quad \zeta^{xi}(t) = b^{24} \int_{t_0}^t \zeta^{ui}(\tau) d\tau, \quad (6.340a)$$

$(i = 1, 2).$

Die Inverse der Fundamentalmatrix kann nach dem in Abschnitt 6.7.7.5. geschilderten Verfahren der Blockzerlegung gefunden werden. Die sehr einfache Rechnung sei dem Leser überlassen.<sup>1)</sup>

Nachdem die Fundamentalmatrix, ihre Inverse, die Anfangsstörungen und die Störfunktionen vorliegen, sind die allgemeinen Formeln des Abschnitts 6.7.5. für die Lösung des inhomogenen Störungsanfangswertproblems sinngemäß anwendbar.

Ist der Störungsvektor nur für eine ganz spezielle Störfunktion zu berechnen, so kommt man häufig rascher zum Ziel, wenn man das inhomogene Störungsanfangswertproblem, das von den letzten beiden Gleichungen in (6.337) gebildet wird, zunächst unabhängig von den beiden anderen Gleichungen behandelt.

<sup>1)</sup> Siehe Übungsaufgabe 6.19.

Die vollständige Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems (6.337) werde mit  $\kappa(t)$  bezeichnet. Dann gilt

$$\begin{bmatrix} \zeta^y \\ \zeta^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa^y(t) \\ \kappa^u(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \zeta^{y1}(t) & \zeta^{y2}(t) \\ \zeta^{u1}(t) & \zeta^{u2}(t) \end{bmatrix} \times \quad (6.341)$$

$$\times \left\{ \begin{bmatrix} \zeta_0^y \\ \zeta_0^u \end{bmatrix} + \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} \zeta^{u2}(\tau) & -\zeta^{y2}(\tau) \\ -\zeta^{u1}(\tau) & \zeta^{y1}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}^y(\tau) \\ \bar{e}^u(\tau) \end{bmatrix} \frac{d\tau}{D(\tau)} \right\},$$

$$\zeta^t = \kappa^t(t) \equiv \zeta_0^t + \int_{t_0}^t [b^{14}(\tau) \kappa^u(\tau) + \bar{e}^t(\tau)] d\tau, \quad (6.342)$$

$$\zeta^x = \kappa^x(t) \equiv \zeta_0^x + \int_{t_0}^t [b^{24} \kappa^u(\tau) + \bar{e}^x(\tau)] d\tau. \quad (6.342a)$$

Das Störungsanfangswertproblem im  $p$ -System ist damit gelöst. Durch Einführung von Hilfsfunktionen können die Beziehungen (6.340) bis (6.342) noch auf eine für Zahlenrechnungen bequemere Form gebracht werden. Hierauf soll jedoch nicht näher eingegangen werden.

Um den im  $p$ -System ermittelten Störungsvektor auf die Vergleichsvariable  $x$  bzw. die Vergleichsvariable  $y$  zu transformieren, müssen die VT-Matrizen  $P_{(6,3)}(t)$ ,  $P_{(6,4)}(t)$  bekannt sein. Diese VT-Matrizen werden ebenfalls benötigt, wenn die Fundamentalmatrizen – bei festem Endpunkt des Integrationsintervalls – gemäß Tabelle 6.10 normiert werden sollen.

Im nächsten Abschnitt wird die VT-Matrix  $P_{(6,4)}(t)$  ermittelt. Die Berechnung der VT-Matrix  $P_{(6,3)}(t)$  bleibt Übungsaufgabe 6.20 vorbehalten.

### 6.8.3.2. Die Aufstellung der VT-Matrix $P_{(6,4)}(t)$

Zur Aufstellung der VT-Matrix  $P_{(6,4)}(t)$  verfährt man analog zu Abschnitt 6.8.2.2.

Die Transformationsformeln für den Übergang von dem System

$$\Sigma_{(6)} = \{s_{(6)}; z_{(6)}\},$$

$$s_{(6)} \equiv p; \quad z_{(6)} = [z_{(6)}^1, z_{(6)}^2, z_{(6)}^3, z_{(6)}^4]^T \equiv [t, x, y, u]^T$$

zu dem System

$$\Sigma_{(4)} = \{s_{(4)}; z_{(4)}\},$$

$$s_{(4)} \equiv y; \quad z_{(4)} = [z_{(4)}^1, z_{(4)}^2, z_{(4)}^3, z_{(4)}^4]^T \equiv [t, x, v, \vartheta]^T$$

lauten explizit

$$z_{(4)} = \begin{bmatrix} t \\ x \\ v \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{(6,4)}^1 \\ \varphi_{(6,4)}^2 \\ \varphi_{(6,4)}^3 \\ \varphi_{(6,4)}^4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} t \\ x \\ u \sqrt{1+p^2} \\ (\text{Arctan } p) \end{bmatrix},$$

$$s_{(4)} = \varphi_{(6,4)}^0 \equiv y.$$

Damit erhält man

$$J_{(6,4)}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1+p^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_N; \quad \dot{J}_{(6,4)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$g_{(4)}(t) = [dt/dy, dx/dy, dv/dy, d\vartheta/dy]_N^T,$$

$$P_{(6,4)}(t) = J_{(6,4)}(t) - g_{(4)}(t) \dot{J}_{(6,4)}^T(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -dt/dy & 0 \\ 0 & 1 & -dx/dy & 0 \\ 0 & 0 & -dv/dy & \sqrt{1+p^2} \\ 0 & 0 & -d\vartheta/dy & 0 \end{bmatrix}_N,$$

$$P_{(6,4)}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/w & 0 \\ 0 & 1 & -1/p & 0 \\ 0 & 0 & -b/w & \sqrt{1+p^2} \\ 0 & 0 & g_0/(pv^2) & 0 \end{bmatrix}_N, \quad (6.343)$$

$$\det P_{(6,4)}(t) = -\frac{g_{0N}}{\hat{v}_0 \hat{w}_0} = \frac{g_{0N}}{\hat{v}_0^2} \sec \vartheta_0.$$

Die Ermittlung der VT-Matrix  $P_{(6,3)}(t)$  erfolgt in der gleichen Weise (siehe Übungsaufgabe 6.20).

### 6.8.3.3. Die Formel für den Schußweitenfehler in der Horizontalebene

Wird ausschließlich der Schußweitenfehler in der Horizontalebene benötigt, empfiehlt es sich, die Störungsrechnung auf dem adjungierten System der Störungsdifferentialgleichungen aufzubauen (siehe Abschnitt 6.7.6.3.).

Die zu dem homogenen Teil von (6.337) adjungierten Differentialgleichungen lauten<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}^1 &= 0, \\ \dot{\eta}^2 &= 0, \\ \dot{\eta}^3 &= -b^{43}(t) \eta^4, \\ \dot{\eta}^4 &= -b^{14}(t) \eta^1 - b^{24} \eta^2 - b^{34}(t) \eta^3 - b^{44}(t) \eta^4.\end{aligned}\tag{6.344}$$

Hieraus folgt sofort

$$\eta^1 = \text{const}; \quad \eta^2 = \text{const}.$$

Zur Ermittlung des Schußweitenfehlers in der Mündungsebene hat man bei der Integration von (6.344) den Anfangsvektor  $\eta(t_e)$  gleich dem zweiten Zeilenvektor  $\bar{p}_{(6,4)}^2(t_e)$  der VT-Matrix  $P_{(6,4)}(t_e)$  zu wählen:

$$\eta = \eta(t_e) = \bar{p}_{(6,4)}^2(t_e) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/\hat{p}_e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cot |\hat{\vartheta}_e| \\ 0 \end{bmatrix}.\tag{6.345}$$

Es ist somit das Anfangswertproblem zu integrieren

$$\begin{aligned}\dot{\eta}^3 &= -b^{43}(t) \eta^4, & \eta^3(t_e) &= \cot |\hat{\vartheta}_e|, \\ \dot{\eta}^4 &= -b^{34}(t) \eta^3 - b^{44}(t) \eta^4 - b^{24}, & \eta^4(t_e) &= 0\end{aligned}$$

bzw. ausführlich

$$\begin{aligned}\dot{\eta}^3 &= \hat{E} \hat{u} \hat{\chi} \eta^4, & \eta^3(t_e) &= \cot |\hat{\vartheta}_e|, \\ \dot{\eta}^4 &= -2 \hat{p} \eta^3 + \hat{E}(\hat{n} + 1) \eta^4 - 2, & \eta^4(t_e) &= 0.\end{aligned}\tag{6.346}$$

<sup>1)</sup> Um das adjungierte System deutlich von (6.337) zu unterscheiden, werden die abhängigen Variablen mit  $\eta^i$  ( $i = 1(1)4$ ) bezeichnet.

Die Integration erfolgt von  $t = t_e$  bis  $t = t_0$ ; als Lösung ergebe sich

$$\eta^3 = \eta^3(t), \quad \eta^4 = \eta^4(t).$$

Ferner gilt bei der speziellen Anfangsbedingung (6.345):

$$\eta^1 = \eta^1(t) \equiv 0, \quad \eta^2 = \eta^2(t) \equiv 1.$$

Die Formel (6.278) liefert damit für die Störung  $\lambda^x(t_e) = \xi^{x,y}(t_e)$  der Horizontalschußweite  $x_e^1$ ):

$$\xi^{x,y}(t_e) = \eta^T(t_0) \zeta_0 + \int_{t_0}^{t_e} \eta^T(t') \bar{e}(t') dt', \quad (6.347)$$

$$\eta(t) = [0, 1, \eta^3(t), \eta^4(t)]^T$$

oder ausführlich

$$\begin{aligned} \xi^{x,y}(t_e) = & \zeta_0^x + \zeta_0^y \eta^3(t_0) + \zeta_0^u \eta^4(t_0) \\ & + \int_{t_0}^{t_e} [\bar{e}^x(t') + \bar{e}^y(t') \eta^3(t') + \bar{e}^u(t') \eta^4(t')] dt'. \end{aligned} \quad (6.348)$$

Setzt man für  $\zeta_0$  und  $\bar{e}(t)$  die in Abschnitt 6.8.2.3. abgeleiteten Beziehungen ein, so erhält man Formeln für die Schußweitenfehler infolge der betreffenden Störungseinflüsse.

#### 6.8.3.4. Der Schußweitenfehler infolge einer Änderung der Verzögerungsfunktion $E$

Besteht die Störung in einer Änderung der Verzögerungsfunktion  $E$  um  $\delta E$ , so folgt aus (6.314) und (6.331):

$$\bar{e}_E(t) = -\hat{E} \hat{u} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\delta E}{\hat{E}}, \quad \zeta_E^0 \equiv 0,$$

<sup>1)</sup> Da bei den Anwendungen dieser Beziehungen die Temperatur  $\tau$  auftritt, wird die Integrationsvariable mit  $t'$  bezeichnet.

und (6.347) vereinfacht sich zu

$$\xi_E^{x,y}(t_c) = \int_{t_c}^{t_0} (\delta E)_N \hat{u}(t') \eta^4(t') dt'. \quad (6.349)$$

Bei Erweiterung des Integranden mit  $\hat{E}$  und unter Beachtung der Beziehung  $\dot{u} = -E u$  kann man hierfür auch schreiben

$$\xi_E^{x,y}(t_c) = \int_{u_0}^{u_c} (\delta E/E)_N \eta^4(u') du'. \quad (6.350)$$

Als Integrationsvariable tritt in dieser Beziehung die Horizontalkomponente  $u$  der Bahngeschwindigkeit  $v$  auf.

Wird die Änderung der Verzögerungsfunktion durch eine Änderung  $\delta c$  des Ballistischen Koeffizienten  $c$  hervorgerufen, so folgt aus (6.350):

$$\xi_c^{x,y}(t_c) = \frac{\delta c}{\hat{c}} \int_{u_0}^{u_c} \eta^4(u') du'.$$

Der *Störungskoeffizient für eine Änderung des Ballistischen Koeffizienten* beträgt damit

$$X_c^y(t_c | \hat{p}) = \frac{1}{\hat{c}} \int_{u_0}^{u_c} \eta^4(u') du'. \quad (6.351)$$

Zwischen den Störungskoeffizienten der Horizontalschußweite für Änderungen des Luftdrucks am Boden  $p_0$  und für Änderungen des Ballistischen Koeffizienten  $c$  besteht nach Abschnitt 6.3.5.5. die Beziehung

$$X_p^y(t_c | \hat{p}) = \frac{\hat{c}}{p_{0N}} X_c^y(t_c | \hat{p}) = \frac{1}{p_{0N}} \int_{u_0}^{u_c} \eta^4(u') du'. \quad (6.352)$$

Die Änderung  $\delta E$  der Verzögerungsfunktion  $E$  kann ebenfalls durch eine *Abweichung der Temperaturverteilung von dem Verlauf der Temperatur in der Normalatmosphäre* zustande kommen.

Für die Berechnung des Einflusses dieser Abweichung wird angenommen:

- Die Lufttemperatur  $\tau$  ist eine vorgegebene, stetig differenzierbare Funktion der geopotentiellen Höhe  $h^*$ .
- Die Atmosphäre ist statisch stabil; die Luft kann als ideales Gas behandelt werden ( $\mathfrak{R}_L = \mathfrak{R}_{LON} = \text{const}$ ).

Unter diesen Voraussetzungen folgt aus (3.6) und der Zustandsgleichung des idealen Gases (3.1) für den Druckverlauf<sup>1)</sup>:

$$\frac{dp}{dh} = -g \varrho = -\frac{g}{\mathfrak{R}_{\text{LON}}} \frac{p}{\tau(h^*)};$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g_{0\text{N}}}{\mathfrak{R}_{\text{LON}}} \int_0^{h^*} \frac{dh^{*'}}{\tau(h^{*'})}; \quad dh^* = \frac{g}{g_{0\text{N}}} dh. \quad (6.353)$$

Der Luftwiderstand des Geschosses werde durch den modernen Ansatz (3.79) beschrieben:

$$b' = C_0 H(h) \Phi(M); \quad E = \frac{b'}{v} = \frac{C_0}{v} \frac{p(h)}{p_0} \Phi(M).$$

„Logarithmische“ Differentiation von  $E$  liefert, wenn man  $C_0$  und  $v$  als konstant ansieht,

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{E} &= \frac{g_{0\text{N}}}{\mathfrak{R}_{\text{LON}}} \int_0^{h^*} \frac{\delta \tau}{[\tau(h^{*'})]^2} dh^{*'} + \frac{1}{\Phi(M)} \frac{d\Phi(M)}{dM} \frac{\partial M}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \tau} \delta \tau \\ &= \frac{g_{0\text{N}}}{\mathfrak{R}_{\text{LON}}} \int_0^{h^*} \frac{\delta \tau}{[\tau(h^{*'})]^2} dh^{*'} - \frac{n(M)}{2} \frac{\delta \tau}{\tau(h^*)}. \end{aligned}$$

Setzt man  $h^* \approx y$ ,  $g \approx g_{0\text{N}}$  und definiert  $\psi(y) := (\delta \tau / \tau)_{\text{N}}$ , so geht die vorstehende Beziehung längs der Normalbahn über in

$$\left( \frac{\delta E}{E} \right)_{\text{N}} = \frac{g_{0\text{N}}}{\mathfrak{R}_{\text{LON}}} \int_0^y \frac{\psi(y')}{\hat{\tau}(y')} dy' - \frac{1}{2} \hat{n}(v_\tau) \psi(y). \quad (6.354)$$

An Stelle der *Mach-Zahl*  $M$  ist wieder die fiktive Geschwindigkeit  $v_\tau$  eingeführt worden.

Ist die *relative Temperaturabweichung konstant* [ $\psi(y) \equiv \bar{\psi} = \text{const}$ ], so vereinfacht sich (6.354) zu

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta E}{E} \right)_{\text{N}, \bar{\psi}} &= \bar{\psi} \left[ \frac{g_{0\text{N}}}{\mathfrak{R}_{\text{LON}}} \int_0^y \frac{dy'}{\hat{\tau}(y')} - \frac{1}{2} \hat{n}(v_\tau) \right], \\ (\delta E/E)_{\text{N}, \bar{\psi}} &= -\bar{\psi} \left[ \ln(\hat{p}/p_{0\text{N}}) + \frac{1}{2} \hat{n}(v_\tau) \right]. \end{aligned} \quad (6.355)$$

<sup>1)</sup> Siehe hierzu Abschnitt 3.2.4.3.

Ist die *absolute Temperaturabweichung konstant* ( $\delta\tau = \delta\bar{\tau} = \text{const}$ ), dann geht (6.354) über in

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta E}{E}\right)_{N, \delta\bar{\tau}} &= \delta\bar{\tau} \left[ \frac{g_{ON}}{\mathfrak{R}_{LON}} \int_0^y \frac{dy'}{[\hat{\tau}(y')]^2} - \frac{\hat{n}(v_\tau)}{2 \hat{\tau}(y)} \right] \\ &= \frac{\delta\bar{\tau}}{\hat{\tau}(y)} \left\{ -\frac{g_{ON}}{\mathfrak{R}_{LON} A_{1N}^*} \left[ 1 - \frac{\hat{\tau}(y)}{\tau_{ON}} \right] - \frac{1}{2} \hat{n}(v_\tau) \right\} \end{aligned}$$

bzw. umgeformt

$$\left(\frac{\delta E}{E}\right)_{N, \delta\bar{\tau}} = \frac{\delta\bar{\tau}}{\hat{\tau}(y)} \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2} \hat{n}(v_\tau) + \frac{g_{ON} \hat{\tau}(y)}{\mathfrak{R}_{LON} A_{1N}^* \tau_{ON}} \right], \quad (6.356)$$

$$\left(\frac{\delta E}{E}\right)_{N, \delta\bar{\tau}} = \frac{\delta\bar{\tau}}{A_{1N}^*} \left( \frac{\hat{\chi}}{\hat{E}} + \frac{g_{ON}}{\mathfrak{R}_{LON} \tau_{ON}} \right). \quad (6.357)$$

Der Parameter  $\sigma_1$  war in (3.25), die Funktion  $\chi$  in (3.96) definiert worden.

Eine konstante Temperaturänderung  $\delta\tau = \delta\bar{\tau} = \text{const}$  ist gleichbedeutend mit einer Änderung der Lufttemperatur  $\tau_0$  am Boden. Man kann deshalb (6.357) auch dadurch gewinnen, daß man  $E$  partiell nach  $\tau_0$  differenziert (siehe Übungsaufgabe 6.21).

Durch Einsetzen von (6.354) bis (6.357) in (6.350) erhält man Formeln für die Schubweitenänderungen. Im Fall einer konstanten Temperaturabweichung  $\delta\tau = \delta\bar{\tau} = \text{const}$  ergibt sich ( $A_{1N}^* = -|A_{1N}^*|$ ):

$$\xi_{\delta\bar{\tau}}^{x,y}(t_e) = \frac{\delta\bar{\tau}}{|A_{1N}^*|} \left[ \int_0^{t_e} \hat{E} \hat{u} \hat{\chi} \eta^4 dt' - \frac{g_{ON}}{\mathfrak{R}_{LON} \tau_{ON}} \int_{u_0}^{u_e} \eta^4(u') du' \right].$$

Das erste Integral kann unter Beachtung der ersten Gleichung von (6.346) durch  $\eta^3(t_e) - \eta^3(t_0)$  ersetzt werden:

$$\xi_{\delta\bar{\tau}}^{x,y}(t_e) = \frac{\delta\bar{\tau}}{|A_{1N}^*|} \left[ \eta^3(t_e) - \eta^3(t_0) - \frac{g_{ON}}{\mathfrak{R}_{LON} \tau_{ON}} \int_{u_0}^{u_e} \eta^4(u') du' \right].$$

Mit der Anfangsbedingung (6.345) folgt hieraus für den *Störungskoeffizienten infolge einer Temperaturänderung*

$$X_{\hat{\tau}}^y(t_e | \beta) = \frac{1}{|A_{1N}^*|} \left[ -\frac{g_{ON}}{\mathfrak{R}_{LON} \tau_{ON}} \int_{u_0}^{u_e} \eta^4(u') du' + \cot |\vartheta_e| - \eta^3(t_0) \right]. \quad (6.358)$$



Das Integral ist nach (6.351) das  $\hat{c}$ -fache des Störungskoeffizienten für eine Änderung des Ballistischen Koeffizienten, so daß man (6.358) auch in der Form schreiben kann

$$X_i^y(t_e|\hat{\mu}) = \frac{1}{|A_{1N}^*|} \left[ -\frac{g_{ON} \hat{c}}{\Re_{LON} \tau_{ON}} X_c^y(t_e|\hat{\mu}) + \cot |\hat{\vartheta}_e| - \eta^3(t_0) \right]. \quad (6.359)$$

Für den Störungskoeffizienten infolge einer Temperaturänderung war andererseits in (6.182) angegeben worden:

$$X_i^y(t_e|\hat{\mu}) = \frac{1}{\tau_{ON}} \left[ \hat{x}_e - \frac{\hat{v}_0}{2} X_v^y(t_e|\hat{\mu}) \right].$$

Gleichsetzen dieser Beziehung mit (6.359) ergibt für  $X_c^y(t_e|\hat{\mu})$ :

$$X_c^y(t_e|\hat{\mu}) = -\frac{\Re_{LON} |A_{1N}^*|}{g_{ON} \hat{c}} \left\{ \hat{x}_e - \frac{\hat{v}_0}{2} X_v^y(t_e|\hat{\mu}) - \frac{\tau_{ON}}{|A_{1N}^*|} \left[ \frac{1}{|\hat{p}_e|} - \eta^3(t_0) \right] \right\}. \quad (6.360)$$

Wie in dem folgenden Abschnitt gezeigt wird, gilt für den Störungskoeffizienten infolge einer Änderung der Anfangsgeschwindigkeit

$$X_v^y(t_e|\hat{\mu}) = \cos \hat{\vartheta}_0 \cdot \eta^4(t_0).$$

Damit sind sowohl  $X_i^y(t_e|\hat{\mu})$  wie auch  $X_c^y(t_e|\hat{\mu})$  integralfrei darstellbar:

$$X_i^y(t_e|\hat{\mu}) = \frac{1}{\tau_{ON}} \left[ \hat{x}_e - \frac{\hat{v}_0}{2} \eta^4(t_0) \right], \quad (6.361)$$

$$X_c^y(t_e|\hat{\mu}) = -\frac{\Re_{LON} |A_{1N}^*|}{g_{ON} \hat{c}} \left\{ \hat{x}_e - \frac{\hat{v}_0}{2} \eta^4(t_0) - \frac{\tau_{ON}}{|A_{1N}^*|} \left[ \frac{1}{|\hat{p}_e|} - \eta^3(t_0) \right] \right\}. \quad (6.362)$$

In (6.361) und (6.362) treten nur die Lösungen des adjungierten Systems im Abgangspunkt und die Elemente der Normalbahn auf.

### 6.8.3.5. Die Störungskoeffizienten der Schußweite für Änderungen der Anfangsgeschwindigkeit und des Abgangswinkels

Der eben benutzte Störungskoeffizient der Schußweite für Änderungen der Anfangsgeschwindigkeit  $X_v^y(t_e|\hat{\mu})$  und der Störungskoeffizient für Änderungen des Abgangswinkels  $X_\theta^y(t_e|\hat{\mu})$  werden durch Einsetzen von (6.332) bzw. (6.333) in (6.347) ermittelt:

$$X_v^y(t_e|\hat{\mu}) = \cos \hat{\vartheta}_0 \cdot \eta^4(t_0), \quad (6.363)$$

$$X_\theta^y(t_e|\hat{\mu}) = \frac{v_0^2}{g_{\text{ON}}} [1 + \hat{p}_0 \eta^3(t_0) + (\hat{b}_0/\hat{v}_0) \eta^4(t_0)]. \quad (6.364)$$

Zwischen den Störungskoeffizienten der Schußweite für Änderungen des Ballistischen Koeffizienten, der Anfangsgeschwindigkeit und des Abgangswinkels besteht eine lineare Beziehung.<sup>1)</sup>

Um dies zu zeigen, hat man lediglich aus (6.360) und (6.364)  $\eta^3(t_0)$  zu eliminieren und (6.363) zu beachten. Aus (6.364) folgt zunächst

$$\hat{p}_0 \eta^3(t_0) = \frac{g_{\text{ON}}}{\hat{v}_0^2} X_\theta^y(t_e|\hat{\mu}) - \frac{\hat{b}_0}{\hat{u}_0} X_v^y(t_e|\hat{\mu}) - 1.$$

Dies in (6.360) eingesetzt, ergibt

$$X_c^y(t_e|\hat{\mu}) = - \frac{\Re_{\text{LON}} |A_{1\text{N}}^*|}{g_{\text{ON}} \hat{c}} \left\{ \hat{x}_e - \frac{\hat{v}_0}{2} X_v^y(t_e|\hat{\mu}) - \frac{\tau_{\text{ON}}}{|A_{1\text{N}}^*| \hat{p}_0} \left[ \frac{\hat{p}_0}{|\hat{p}_e|} - \frac{g_{\text{ON}}}{\hat{v}_0^2} X_\theta^y(t_e|\hat{\mu}) + \frac{\hat{b}_0}{\hat{u}_0} X_v^y(t_e|\hat{\mu}) + 1 \right] \right\}.$$

Diese Beziehung läßt sich in der Form schreiben

$$\mu_1 \cdot X_c^y(t_e|\hat{\mu}) + \mu_2 \cdot X_v^y(t_e|\hat{\mu}) + \mu_3 \cdot X_\theta^y(t_e|\hat{\mu}) = \mu_4 - \hat{x}_e, \quad (6.365)$$

$$\mu_1 := \frac{g_{\text{ON}} \hat{c}}{\Re_{\text{LON}} |A_{1\text{N}}^*|}; \quad \mu_2 := \frac{\tau_{\text{ON}}}{|A_{1\text{N}}^*|} \frac{\hat{b}_0}{\hat{w}_0} - \frac{\hat{v}_0}{2};$$

$$\mu_3 := - \frac{\tau_{\text{ON}}}{|A_{1\text{N}}^*|} \frac{g_{\text{ON}}}{\hat{p}_0 \hat{v}_0^2}; \quad \mu_4 := - \frac{\tau_{\text{ON}}}{|A_{1\text{N}}^*|} \left( \frac{1}{\hat{p}_0} + \frac{1}{|\hat{p}_e|} \right).$$

Diese Formel kann zur Kontrolle der auf anderem Wege ermittelten Störungskoeffizienten benutzt werden.

<sup>1)</sup> Einen allgemeinen Beweis für beliebige Bahnpunkte und das vollständige System der Bahnelemente findet man in [41].

### 6.8.3.6. Die Schußweitenänderung infolge des Längswindeinflusses

Die Schußweitenänderung infolge des Einflusses eines Längswindes erhält man durch Einsetzen von (6.336) in (6.347):

$$\xi_{\hat{w}_x}^{x,y}(t_e) = - \frac{1}{g_{0N}} \int_{t_0}^{t_e} W_x \hat{E} \{ \hat{w} + \hat{p} \hat{w} \eta^3(t) - [\hat{E} \hat{w} + g_{0N} (1 + \langle \hat{n} - 1 \rangle \cos^2 \vartheta)] \eta^4(t') \} dt' \quad (6.366)$$

Ist die Geschwindigkeit des Längswindes konstant, so kann  $W_x$  vor das Integralzeichen gezogen und das Integral geschlossen ausgewertet werden. Man erhält die Formel für  $X_{\hat{w}_x}^y(t_e | \hat{\mu})$  jedoch rascher, wenn man von (6.217) ausgeht und die Störungskoeffizienten  $X_v^y(t_e | \hat{\mu})$  und  $X_\delta^y(t_e | \hat{\mu})$  mit Hilfe von (6.363) und (6.364) eliminiert. Nach kurzer Zwischenrechnung ergibt sich

$$X_{\hat{w}_x}^y(t_e | \hat{\mu}) = t_e + \frac{\hat{w}_0}{g_{0N}} + \frac{\hat{p}_0 \hat{w}_0}{g_{0N}} \eta^3(t_0) - \left( \frac{\hat{E}_0 \hat{w}_0}{g_{0N}} + 1 \right) \eta^4(t_0). \quad (6.367)$$

Die numerische Auswertung dieser Formel bereitet keine Schwierigkeiten.

### 6.8.4. Die linearen Störungsdifferentialgleichungen für die Seitenabweichung

Solange keine Kräfte auf das Geschoß wirken, die senkrecht zur Abgangsebene gerichtet sind, verläuft die Geschoßbewegung ständig in der Abgangsebene: Die Flugbahnkurve des klassischen Bahnmodells ist eine ebene Kurve. Bei den physikalischen Überlegungen zur Herleitung der Störfunktionen (Abschnitt 6.2.) hat sich gezeigt, daß eine Reihe von Störungen des klassischen Bahnmodells zum Auftreten von Störbeschleunigungen  $e_z(t) \neq 0$  führen. Der Einfluß dieser Störbeschleunigungen, die aus der Abgangsebene herausweisen und eine Seitenabweichung hervorrufen, kann im Rahmen der linearen Störungstheorie unabhängig von den Störungen behandelt werden, die eine Änderung des Bahnverlaufs in der Abgangsebene bewirken: Der gekoppelten Bewegung in  $x, y$ -Richtung ist die Bewegung in  $z$ -Richtung additiv überlagert.

### 6.8.4.1. Die Integration der linearen Störungsdifferentialgleichungen für die Seitenabweichungen

Das lineare Störungsanfangswertproblem für die Bewegung des Geschosses in z-Richtung folgt mit

$$\dot{\xi}^z = z, \quad \dot{\xi}^a = q, \quad E = \hat{E}(t)$$

unmittelbar aus (6.6):

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^z &= \xi^z + e^z(t); & \xi^z(t_0) &= \xi_0^z = \hat{z}_0; \\ \dot{\xi}^a &= -\hat{E}(t) \xi^a + e^a(t), & \xi^a(t_0) &= \xi_0^a = \hat{q}_0. \end{aligned} \tag{6.368}$$

Die zweite Gleichung ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten, deren Lösung  $\xi^a = \xi^a(t)$  formelmäßig angebar ist. Einsetzen der erhaltenen Lösung in die erste Gleichung und anschließende Integration liefert  $\xi^z = \xi^z(t)$ .

Die Lösung von (6.368) läßt sich jedoch auch formal über das Fundamentalsystem der homogenen Gleichungen gewinnen. Um die Anwendung der in Abschnitt 6.7. abgeleiteten allgemeinen Beziehungen zu veranschaulichen, soll dieser Weg eingeschlagen werden.

Wie man erkennt, besitzt das homogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^z &= \xi^a, \\ \dot{\xi}^a &= -\hat{E}(t) \xi^a \end{aligned} \tag{6.369}$$

die Lösung

$$\begin{bmatrix} \xi^{z1}(t) \\ \xi^{a1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Eine zweite, hiervon linear unabhängige Lösung erhält man mit Hilfe der in Abschnitt 6.7.7.3. angegebenen Formeln. Da

$$D(t) = \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \hat{E}(t') dt' \right\} = \exp \left\{ \int_{\hat{u}_0}^{\hat{u}} \frac{du'}{u'} \right\} = \frac{\hat{u}}{\hat{u}_0}$$

wird, findet man bei sinngemäßer Anwendung von (6.291) und (6.292):

$$\begin{bmatrix} \xi^{z2}(t) \\ \xi^{a2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}(t)/\hat{u}_0 \\ \hat{u}(t)/\hat{u}_0 \end{bmatrix}.$$

Damit ist eine Fundamentalmatrix  $\Phi(t)$  des homogenen Systems (6.369) bekannt:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & \hat{x}(t)/\hat{u}_0 \\ 0 & \hat{u}(t)/\hat{u}_0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{\hat{u}_0}{\hat{u}(t)} \begin{bmatrix} \hat{u}(t)/\hat{u}_0 & -\hat{x}(t)/\hat{u}_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\hat{x}(t)/\hat{u}(t) \\ 0 & \hat{u}_0/\hat{u}(t) \end{bmatrix}.$$

Die vollständige Lösung  $\xi = \xi(t)$  des homogenen Systems (6.368) erhält man durch sinngemäße Übertragung von (6.341). Mit  $\xi_0 = 0$  ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \xi^z(t) \\ \xi^a(t) \end{bmatrix} = \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 1 & \hat{x}(t)/\hat{u}_0 \\ 0 & \hat{u}(t)/\hat{u}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\hat{x}(t')/\hat{u}(t') \\ 0 & \hat{u}_0/\hat{u}(t') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^z(t') \\ e^a(t') \end{bmatrix} dt'. \quad (6.370)$$

In den praktisch interessierenden Fällen ist  $e^z(t) \equiv 0$ , so daß die Formeln für  $\xi^a(t)$  und  $\xi^z(t)$  lauten

$$\xi^a(t) = \hat{u}(t) \int_0^t \frac{e^a(t')}{\hat{u}(t')} dt', \quad (6.371)$$

$$\xi^z(t) = \int_0^t \frac{\hat{x}(t) - \hat{x}(t')}{\hat{u}(t')} e^a(t') dt'. \quad (6.372)$$

Der *Richtungswinkel*<sup>1)</sup>  $\beta$  der Flugbahntangente folgt wegen der Gültigkeit von (6.371) aus

$$\tan \beta = \frac{\xi^a(t)}{\hat{u}(t)} = \int_0^t \frac{e^a(t')}{\hat{u}(t')} dt', \quad (6.373)$$

für den *Azimutwinkel*<sup>1)</sup>  $\bar{\psi}$  eines laufenden Flugbahnpunkts ergibt sich aus (6.372):

$$\tan \bar{\psi} = \frac{\xi^z(t)}{\hat{x}(t)} = \frac{1}{\hat{x}(t)} \int_0^t \frac{\hat{x}(t) - \hat{x}(t')}{\hat{u}(t')} e^a(t') dt'. \quad (6.374)$$

Die abgeleiteten Beziehungen gelten sowohl für die Vergleichsvariable  $t$  wie auch für die Vergleichsvariablen  $x$  und  $y$  (siehe Übungsaufgabe 6.10).

<sup>1)</sup> Siehe Bild 6.7, Seite 412.

#### 6.8.4.2. Der Einfluß eines Seitenwindes variabler Stärke

Wie aus (6.53) folgt, ist im Rahmen der linearen Störungstheorie für die Störfunktion  $e_{W_z}^a(t)$  anzusetzen

$$e_{W_z}^a(t) = \hat{E}(t) W_z. \quad (6.375)$$

Die Beziehungen (6.371) und (6.372) gehen damit über in

$$\xi_{W_z}^a(t) = \hat{u}(t) \int_0^t \frac{W_z(t')}{\hat{u}(t')} \hat{E}(t') dt', \quad (6.376)$$

$$\xi_{W_z}^z(t) = \int_0^t \frac{W_z(t')}{\hat{u}(t')} \hat{E}(t') [\hat{x}(t) - \hat{x}(t')] dt'. \quad (6.377)$$

Führt man als neue Variable  $\sigma := 1/u$  ein, so gilt

$$d\sigma = -\frac{du}{u^2}; \quad E = \frac{Eu}{u} = -\frac{1}{u} \frac{du}{dt},$$

$$\frac{E dt}{u} = -\frac{du}{u^2} = d\sigma,$$

und man kann (6.376) und (6.377) in der Form schreiben

$$\xi_{W_z}^a(t) = \hat{u}(t) \int_{\hat{\sigma}_0}^{\hat{\sigma}(t)} W_z(\sigma') d\sigma'; \quad (6.378)$$

$$\xi_{W_z}^z(t) = \int_{\hat{\sigma}_0}^{\hat{\sigma}(t)} W_z(\sigma') [\hat{x}(\hat{\sigma}) - \hat{x}(\sigma')] d\sigma'.$$

Diese Darstellung ist besonders für grafische Auswertungen bequem. Im Fall  $W_z = const$  erhält man wieder die Formeln des Abschnitts 6.4.8.:

$$\xi_{W_z}^a(t) = \hat{u}(t) [\hat{\sigma}(t) - \hat{\sigma}(t_0)] W_z = \left[ 1 - \frac{\hat{u}(t)}{\hat{u}_0} \right] W_z, \quad (6.378a)$$

$$\xi_{W_z}^z(t) = \int_0^t \zeta^a(t') dt' = \left[ \hat{t} - \frac{\hat{x}(t)}{\hat{u}_0} \right] W_z.$$

### 6.8.4.3. Die Seitenabweichung durch die Coriolis-Beschleunigung

Die Störfunktion  $e_C^q(t)$  entnimmt man (6.36):

$$e_C^q(t) = -2\omega \cos\varphi \cos\psi \cdot \hat{w}(t) + 2\omega \sin\varphi \cdot \hat{u}(t). \quad (6.379)$$

Einsetzen von (6.379) in (6.371) liefert

$$\xi_C^q(t) = 2\omega \hat{u}(t) \left( \sin\varphi \cdot t - \cos\varphi \cos\psi \int_0^t \hat{p}(t') dt' \right). \quad (6.380)$$

Entsprechend erhält man aus (6.372) für die Seitenabweichung  $\xi_C^z(t)$ :

$$\begin{aligned} \xi_C^z(t) = 2\omega \left\{ \sin\varphi \int_0^t [\hat{x}(t) - \hat{x}(t')] dt' \right. \\ \left. - \cos\varphi \sin\psi \int_0^t [\hat{x}(t) - \hat{x}(t')] \hat{p}(t') dt' \right\}. \end{aligned} \quad (6.381)$$

Setzt man für  $\hat{x}(t)$  und  $\hat{p}(t)$  die Bahnelemente des parabolischen Bahnmodells ein, so erhält man wieder (6.42).

Die Richtungsänderung der Fallbeschleunigung liefert im Rahmen der linearen Störungstheorie keinen Beitrag zur Seitenabweichung, wie aus (6.35) mit  $z = \hat{z} \equiv 0$  folgt.

Die Seitenabweichung des Geschosses, die durch die Rotation des Geschosses um seinen Schwerpunkt hervorgerufen wird, ist durch geringfügige Modifikation des klassischen Bahnmodells *nicht* zu erfassen. Hierzu wird ein Bahnmodell benötigt, das das Geschoß als starren Körper (nicht als Massenpunkt) interpretiert.

## 6.9. Ballistische Mittelwerte variabler Störungen

### 6.9.1. Vorbemerkungen

Unter einem *ballistischen Mittelwert* einer variablen Störung versteht man eine konstante Parameteränderung, die (bei einer vorgegebenen Vergleichsvariablen) auf ein spezielles Flugbahnelement die gleiche Wirkung ausübt wie der längs der Flugbahn variable Störeinfluß.

So kann man etwa einen *mittleren ballistischen Längswind* mit der konstanten Geschwindigkeit  $\bar{W}_x$  definieren, der die Horizontalschußweite  $x_e$  um den gleichen Betrag  $\delta x_e$  ändert wie der tatsächliche Längswind mit der variablen Geschwindigkeit  $W_x(t)$ ; siehe Abschnitt 6.9.3.

Aus dem Gesagten wird ersichtlich, daß der Betrag eines ballistischen Mittelwerts nicht nur von dem Verlauf der Störung (etwa als Funktion der geometrischen Höhe) abhängt, sondern ebenfalls von den Flugbahneigenschaften.

Im folgenden werden Beziehungen angegeben, die es gestatten, ballistische Mittelwerte beliebiger (kleiner) Flugbahnstörungen exakt zu ermitteln.

Eine exakte Ermittlung der ballistischen Mittelwerte für alle eingesetzten Waffensysteme und benötigten Flugbahnverläufe ist unter Gefechtsbedingungen nicht möglich. Es sind deshalb eine Reihe von Verfahren zur näherungsweise Berechnung von ballistischen Mittelwerten entwickelt worden. Eines dieser Verfahren wird in Abschnitt 6.9.4. skizziert.

### 6.9.2. Die mittlere ballistische Temperaturabweichung

Definiert man die mittlere ballistische Temperaturabweichung  $\delta\bar{\tau}_B$  als diejenige konstante Temperaturänderung, die die gleiche Schußweitenänderung wie die tatsächliche (höhenabhängige) Temperaturänderung  $\delta\tau(y)$  bewirkt, so ergibt sich aus (6.350), (6.354) und (6.361):

$$\delta\bar{\tau}_B = \frac{\int_{u_0}^{u_e} \left[ \frac{g_{ON}}{\mathfrak{R}_{LON}} \int_0^y \frac{\psi(y')}{\hat{\tau}(y')} dy' - \frac{1}{2} \hat{n}(v_e) \psi(y) \right] \eta^4(u') du'}{\frac{1}{\tau_{ON}} \left[ \hat{x}_e - \frac{1}{2} \hat{u}_0 \eta^4(t_0) \right]} \quad (6.382)$$

Die Elemente der Normalbahn sind hier als Funktion der Horizontalgeschwindigkeit  $u$  dargestellt. Die Transformation auf eine andere Integrationsvariable ist unschwer möglich.

Die Berechnung der ballistischen Mittelwerte läßt sich dadurch erleichtern, daß man den Höhenbereich zwischen Mündungshorizont und Flugbahngipfel in parallele Schichten unterteilt. Innerhalb der Schichten wird die Abweichung des betreffenden Parameters von dem Normalverlauf als konstant angenommen; der ballistische Mittelwert errechnet sich dann als gewichtetes Mittel der mittleren Abweichungen innerhalb der Teilschichten.

Die Bestimmung des ballistischen Mittelwerts reduziert sich damit auf die Aufgabe, Gewichte für die Zusammenfassung der (arithmetischen) Schichtmittel zu berechnen.



Es sei  $\varphi(y)$  die zu mittellnde Abweichung und  $\varphi_i$  das Schichtmittel der Abweichung in der  $i$ -ten Schicht. Dann ist (2.105) anwendbar:

$$\bar{\varphi} = \sum_{i=1}^m q_i \varphi_i, \quad \sum_{i=1}^m q_i = 1. \quad (6.383)$$

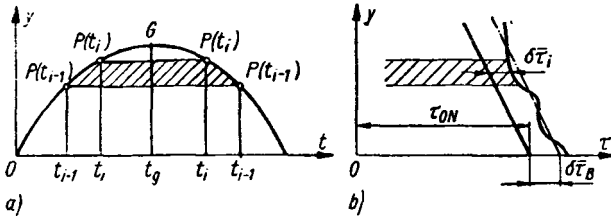


Bild 6.10 Zur Definition der mittleren ballistischen Temperaturabweichung  $\delta\bar{\tau}_B$

Die Temperaturabweichung habe vom Abgangspunkt  $O$  bis zu einem Bahnpunkt  $P(t_i)$  den Wert Null und vom Bahnpunkt  $P(t_i)$  bis zu dem Auftreffpunkt  $E$  den Betrag  $\delta\tau = 1$  grad. Der hierdurch hervorgerufene Schußweitenfehler werde mit  $Q_\tau(t_i, t_e)$  bezeichnet. Aus (6.358) folgt

$$Q_\tau(t_i, t_e) = \frac{1 \text{ grad}}{|A_{1N}^*|} \left[ \frac{1}{|\hat{p}_e|} - \eta_3(t_i) - \frac{g_{ON}}{\Re_{LON} \tau_{ON}} \int_{u_i}^{u_e} \eta^4(u') du' \right]. \quad (6.384)$$

Das Geschöß legt in der  $i$ -ten Schicht die Wege  $P(t_{i-1}) \rightarrow P(t_i)$  und  $P(t'_i) \rightarrow P(t'_{i-1})$  zurück (siehe Bild 6.10). Weicht die Temperatur in der  $i$ -ten Schicht im Mittel um  $\varphi_i = \delta\bar{\tau}_i = 1$  grad vom Sollwert ab, so wird hierdurch der Schußweitenfehler hervorgerufen

$$\delta\xi_i^* = Q_\tau(t_{i-1}, t_e) - Q_\tau(t_i, t_e) + Q_\tau(t'_i, t_e) - Q_\tau(t'_{i-1}, t_e).$$

Für das Gewicht  $q_i$  der  $i$ -ten Schicht folgt damit

$$q_{it} = \frac{Q_\tau(t_{i-1}, t_e) - Q_\tau(t_i, t_e) + Q_\tau(t'_i, t_e) - Q_\tau(t'_{i-1}, t_e)}{Q_\tau(t_0, t_e)}. \quad (6.385)$$

Zur grafischen Auswertung ist es vorteilhaft, die sogenannten *Gewichte der Segmente*  $q_\tau(y)$  einzuführen. Man versteht hierunter das Gewicht

desjenigen Bahnteils, der oberhalb des Niveaus  $y = y_i$  liegt:

$$q_r(y_i) = \frac{Q_r(t_i, t_e) - Q_r(t'_i, t_e)}{Q_r(t_0, t_e)}. \quad (6.386)$$

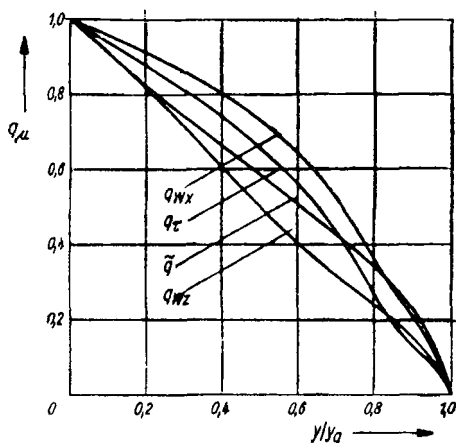


Bild 6.11  
Gewichtsfunktionen  $q_r$ ,  $q_{wz}$ ,  $q_{wx}$   
und  $\bar{q}$  als Funktion von  $y/y_g$

Für das Gewicht der  $i$ -ten Schicht gilt damit

$$q_{*i} = q_r(y_{i-1}) - q_r(y_i). \quad (6.387)$$

Die Kurve  $q_r(y)$  hat bei Bahnen der Klasse Boden – Boden mittlerer Reichweite etwa den in Bild 6.11 dargestellten Verlauf.

### 6.9.3. Der mittlere ballistische Wind

In der gleichen Weise, wie in Abschnitt 6.9.2. die mittlere ballistische Temperaturabweichung eingeführt worden ist, lassen sich der mittlere ballistische Längswind und der mittlere ballistische Seitenwind definieren. Die Gewichte sind für beide Windkomponenten unterschiedlich: Der mittlere ballistische Längswind soll die gleiche Schußweitenänderung, der mittlere ballistische Seitenwind die gleiche Seitenabweichung wie der variable Wind hervorrufen.

Ein Längswind, dessen Geschwindigkeit vom Abgangspunkt  $O$  bis zu dem Flugbahnpunkt  $P(t_i)$  den Betrag  $0$  und vom Punkt  $P(t_i)$  bis zum

Auftreffpunkt  $E$  den Betrag  $W_x = 1$  m/s hat, bewirkt nach (6.367) die Schußweitenänderung  $Q_{W_x}(t_i, t_e)$ ,

$$Q_{W_x}(t_i, t_e) = \left[ \hat{t}_e - \hat{t}_i + \frac{\hat{w}_i}{g_{0N}} + \frac{\hat{p}_i \hat{w}_i}{g_{0N}} \eta^3(t_i) - \left( \frac{\hat{E}_i \hat{w}_i}{g_{0N}} + 1 \right) \eta^4(t_i) \right] \cdot 1 \text{ m/s.} \quad (6.388)$$

Entsprechend folgt aus (6.378):

$$Q_{W_z}(t_i, t_e) = \left[ \hat{t}_e - \hat{t}_i - \frac{\hat{x}_e - \hat{x}_i}{\hat{u}_i} \right] \cdot 1 \text{ m/s.} \quad (6.389)$$

In Bild 6.11 sind für eine spezielle Flugbahn die Funktionen  $q_{W_x}(y_i)$  und  $q_{W_z}(y_i)$  angegeben, die analog zu (6.387) definiert sind. Eine detaillierte Darstellung der Berechnung von Gewichtsfaktorkurven findet man in [37]; siehe auch [43].

#### 6.9.4. Die näherungsweise Berechnung ballistischer Mittelwerte

Für die Belange des Schießens der Erdartillerie auf Bodenziele kann die Berechnung der ballistischen Mittelwerte im allgemeinen wesentlich vereinfacht werden. Diese Vereinfachung erfolgt durch

- Verwendung ein und derselben Gewichtsfunktion für alle meteorologischen Elemente,
- die Wahl von Gewichtsfunktionen, die von den speziellen ballistischen Eigenschaften der einzelnen Flugbahnen weitgehend unabhängig sind, sowie
- die Verringerung der Anzahl der Schichten, wobei im Extremfall nur zwei Schichten unterschieden werden.

Gewichte, die diesen Forderungen entsprechen, sind z.B. die auf der Grundlage der parabolischen Theorie in Abschnitt 2.8.4.2. berechneten Gewichte.

Daneben sind eine große Anzahl empirischer Gewichtsfunktionen vorgeschlagen worden. Als Beispiel sei die Funktion angeführt

$$\bar{q}(y) = 0,74 \left(1 - \frac{y}{\hat{y}_g}\right)^{0,5} + 0,26 \left(1 - \frac{y}{\hat{y}_g}\right)^2. \quad (6.390)$$

Wenn für Längs- und Seitenwind die gleichen Gewichtsfunktionen benutzt werden, kann man den mittleren ballistischen Windvektor sehr einfach mit Hilfe eines Vektordiagramms ermitteln.

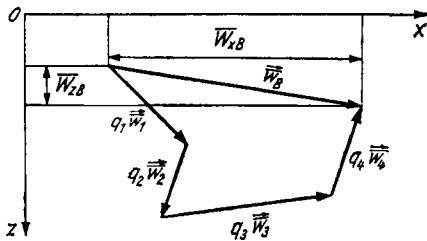


Bild 6.12  
Graphische Ermittlung des mittleren ballistischen Windvektors  $\bar{w}_B$

Es sei  $\bar{w}_i$  die mittlere Windgeschwindigkeit in der  $i$ -ten Schicht,  $q_i$  das Gewicht der  $i$ -ten Schicht und  $\bar{w}_B$  die mittlere ballistische Windgeschwindigkeit. Dann gilt

$$\bar{w}_B = \sum_{i=1}^n q_i \bar{w}_i, \quad \bar{w}_B = (\bar{w}_{xB}, 0, \bar{w}_{zB}) \quad (6.391)$$

(siehe Bild 6.12).

Auf die zahlreichen Methoden, die zur Bestimmung der ballistischen Mittelwerte in der artilleristischen Praxis benutzt werden, kann an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

## Kontrollfragen zu Kapitel 6

- 6.1. Charakterisieren Sie den Gegenstand der außenballistischen Störungstheorie!
- 6.2. Nach welchen Gesichtspunkten lassen sich die Störungsursachen klassifizieren?
- 6.3. Erläutern Sie qualitativ die Wirkung, die
  - Änderungen der Flugbahnparameter  $c, v_0, \theta_0$ ,
  - die Krümmung der Erdoberfläche im Bereich der Schußweite,
  - die Rotation der Erde um ihre Achse bzw.
  - die Strömung der Luft relativ zur Erdoberfläche (Wind)auf das Anfangswertproblem für das klassische Bahnmodell ausüben!
- 6.4. Worin besteht der Unterschied zwischen der Gravitationsbeschleunigung, die ein Geschöß der Masse  $m$  erfährt, und der (lokalen) Fallbeschleunigung?
- 6.5. Schildern Sie qualitativ die Wirkung der *Coriolis*-Kraft auf eine Flugbahn im Vakuum!
- 6.6. Änderungen welcher Parameter werden in der außenballistischen Störungstheorie behandelt? Worin besteht die Bedeutung der sogenannten *Grundstörungen*?
- 6.7. Welche Angaben sind unbedingt erforderlich, um einen Störungskoeffizienten vollständig zu charakterisieren? Was verstehen Sie unter dem Begriff *Fehlertransport-Matrix*?
- 6.8. Welche Wege zur Ermittlung von Störungskoeffizienten kennen Sie?
- 6.9. Worin besteht die Bedeutung der Vergleichsvariablen-Transformationsmatrizen (VT-Matrizen) für die außenballistische Störungstheorie?
- 6.10. Welche Angaben müssen bekannt sein, um eine VT-Matrix zu berechnen? Nennen Sie einige charakteristische Eigenschaften von VT-Matrizen!
- 6.11. Wann heißt eine VT-Matrix *elementar*? Bei welchen praktisch wichtigen Klassen von Transformationen der ungestörten Anfangswertprobleme sind die zugeordneten VT-Matrizen elementar?
- 6.12. Unter welcher Voraussetzung ist eine VT-Transformation umkehrbar-eindeutig?
- 6.13. Wie ist vorzugehen, um eine (numerisch) gegebene Fehlertransportmatrix auf eine andere Vergleichsvariable zu transformieren?
- 6.14. Erläutern Sie die Voraussetzungen und die Methodik, mit der die Störeinflüsse für Änderungen des Luftdrucks und der Lufttemperatur am Boden auf Grundstörungen zurückgeführt werden!
- 6.15. Warum gelten die Beziehungen (6.168), (6.169) für beliebige Vergleichsvariable?
- 6.16. Was verstehen Sie unter einem *homogenen ebenen Wind*? Wie ist zu verfahren, will man die Störungen infolge eines homogenen ebenen Windes auf Grundstörungen zurückführen?
- 6.17. Wie werden die Flugbahnelemente durch einen konstanten Längswind der Geschwindigkeit  $W_x$  beeinflusst, wenn  $W_x \ll \hat{u}_0$ ,  $W_x = \hat{u}_0$  bzw.  $W_x \gg \hat{u}_0$  ist? Man wiederhole die Überlegungen für einen konstanten Querwind mit  $W_z \ll \hat{u}_0$ ,  $W_z = \hat{u}_0$ ,  $W_z \gg \hat{u}_0$ !
- 6.18. Was läßt sich über den Anwendungsbereich der Formeln für die Störungskoeffizienten sagen, die mit Hilfe eines *Stacci*-Formelsatzes berechnet werden?
- 6.19. Erläutern Sie die Begriffe *zugeordnetes linearisiertes Störungsanfangswertproblem*, *V-transformiertes Störungsanfangswertproblem* und *adjungiertes Störungsanfangswertproblem*!
- 6.20. Welche Bedeutung haben die Fundamentalmatrizen (*Cauchy*-Matrizen) für die lineare ballistische Störungstheorie? Nennen Sie einige allgemeine Eigenschaften von Fundamentalmatrizen!

- 6.21. Wie geht man vor, um die Elemente von Fundamentalmatrizen (numerisch) zu ermitteln?
- 6.22. Welche praktische Bedeutung haben die in Tabelle 6.10 angegebenen Normierungsbedingungen für die Fundamentalmatrizen?
- 6.23. Warum können die Störungsdifferentialgleichungen für die Seitenabweichungen getrennt von den anderen Störungsgleichungen behandelt werden?
- 6.24. Aus welchem Grund werden die linearen Störungsdifferentialgleichungen nicht unmittelbar im  $t$ -System integriert, sondern im  $p$ -System?
- 6.25. In welchen Fällen ist der Weg über das adjungierte System der direkten Integration der Störungsdifferentialgleichungen vorzuziehen?
- 6.26. Was verstehen Sie unter dem *ballistischen Mittelwert* einer variablen Störung? Welche ballistischen Mittelwerte werden bei der Erdartillerie benutzt?

### Übungsaufgaben zu Kapitel 6

- 6.1. Man stelle  $[P_{(1,3)}(t|\hat{\mu})]^{-1}$  durch die VT-Matrizen für die Teiltransformationen  $\Sigma_{(1)} \leftrightarrow \Sigma_{(2)}$ ,  $\Sigma_{(2)} \leftrightarrow \Sigma_{(3)}$  dar (siehe Abschnitt 6.3.4.5.)!
- 6.2. Wie verändern sich die in Abschnitt 6.3.4.5. abgeleiteten VT-Matrizen, wenn man die Koordinaten  $z$  und  $q$  einbezieht?
- 6.3. Man beweise (6.144)!
- 6.4. Man leite aus dem Formelsatz (6.173) durch Vergleichsvariablen-Transformation die Beziehungen (6.182) her!
- 6.5. Analog zu den in den Abschnitten 6.3.5.6. und 6.3.5.7. vorgenommenen Ableitungen berechne man die Störungskoeffizienten für Änderungen der Mündungshöhe (Vergleichsvariable:  $\vartheta$ ,  $x$ ,  $y$ )!
- 6.6. Man wiederhole die Rechnungen des Abschnitts 6.3.5.8. für die Flugzeit  $t_e$ , den Auftreffwinkel  $\vartheta_e$ , die Auftreffgeschwindigkeit  $v_e$  sowie die Gipfelordinate  $y_g$  und diskutiere die Ergebnisse!
- 6.7. Unter welchen Voraussetzungen können die Radikanden in (6.198) und (6.199) nach Potenzen der Windgeschwindigkeitskomponenten entwickelt werden?
- 6.8. Man leite Beziehungen ab, mit denen der Einfluß eines homogenen ebenen Windes auf die Flugbahnelemente im Gipfelpunkt bestimmt werden kann!
- 6.9. Man entwickle die Formeln des Abschnitts 6.4.5. nach Potenzen von  $(W_z/\hat{u}_0)$ !
- 6.10. Man zeige, daß die Beziehungen (6.218) für die Störungskoeffizienten  $Z'_{W_x}(t|\hat{\mu})$  und  $Q'_{W_x}(t|\hat{\mu})$  bei Übergang zu den Vergleichsvariablen  $x, y$  ungeändert gültig bleiben (Erklärung!).
- 6.11. Man wiederhole die in Abschnitt 6.4.9. durchgeführten Rechnungen für den Auftreffwinkel  $\vartheta_e$ , die Auftreffgeschwindigkeiten  $v_e$  und die Gipfelhöhe  $y_g$ . (Zur Berechnung des Windeinflusses auf die Gipfelhöhe sind die Ergebnisse von Übungsaufgabe 6.8. zu benutzen.)
- 6.12. Man berechne nach dem Verfahren von *Siacci* die Störungskoeffizienten  $T'_c(t_e|\hat{\mu})$ ,  $T'_x(t_e|\hat{\mu})$  und  $T'_y(t_e|\hat{\mu})$ !
- 6.13. Man stelle die Störungskoeffizienten-Matrix für den allgemeinen *Siacci*-Formelsatz (Tabelle 5.4, Seite 252) auf und transformiere sie anschließend auf die Vergleichsvariablen  $x$  und  $y$ !
- 6.14. Für die Flugbahnelemente, die sich beim linearen Ansatz für das Luftwiderstandsgesetz (Abschnitt 5.3.1.1.) ergeben haben, berechne man die Fehlertransportmatrizen bezüglich der Vergleichsvariablen  $t$ ,  $x$  und  $y$ !

- 6.15. Man beweise die Formel (6.263) für ein System von zwei linearen Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten!
- 6.16. Durch die Differentiation nach  $t$  zeige man die Gültigkeit der Beziehungen (6.266) und (6.267)!
- 6.17. Man beweise (6.301) und zeige  $\Phi_{(1)}\Phi_{(1)}^{-1} = I_n$ !
- 6.18. Man berechne die Koeffizientenmatrix für den Fall, daß (6.302) um die Differentialgleichungen für  $z$  und  $q$  erweitert wird. Wie ist in diesem Fall die VT-Matrix  $P_{(1,6)}(t)$  (6.329) abzuändern?
- 6.19. Man berechne die Inverse der Matrix  $\Phi(t)$  (6.340) mit Hilfe des Verfahrens der Zerlegung in Blockmatrizen!
- 6.20. Man stelle die VT-Matrix  $P_{(6,3)}(t)$  auf, die dem Übergang vom Variablensystem  $\Sigma_{(6)} = \{p; t, x, y, u\}$  zum Variablensystem  $\Sigma_{(3)} = \{x; t, y, v, \vartheta\}$  zugeordnet ist!
- 6.21. Man leite (6.357) durch partielle (logarithmische) Differentiation von  $E$  nach  $\tau_0$  her!
- 6.22. Wie sind die Beziehungen der Abschnitte 6.8.3.3. bis 6.8.3.6. zu modifizieren, wenn nicht die Änderung der Horizontalschußweite, sondern die Änderung der Flugzeit  $t_e$  bestimmt werden soll?
- 6.23. Wie lautet die Störfunktion  $\varepsilon(t)$  in (6.347) für eine Änderung des Widerstandsbeiwerts  $c_w(M)$  um  $\delta c_w(M)$ ?
- 6.24. Welche Gestalt nimmt das adjungierte System (6.344) an, wenn zusätzlich die Störungsgleichungen für  $z$  und  $q$  berücksichtigt werden?
- 6.25. Man stelle die Formeln für die Seitenabweichungen durch die Lösung des (erweiterten) adjungierten Systems dar!

## 7. Die Aufstellung von Schußtafeln für die Erdartillerie<sup>1)</sup>

### 7.1. Vorbemerkungen

Schußtafeln sind Sammlungen von Daten, die für die Vorbereitung und Durchführung des Schießens auf Erd-, See- und Luftziele benötigt werden. Diese Daten bilden zugleich die ballistische Grundlage für die Konstruktion von Zieleinrichtungen und automatischen Anlagen zur Feuerführung.

Die Ausarbeitung einer wissenschaftlichen Methodik der Aufstellung von Schußtafeln ist die wichtigste angewandte Aufgabe der Äußeren Ballistik. Man könnte die Äußere Ballistik deshalb auch „Wissenschaft von der Aufstellung von Schußtafeln“ nennen.

Die Forderungen, die an die Genauigkeit von Schußtafeln gestellt werden, sind erheblich strenger als die Genauigkeitsanforderungen, die die Rechnungen im Rahmen der ballistischen Projektierung eines neuen Waffensystems erfüllen müssen.

Bei Flugbahnrechnungen, die im Zuge der ballistischen Projektierung einer Rohrwaﬀe durchgeführt werden, genügt es, die maximale Schußweite mit einer Genauigkeit von  $(3 \cdots 5) \%$  zu ermitteln. Eine höhere Genauigkeit braucht nicht angestrebt zu werden, weil bis zur Erprobung des Systems und der Durchführung von Versuchsschießen der globale Formkoeffizient des Geschosses nur näherungsweise bekannt ist. Außerdem ermöglicht die konstruktiv vorgesehene Festigkeitsreserve immer, durch eine geringfügige Veränderung der Ladungsmasse Anfangsgeschwindigkeit und Schußweite des Geschosses um einige Prozent zu variieren, ohne daß die Waﬀe hierbei Schaden nimmt.

Völlig anders ist die Situation bei der Aufstellung von Schußtafeln. Hier können bereits relativ kleine Schußweitenfehler der Größenordnung  $\delta x_e / \hat{x}_e = 5 \text{ ‰}$  zur Verringerung der Treffwahrscheinlichkeit um 20% (und mehr) führen.

<sup>1)</sup> Die Ausführungen dieses Kapitels lehnen sich an Šapiro [2], Kap. 9, an. Die im Text wiedergegebenen Daten sind (bis auf wenige Ausnahmen) dieser Quelle entnommen.



Die gegenwärtig übliche Methodik der Aufstellung von Schußtafeln ist experimentell-theoretisch: Die Flugbahnelemente, die Störungskoeffizienten und die anderen Angaben der Schußtafeln werden nach den Verfahren der Äußeren Ballistik berechnet; bei den Rechnungen werden jedoch experimentelle Werte einiger Parameter benutzt, die aus einer (verhältnismäßig geringen) Anzahl spezieller Versuchsschießen folgen.

Experimente sind ein notwendiger Bestandteil jeder Wissenschaft, auch jeder Erkenntnis, wengleich sich der *Charakter der Versuche* mit der Entwicklung der betreffenden Wissenschaft selbst verändert.

Diese allgemeine Feststellung trifft in vollem Umfang auch auf die Aufstellung von Schußtafeln zu: Die Versuchsschießen bilden eine der Grundlagen, auf denen die Schußtafeln aufbauen. Die Anzahl der erforderlichen Schießversuche und ihr Charakter hängen jedoch in entscheidendem Maße von dem Entwicklungsstand der artilleristischen Technik im allgemeinen und dem Niveau der theoretischen Kenntnisse auf dem Gebiet der Äußeren Ballistik im besonderen ab.

Fast bis zum Ende des vorigen Jahrhunderts sind die Schußtafeln im wesentlichen auf empirischem Wege ermittelt worden, wozu außerordentlich umfangreiche Schießversuche erforderlich waren. Dieses Vorgehen entsprach einerseits dem wissenschaftlichen Niveau der Äußeren Ballistik jener Zeit, andererseits den niedrigen Genauigkeitsforderungen, die bei dem damaligen Entwicklungsstand der Artillerietechnik und der Schießverfahren an eine Schußtafel gestellt wurden.

Der Hauptnachteil der überwiegend empirischen Methodik der Schußtafel-Ermittlung besteht nicht in erster Linie in dem hohen Munitionsaufwand, sondern vielmehr darin, daß es auf diesem Wege unmöglich ist, die Schußtafel-Angaben mit hoher Genauigkeit zu bestimmen.

Jeder Schießversuch wird unter konkreten ballistischen und meteorologischen Bedingungen durchgeführt. Die hierbei ermittelten Schußtafel-Daten sind somit zunächst nur unter den speziellen Versuchsbedingungen (den sogenannten „Tagesbedingungen“) gültig.

Für das praktische Schießen unter Bedingungen, die sich von den Bedingungen des Versuchsschießens unterscheiden, ist es erforderlich, die experimentell ermittelten Bahnelemente auf die neuen Bedingungen zu transformieren. Das ist jedoch nur mit Hilfe der theoretischen Beziehungen möglich, die in der Äußeren Ballistik abgeleitet werden.

Die gleiche Problematik liegt vor, wenn experimentelle ballistische Daten auf gewisse (vorgegebene) ballistische und meteorologische Normalbedingungen reduziert werden sollen.

Auf mathematische Methoden der Äußeren Ballistik muß man ebenfalls

zurückgreifen, wenn Flugbahnelemente benötigt werden, die experimentell nur schwer zugänglich sind, wie die Auftreffgeschwindigkeit, der Auftreffwinkel und die Gipfelhöhe.

Das klassische Bahnmodell enthält als Flugbahnparameter die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , den Abgangswinkel  $\vartheta_0$  und den Ballistischen Koeffizienten  $c$ , der seinerseits von dem (globalen) Formkoeffizienten  $i$  abhängt.

Die Idealisierungen des klassischen Bahnmodells<sup>1)</sup> sind relativ einschneidend; unberücksichtigt bleiben unter anderem

- das individuelle Luftwiderstandsgesetz des betreffenden Geschosses;
- die Rotationsbewegung des Geschosses um seinen Schwerpunkt, die sowohl den Betrag des Luftwiderstands wie auch die Form der Flugbahn beeinflusst;
- die Normal- und die Seitenkomponente der Resultierenden der aerodynamischen Kräfte sowie
- die Erdrotation (die Abweichung des verwendeten Koordinatensystems von einem Inertialsystem).

Führt man mit ein und demselben Geschoß unter variierenden Anfangsbedingungen Schießversuche durch und paßt anschließend die Schußweiten nach dem in Abschnitt 3.6. geschilderten Verfahren global an das klassische Bahnmodell an, so erhält man für den globalen Formkoeffizienten Zahlenwerte, die sowohl von der Anfangsgeschwindigkeit wie auch vom Abgangswinkel abhängen. Eine zentrale Aufgabe der Schußtafel-Schießen besteht darin, diese funktionellen Abhängigkeiten des globalen Formkoeffizienten zu ermitteln.

Flakschußtafeln enthalten die Flugbahnelemente für die laufenden Bahnpunkte; als unabhängige Variable dient meist die Flugzeit  $t$ . Bei der Aufstellung von Flakschußtafeln genügt es deshalb im allgemeinen nicht, die experimentelle und die Modellbahn nur in einem einzigen Flugbahnpunkt anzupassen, wie dies bei Bahnen der Klasse Boden – Boden üblich ist. Der Formkoeffizient  $i$  wird damit eine Funktion des laufenden Flugbahnparameters, ist also etwa in der Form darstellbar:

$$i = f(t|c_0, v_0, \vartheta_0), \quad c_0 = \frac{d^2 i_0}{m} \cdot 1000.$$

Auf die Ermittlung von Schußtafeln für den Beschuß von Luftzielen wird im folgenden nicht näher eingegangen.

<sup>1)</sup> Zu den Voraussetzungen des klassischen Bahnmodells siehe Abschnitt 4.1.1.

Im Zuge der Aufstellung von Artillerie-Erdschußtafeln müssen eine Reihe von ballistischen Versuchsschießen durchgeführt werden, die die Grunddaten liefern, auf denen die Schußtafel-Berechnungen fußen. Zu diesen speziellen ballistischen Schießversuchen gehören:

- Entfernungsschießen (mit Aufschlag- und Abstandszündern) zur Ermittlung der experimentellen Horizontalschußweiten, der Streuungscharakteristiken sowie der Einstellungen des Abstandszünders;
- Schießen gegen Scheiben zur Bestimmung der Ballistischen Koeffizienten und der Streuungsmaße der panzerbrechenden Geschosse, die für das betreffende Waffensystem vorgesehen sind;
- Schießen zur Ermittlung der Anfangsgeschwindigkeit;
- Schießen zur Bestimmung der Abgangsfehlerwinkel;
- Schießen zur Bestimmung der Seitenabweichungen;
- Vergleichsschießen zur Ermittlung des Einflusses der konstruktiven Besonderheiten von Geschossen, die von dem Sollzustand abweichen, des Einflusses der Zünderkappe, des Farbanstrichs u. ä.

Einige dieser Schießversuche können zusammengefaßt werden. So wird die Ermittlung der Anfangsgeschwindigkeit nach Möglichkeit mit einem Entfernungsschießen gekoppelt.

Werden aus ballistischen oder technischen Erwägungen zur Messung der Anfangsgeschwindigkeit spezielle Schießversuche angesetzt, so verbindet man mit ihnen die Abgangsfehlerwinkel-Bestimmung.

Zur Ausschaltung des Windeinflusses auf die Schießergebnisse sind sogenannte *Gegenschießen*<sup>1)</sup> geeignet, aus deren Resultaten zugleich die drallbedingten Seitenabweichungen gewonnen werden können.

Neben den genannten Schußtafel-Schießen werden nicht selten *Hilfsschießen* durchgeführt, die zur Vorbereitung der eigentlichen ballistischen Schießversuche dienen. Zu diesen Schießversuchen mit Hilfscharakter gehören die Schießen zur Auswahl der Ladung sowie die Schießen zur Bestimmung der Charakteristiken<sup>2)</sup> der Waffe, die für die Durchführung der Schußtafel-Schießen (im engeren Sinne) benötigt werden.

Die Ausführungen dieses Kapitels verfolgen das Ziel, einige wichtige

<sup>1)</sup> Unter *Gegenschießen* versteht man die gleichzeitige Abgabe von je einem Schuß aus zwei ballistisch gleichartigen Geschützen, deren Schußrichtungen – bei sonst konstanten Anfangsbedingungen – zueinander antiparallel sind; siehe Abschnitt 7.4.3.2.

<sup>2)</sup> Eine derartige Waffencharakteristik ist z.B. die Veränderung der Anfangsgeschwindigkeit als Funktion der Schußanzahl.

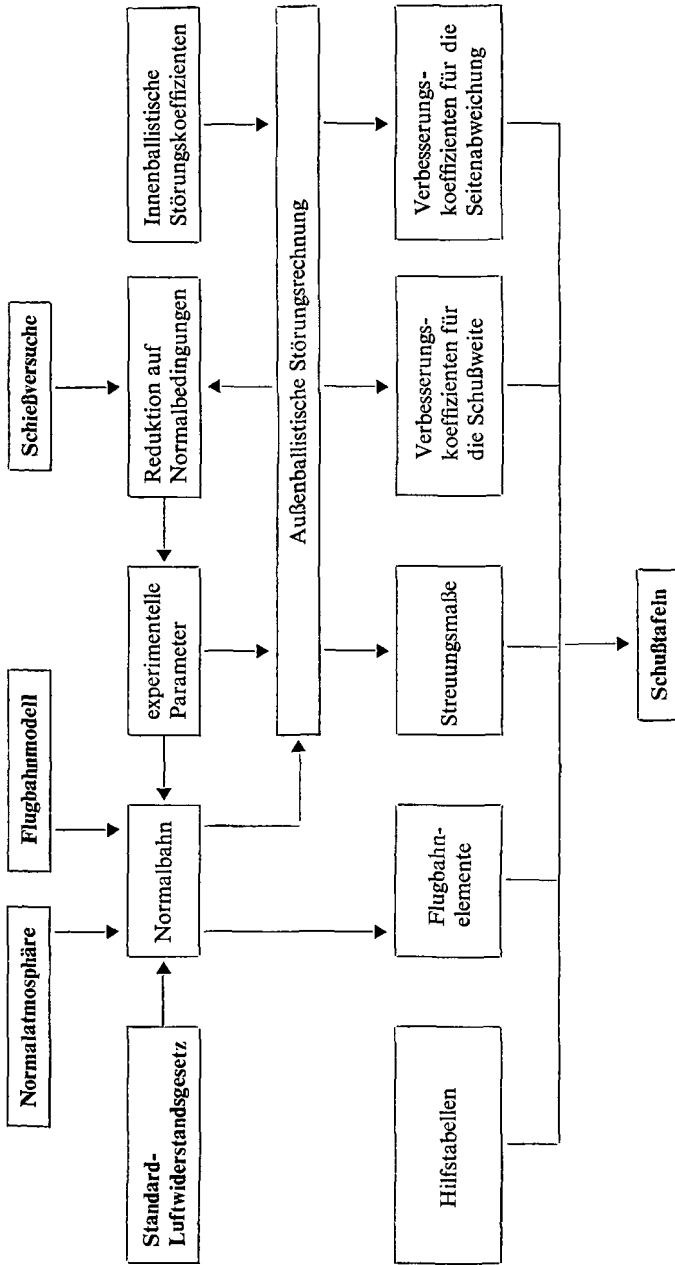


Bild 7.1 Aufstellung von Schußstufen (Übersicht)

Gesichtspunkte zu erläutern, die bei der Vorbereitung, Durchführung und Auswertung von Schußtafel-Schießen der Erdartillerie zu beachten sind. Vollständigkeit kann hierbei nicht angestrebt werden. Das Vorgehen zur Aufstellung von Schußtafeln ist in dem Blockdiagramm Bild 7.1 veranschaulicht.

## 7.2. Inhalt und Aufbau von Erdschußtafeln

### 7.2.1. Klassifizierung der Erdschußtafeln

Die Schußtafeln müssen alle diejenigen Daten enthalten, die für die Vorbereitung und Führung des Artilleriefeuers unter den verschiedenen möglichen Gefechtsbedingungen erforderlich sind.

Um die Schußtafeln nicht zu umfangreich werden zu lassen, schafft man für die Hauptklassen von Gefechtsbedingungen gesonderte Schußtafeln. Die naheliegendste Unterteilung ist die Unterscheidung von

- Schußtafeln für das Schießen auf Boden- und Seeziele und
- Schußtafeln für das Schießen auf Luftziele.

Die *Schußtafeln für den Beschuß von Bodenzielen* werden ihrerseits unterteilt in:

- Schußtafeln für das Schießen im direkten Richten;
- Schußtafeln für das Schießen im indirekten Richten (Schießen mit rechnerischer Ermittlung der Anfangsangaben) auf Bodenziele, die einen geringen vertikalen Abstand von der Mündungsebene haben (*Schußtafeln für das Aufschlagsschießen*);
- Schußtafeln für das Schießen mit Abstandszündern (Schießen mit hochgezogenem Sprengpunkt) und
- Gebirgsschußtafeln für Abgangspunkte, die wesentlich über dem Mündungsniveau  $y_{0N} = 0$  des Bahnmodells liegen ( $0 \leq y_0 \leq 3000$  m).

Diese vier Arten von Schußtafeln müssen in der Regel für jeden Geschosstyp und jede Ladung getrennt aufgestellt werden.

Wird ein Geschosß bis zu Entfernungen  $x_e \leq 4000$  m sowohl im direkten Richten wie auch mit rechnerischer Vorbereitung der Anfangsangaben eingesetzt, so vereint man die Schußtafeln für das Schießen im direkten Richten und die Schußtafeln für das Aufschlagsschießen zu einer einzigen Tafel.

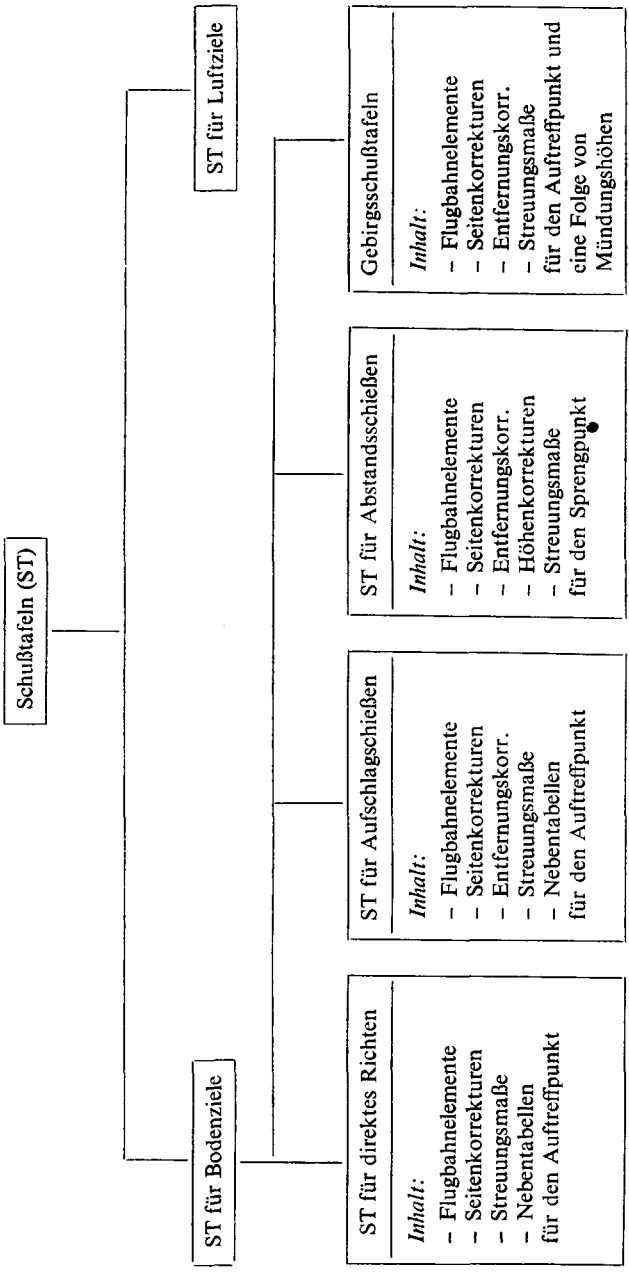


Bild 7.2 Klassifizierung der Erdschußtafeln (Übersicht)

Tabelle 7.1 Schußtafel (Haupttafel) für das Schießen im direkten Richten

Visierskalen: Geschoß:  
 Zünder:  
 Ladung:  
 Anfangsgeschwindigkeit:

Entfernungen des direkten Schusses  
 (für verschiedene Zielhöhen):

Entfernung	Aufsatz			Seitenverbesserungen		Änderung der Höhe des Auftreffpunkts bei einer Aufsatzänderung um 1 T-Str.	Aufsatzwinkel		Aufreffwinkel	Aufreffgeschwindigkeit	Flugzeit	Wahrscheinliche Abweichungen des Auftreffpunkts in der		Entfernung
	Richtaufsatz	Zielfernrohr	Strichskale	für den Drall	für Seitenwind von 10 m/s		$\Delta Y_v$	$\alpha_0$				$ \theta' $	$v_a$	
$x_c$	A			$\Delta Z_D$	$\Delta Z_W$	$\Delta Y_v$	$\alpha_0$	$ \theta' $	$v_a$	$t_c$	$S'_{H1}$	$S'_{B}$	$x_c$	
m	$\Delta X^1)$	Teil-str. <sup>2)</sup>	Str. <sup>3)</sup>	Str.	Str.	m	Grad	Grad	m/s	s	m	m	m	

1)  $\Delta X$ -Teilung des Richtaufsatzes: 1  $\Delta X \cong 50$  m Schußweitenänderung

2) Strichteilung des Zielfernrohrs: 1 Teilstrich  $\cong 100$  m Schußweitenänderung

3) 1 Strich der Strichskale (0-01)  $\cong$  Änderung des Aufsatzwinkels um 3,6'

Die Schußtafeln bestehen jeweils aus einer *Haupttafel* und einer Reihe von *Nebentafeln*; die Darstellung der Schußtafel-Daten kann hierbei numerisch oder grafisch erfolgen.

Einen Überblick über die verschiedenen Klassen von Schußtafeln vermittelt Bild 7.2.

### **7.2.2. Der Aufbau der Schußtafeln für das Schießen im direkten Richten**

Schußtafeln für das Schießen im direkten Richten werden für alle Typen panzerbrechender Geschosse der Kanonen- und Haubitzensysteme aufgestellt. Sie sind für das Schießen bei kleinen Aufsatzwinkeln über Entfernungen bis zu  $x_e = (1 \cdots 4)$  km bestimmt.

Aufbau und Angaben der Haupttafel können Tabelle 7.1, Seite 499 entnommen werden.<sup>1)</sup>

Zu den Nebentafeln gehören unter anderem:

- die Tabelle der Flugbahnordinaten (Höhe der Flugbahn über dem Mündungshorizont) und
- die Tabelle der Durchschlagsleistung der Geschosse.

### **7.2.3. Der Aufbau der Schußtafeln für das Schießen im indirekten Richten**

Schußtafeln für das Schießen im indirekten Richten (mit berechneten Anfangsangaben) werden für alle Arten von Geschossen mit Aufschlagszündern aufgestellt, die aus Kanonen, Haubitzen und Granatwerfern verschossen werden.

Aufbau und Angaben der Haupttafel sind in Tabelle 7.2, Seite 502 dargestellt.

Der Komplex der Nebentafeln umfaßt:

- Tafeln für die Ladungswahl (bei Systemen mit mehreren Ladungen);
- Tafeln für die Aufsatzwinkelkorrektur beim Schießen mit Gelände-winkel;
- Tabelle der kürzesten Schußentfernung (des kleinsten Aufsatzwinkels), die (der) beim Schießen aus einer gedeckten Feuerstellung zulässig ist;

<sup>1)</sup> Die in der Artilleriepraxis benutzten Symbole und Bezeichnungen weichen zum Teil von der im folgenden verwendeten Symbolik und Terminologie ab.



- die Tabelle der Seitenverbesserungen für die Erdrotation (*Coriolis-Beschleunigung*)

und weitere Hilfstabellen für das praktische Schießen.

Jede Schußtafel enthält außerdem technische und ballistische Angaben über Geschütz und Munition sowie über die experimentellen Grundlagen der Schußtafel-Berechnung.

Auf den Aufbau der Schußtafeln für das Schießen mit Abstands- (Distanz-) Zündern sowie der Gebirgsschußtafeln kann in diesem Zusammenhang nicht näher eingegangen werden.

#### 7.2.4. Die Angaben der Haupttafeln von Erdschußtafeln

Die Haupttafeln einer Erdschußtafel umfassen drei Gruppen von Daten:

- Flugbahnelemente der Normalbahn;
- Störungs- und Verbesserungskoeffizienten für die Lage des Auftreffpunkts in der Mündungsebene;
- Streuungscharakteristiken für die Lage des Auftreffpunkts in der Mündungsebene (bei konstanten Anfangsbedingungen).

In der Gruppe *Flugbahnelemente der Normalbahn* sind als Funktion der Horizontalschußweite  $x_e$  angegeben:

- die AufsatzEinstellung  $A$  (in  $\Delta X$ , Teilstrich bzw. Strich) und der Aufsatzwinkel  $\alpha_0$  (in Grad);
- die Flughöhe (Ordinate des Gipfelpunkts)  $y_g$ ,
- die Flugzeit  $t_e$  bis zum Auftreffen in der Mündungsebene;
- die Auftreffgeschwindigkeit  $v_e$  sowie
- der Auftreffwinkel  $\vartheta_e$ .

Die *Störungskoeffizienten* geben an, wie sich ein spezielles Flugbahnelement (etwa die Horizontalschußweite) ändert, wenn ein Flugbahnparameter eine gewisse Störung erfährt. Die *Verbesserungskoeffizienten* hingegen nennen die erforderliche Änderung des Flugbahnelements, mit der die vorgegebene Parameterstörung kompensiert werden kann. Störungs- und Verbesserungskoeffizient für ein und dasselbe Flugbahnelement und eine vorgegebene Parameterstörung unterscheiden sich somit nur durch ihr Vorzeichen.

Tabelle 7.2 Schußtafel (Haupttafel) für das Schießen im indirekten Richten

Geschoß:  
 Zünder:  
 Ladung:  
 Anfangsgeschwindigkeit:

Aufsatzskalen:  
 Entfernungen des direkten Schusses  
 (für verschiedene Zielhöhen):

Horizontale Entfernung	$x_c$	m		
Richtaufsatz	A	Str.		
	X	Str.		
Strichskala	$y_s$	m		
Aufsatz	Für den Draht	$\Delta Z_D$	Str.	
	Für Seitenwind von 10 m/s	$\Delta Z_W$	Str.	
Verbesserungen der Entfernung	Für Seitenwind von 10 m/s	$\Delta X_W$	m	
	Für Längswind von 10 m/s	$\Delta X_L$	m	
	des Luftdrucks um 10 Torr	$\Delta X_D$	m	
	der Lufttemperatur um 10 grd	$\Delta X_T$	m	
	der Anfangsgeschwindigkeit um 1 %	$\Delta X_v$	m	
	der Ladungstemperatur um 10 grd	$\Delta X_T$	m	
	der Geschobmasse um 1 Vorzeichen	$\Delta X_m$	m	
Änderung der Horizontalschubweite bei Änderung des Aufsatzwinkels um 1 Strich	$\Delta X_x$	m		
	$\Delta \alpha_G$	Str.		
Enge Gabel	$\alpha_0$	Grd. min		
	$\alpha_0$	Grd.		
Aufsatzwinkel	$ \vartheta_c $	Grad		
Auftreffwinkel	$v_c$	m/s		
Auftreffgeschwindigkeit	$t_c$	s		
Flugzeit	Wahrscheinliche Abweichungen des Auftreffpunkts in der	Seite		
Entfernung		Höhe	$S_{Hl}$	m
		Seite	$S_{Hs}$	m
Horizontale Entfernung	$x_c$	m		

In der Gruppe *Störungs- und Verbesserungskoeffizienten* muß zwischen Koeffizienten der Horizontalentfernung und Koeffizienten der Seitenabweichung des Auftreffpunkts unterschieden werden.

Als *Verbesserungskoeffizienten für die Seitenrichtung* findet man in der Schußtafel

- die Seitenverbesserung  $\Delta Z_D$  für die Seitenabweichung infolge des Geschoßdralls (in Strich) und
- den Verbesserungskoeffizienten  $\Delta Z_W$  für einen Seitenwind mit der Geschwindigkeit  $W_x = 10$  m/s.

Die Verbesserungen für die Längs- und Seitenabweichungen infolge der *Coriolis*-Beschleunigung hängen von dem Winkel  $\psi^1$ ) ab, den die Abgangsebene mit der Richtung zum Nordpol bildet. Man stellt diese Verbesserungskoeffizienten deshalb in einer besonderen Nebentafel dar. Bei Schußweiten  $x_e \leq (20 \cdots 30)$  km genügt es, allein die Seitenverbesserung  $\Delta Z_C$  zu berücksichtigen; die Entfernungskorrektur  $\Delta X_C$  ist meist wesentlich kleiner als die wahrscheinliche Abweichung der Horizontalschußweite  $St_E$ .

Zu den *Störungs- und Verbesserungskoeffizienten für die Horizontalentfernung* des Auftreffpunkts gehören:

- die Verbesserungskoeffizienten für eine Änderung
  - des Luftdrucks  $p_0$  am Boden um  $\delta p_0 = 10$  Torr:  $\Delta X_p$ ;
  - der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  um  $\delta v_0/v_0 = 1\%$ :  $\Delta X_v$ ;
  - der mittleren ballistischen Lufttemperatur  $\tau_0 = \bar{\tau}_B$  um  $\delta \bar{\tau}_B = 10$  grad:  $\Delta X_\tau$ ;
  - der Ladungstemperatur  $T_L$  um  $\delta T_L = 10$  grad:  $\Delta X_T$ ;
  - der Geschoßmasse um 1 Masse-Vorzeichen  $\cong \delta m/\bar{m} = \frac{2}{3}\%$ :  $\Delta X_m$ ;
- der Verbesserungskoeffizient für einen Längswind der Geschwindigkeit  $W_x = 10$  m/s:  $\Delta X_W$ ;
- der Störungskoeffizient der Horizontalschußweite  $x_e$  für Änderung des Aufsatzwinkels  $\alpha_0$  um  $\delta \alpha = 0-01$ :  $\Delta X_\alpha$  und
- der Störungskoeffizient der Höhe  $y_e$  des Auftreffpunkts bei einer Änderung des Aufsatzes  $A$  um  $\delta A = 1$   $\Delta X$ :  $\Delta Y_A$  sowie
- der Störungskoeffizient des Aufsatzwinkels  $\alpha_0$  (in Strich) für eine Schußweitenänderung um  $\delta x_e = 4 St_E$  (die sogenannte *Enge Gabel*):  $\Delta \alpha_G$ .

<sup>1)</sup> Siehe Abschnitt 6.2.3. und Bild 6.1 b, Seite 342.

Erforderlichenfalls werden auch die Verbesserungskoeffizienten für

- das Schießen mit unlackierten Granaten:  $\Delta X_F$ ,
- das Schießen ohne Zünderkappe:  $\Delta X_K$  und
- den Einfluß der Krümmung der Erdoberfläche:  $\Delta X_{Kr}$

angegeben.

Die Gruppe *Streuungscharakteristiken für die Lage des Auftreffpunkts* enthält die wahrscheinlichen Abweichungen der Lage des mittleren Treffpunkts in der Entfernung  $St_E$ , der Breite  $St_B$  und der Höhe  $St_H$ .<sup>1)</sup>

Die Abweichungen der Lage des Auftreffpunkts von dem mittleren Treffpunkt werden in 1. Näherung als normalverteilt angenommen. Außerdem wird vorausgesetzt, daß die Abweichungen der Lage des Auftreffpunkts in x-, y- und z-Richtung voneinander statistisch unabhängig (nicht korreliert) sind.

Die wahrscheinlichen Abweichungen  $St_E$ ,  $St_B$  und  $St_H$  geben die „Reststreuungen“ der Lage des Auftreffpunkts an, die auch bei sorgfältiger Vorbereitung des Schießens unter meteorologischen und ballistischen Normalbedingungen nicht vermieden werden können. Unter den realen Bedingungen des Gefechtsschießens ist mit resultierenden wahrscheinlichen Abweichungen der Lage des Auftreffpunkts zu rechnen, die die in der Schußtafel angegebenen wahrscheinlichen Abweichungen erheblich (um ein Vielfaches) übersteigen; siehe [34], [48].

### 7.2.5. Die Formeln für die Verbesserungskoeffizienten der Schußtafeln

Die Verbesserungskoeffizienten der Schußtafeln unterscheiden sich in ihrer Definition sowohl von den Störungskoeffizienten, die in der außenballistischen Störungstheorie benutzt werden, wie auch von den Störungskoeffizienten, die in den außenballistischen Tafelwerken angeführt sind. Zur Berechnung des Störungskoeffizienten für Änderungen der Geschossmasse wie auch des Störungskoeffizienten für Änderungen der Ladungstemperatur müssen überdies Ergebnisse der innenballistischen Störungstheorie herangezogen werden.

<sup>1)</sup> Eine gute Einführung in die Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik findet der Leser in *Storm, R.: Wahrscheinlichkeitsrechnung/Mathematische Statistik/Statistische Qualitätskontrolle*. 3. Aufl., Leipzig 1969. Siehe auch [36].

### 7.2.5.1. Der Verbesserungskoeffizient für Änderungen des Luftdrucks am Boden

Der Verbesserungskoeffizient  $\Delta X_p$  für Änderungen des Luftdrucks am Boden ist definiert als diejenige Schußweitenänderung, die erforderlich ist, um eine Erhöhung des Luftdrucks  $p_0$  am Boden  $\delta p_0 = 10$  Torr zu kompensieren. (Entsprechendes gilt für eine Luftdruckabnahme.)

Der Koeffizient  $\Delta X_p$  kann wahlweise durch den Störungskoeffizienten  $X_p^y(t|\hat{\mu})$  (Abschnitt 6.3.5.5.) oder den Störungskoeffizienten  $Q_c$  (Abschnitt 6.5.) dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\Delta X_p &= - \left( \frac{\partial x_e}{\partial p_0} \right)_N^y \cdot 10 \text{ Torr} = - \frac{\hat{c}}{p_{0N}} \left( \frac{\partial x_e}{\partial c} \right)_N^y \cdot 10 \text{ Torr} \\ &= - \frac{1000 \text{ Torr}}{p_{0N}} \left( \frac{\partial x_e}{\partial c} \right)_N^y \frac{\hat{c}}{100}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt mit  $p_{0N} = 750 \text{ Torr}^1$ ):

$$\Delta X_p = - \frac{4 \hat{c}}{300} X_c^y(t_c|\hat{\mu}) = \frac{4}{3} |Q_c|. \quad (7.1)$$

Der Verbesserungskoeffizient  $\Delta X_p$  ist positiv ( $\Delta X_p \geq 0$ ).

### 7.2.5.2. Der Verbesserungskoeffizient für Änderungen der Anfangsgeschwindigkeit

Der Verbesserungskoeffizient  $\Delta X_v$  für Änderungen der Anfangsgeschwindigkeit ist diejenige Schußweitenänderung, mit der eine Erhöhung der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  um  $\delta v_0/\hat{v}_0 \cong 1\%$  ausgeglichen werden kann:

$$\begin{aligned}\Delta X_v &= - \left( \frac{\partial x_e}{\partial v_0} \right)_N^y \frac{\hat{v}_0}{100} = - \frac{\hat{v}_0}{100 \text{ m/s}} \left( \frac{\partial x_e}{\partial v_0} \right)_N^y \cdot 1 \text{ m/s}, \\ \Delta X_v &= - \frac{\hat{v}_0}{100} X_v^y(t_c|\hat{\mu}) = - \frac{\hat{v}_0}{100 \text{ m/s}} |Q_{v_0}|.\end{aligned} \quad (7.2)$$

Der Verbesserungskoeffizient  $\Delta X_v$  ist stets negativ ( $\Delta X_v \leq 0$ ).

<sup>1</sup> In diesem Abschnitt wird die Artillerie-Normalatmosphäre (Abschnitt 3.2.6.3.) zugrunde gelegt.

### 7.2.5.3. Der Verbesserungskoeffizient für Änderungen der Lufttemperatur am Boden

Der Verbesserungskoeffizient  $\Delta X_\tau$  für Änderungen der Lufttemperatur am Boden (der mittleren ballistischen Lufttemperatur) ist diejenige Schußweitenänderung, mit der eine Erhöhung der Lufttemperatur  $\tau_0$  am Boden  $\delta\tau_0 = 10$  grd (bzw. der mittleren ballistischen Lufttemperatur  $\bar{\tau}_B$  um  $\delta\bar{\tau}_B = 10$  grd) ausgeglichen werden kann:

$$\Delta X_\tau = - \left( \frac{\partial x_e}{\partial \tau_0} \right)_N \cdot 10 \text{ grd} = - 10 \left( \frac{\partial x_e}{\partial \tau_0} \right)_N \cdot 1 \text{ grd},$$

$$\Delta X_\tau = - X_\tau^y(t_e | \hat{\rho}) \cdot 10 \text{ grd} = - 10 |Q_{\tau_0}|. \quad (7.3)$$

Der Verbesserungskoeffizient für die mittlere ballistische Temperatur kann nach (6.182) durch den Verbesserungskoeffizienten für Änderungen der Anfangsgeschwindigkeit ausgedrückt werden:

$$X_\tau^y(t_e | \hat{\rho}) = \frac{1}{\tau_{0N}} \left[ \hat{x}_e - \frac{1}{2} \hat{v}_0 X_v^y(t_e | \hat{\rho}) \right],$$

$$\Delta X_\tau = - X_\tau^y(t_e | \hat{\rho}) \cdot 10 \text{ grd} = - \frac{10 \text{ grd}}{\tau_{0N}} \left( \hat{x}_e - \frac{\hat{v}_0}{2 \text{ m/s}} |Q_{v_0}| \right),$$

und mit  $\tau_{0N} = 288,9^\circ\text{K}$ :

$$\Delta X_\tau = - 0,0346 \left( \hat{x}_e - \frac{\hat{v}_0}{2 \text{ m/s}} |Q_{v_0}| \right) \quad (7.4)$$

oder

$$\Delta X_\tau = - 0,0346 (\hat{x}_e - 50 |Q_{v_0}|). \quad (7.5)$$

Der Verbesserungskoeffizient  $\Delta X_\tau$  ist für  $|Q_{v_0}| < 1/50 \hat{x}_e$  negativ ( $\Delta X_\tau \leq 0$ ).

Die Gültigkeit von (7.5) kann leicht an Hand einer Schußtafel nachgeprüft werden.

### 7.2.5.4. Der Verbesserungskoeffizient für Änderungen der Geschossmasse

In der Artillerie werden Geschossmasse-Änderungen in der Einheit „Masse-Vorzeichen“ (+, -, ++, -- usw.) angegeben. Ein Masse-Vorzeichen entspricht einer relativen Masseänderung  $\delta m/\hat{m} = \frac{2}{3}\%$ .

Der Verbesserungskoeffizient  $\Delta X_m$  für eine Änderung der Geschossmasse ist diejenige Schußweitenänderung, mit der eine Geschossmasse-Erhöhung um 1 Masse-Vorzeichen kompensiert werden kann.

Bei einer Abweichung der Geschossmasse von dem Normalwert überlagern sich ein innenballistischer und ein außenballistischer Einfluß.

Verringert man die Geschossmasse etwas, so ist mit dem gleichen Energievorrat der Ladung eine geringere Masse zu beschleunigen; es wird also eine höhere Mündungsgeschwindigkeit erreicht werden. Eine größere Anfangsgeschwindigkeit bewirkt aber eine Steigerung der Schußweite.

Außenballistisch führt eine Verringerung der Geschossmasse zur Abnahme der Querschnittsbelastung und damit zu einer Vergrößerung des Ballistischen Koeffizienten. Eine größere Verzögerung des Geschosses hat aber eine Schußweitenverkürzung zur Folge.

Welcher der beiden Einflüsse überwiegt und damit das Vorzeichen des Verbesserungskoeffizienten bestimmt, hängt von den konkreten ballistischen Bedingungen ab. Bei kleinen Abgangswinkeln, großem Kaliber und geringer Anfangsgeschwindigkeit ist der innenballistische Effekt in der Regel dominierend.

Eine entsprechende Überlegung kann für eine (geringfügige) Vergrößerung der Geschossmasse angestellt werden.

Für den Störungskoeffizienten infolge einer Geschossmasse-Änderung gilt

$$\left(\frac{\partial x_e}{\partial m}\right)_{\text{ges}} = \left(\frac{\partial x_e}{\partial v_0}\right)_N \left(\frac{\partial v_0}{\partial m}\right)_N + \left(\frac{\partial x_e}{\partial c}\right)_N \left(\frac{\partial c}{\partial m}\right)_N. \quad (7.6)$$

Der Störungskoeffizient  $(\partial v_0/\partial m)_N$  kann in erster Näherung durch Differentiation der Definitionsgleichung der Mündungsenergie  $E_0$ ,

$$E_0 = \frac{m}{2} v_0^2 = \text{const},$$

nach  $m$  gewonnen werden:

$$\frac{1}{2} v_0^2 + m v_0 \frac{\partial v_0}{\partial m} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial v_0}{\partial m}\right)_N = -\frac{1}{2} \frac{\hat{v}_0}{\hat{m}}. \quad (7.7)$$

Diese Beziehung läßt sich verallgemeinern zu

$$\left(\frac{\partial v_0}{\partial m}\right)_N = -l_m \frac{\hat{v}_0}{\hat{m}} \quad (l_m > 0), \quad (7.8)$$

wobei der Koeffizient  $l_m$  durch eine genaue innenballistische Analyse zu ermitteln ist.

Sluchockij hat für  $l_m$  Tabellen mit den Tafeleingängen  $\Delta$ ,  $p_{\max}$ ,  $A_d$  aufgestellt:

$$l_m = l_m(\Delta, p_{\max}, A_d),$$

wobei sich  $\Delta$  und  $A_d$  errechnen aus<sup>1)</sup>:

$$\Delta = \frac{\omega_0}{W_0}, \quad A_d = \frac{s_d}{l_0}, \quad l_0 = \frac{W_0}{F}. \quad (7.9)$$

Die verwendeten Symbole bedeuten

- $\Delta$  Ladedichte,
- $\omega_0$  Ladungsmasse,
- $F$  Seelenquerschnitt des Rohres,
- $p_{\max}$  maximaler Gasdruck im Rohr,
- $W_0$  Volumen des Ladungsraums,
- $l_0$  reduzierte Länge des Ladungsraums,
- $s_d$  Geschößweg im Rohr und
- $A_d$  reduzierter Geschößweg im Rohr.

Ein Auszug aus der Tabelle der Störungskoeffizienten  $l_m$  ist im Anhang, Tafel XI a, wiedergegeben.

Der Störungskoeffizient  $l_m$  ist für die einzelnen Ladungen konstant. Für die Ableitung des Ballistischen Koeffizienten nach der Geschößmasse erhält man

$$\left( \frac{\partial c}{\partial m} \right)_N = - \frac{\hat{c}}{m}. \quad (7.10)$$

Einsetzen von (7.8) und (7.10) in (7.6) liefert

$$\left( \frac{\partial x_e}{\partial m} \right)_{\text{ges}}^y = - \frac{1}{\hat{m}} \left[ l_m \hat{v}_0 \left( \frac{\partial x_e}{\partial v_0} \right)_N^y + \hat{c} \left( \frac{\partial x_e}{\partial c} \right)_N^y \right].$$

Hieraus folgen für  $\Delta X_m$  die Darstellungen

$$\Delta X_m = \frac{1}{150} [l_m \hat{v}_0 X_v^y(t_e | \hat{\mu}) + \hat{c} X_c^y(t_e | \hat{\mu})], \quad (7.11)$$

$$\Delta X_m = l_m \frac{\hat{v}_0}{150 \text{ m/s}} |Q_{v_0}| - \frac{2}{3} |Q_c|, \quad (7.12)$$

$$\Delta X_m = \frac{2}{3} l_m |\Delta X_v| - \frac{1}{2} |\Delta X_b|. \quad (7.13)$$

<sup>1)</sup> Bezüglich der Definition der benutzten innenballistischen Begriffe siehe [44].



Ist in der Schußtafel für einen speziellen Abgangswinkel  $\vartheta_0 = \vartheta'_0$  der Verbesserungskoeffizient  $\Delta X_m = 0$ , so gilt an dieser Stelle für  $l_m = l'_m$ :

$$l'_m = \left| \frac{\Delta X'_p}{\Delta X'_v} \right| \quad (\Delta X'_m = 0). \quad (7.14)$$

$l'_m$  läßt sich auf diese Weise leicht aus vorliegenden Schußtafeln herausrechnen.

#### 7.2.5.5. Der Verbesserungskoeffizient für Änderungen der Ladungstemperatur

Der Verbesserungskoeffizient  $\Delta X_T$  für Änderungen der Ladungstemperatur ist diejenige Schußweitenänderung, durch die eine Erhöhung der Ladungstemperatur  $T_L$  um  $\delta T_L = 10$  grd ausgeglichen werden kann.

Die Erhöhung der Ladungstemperatur führt zu einer Vergrößerung der Mündungs- und der Anfangsgeschwindigkeit:

$$\left( \frac{\partial x_e}{\partial T_L} \right)_N = \left( \frac{\partial x_e}{\partial v_0} \right)_N \left( \frac{\partial v_0}{\partial T_L} \right)_N. \quad (7.15)$$

Nach *Serebrjakov* [44] kann man  $(\partial v_0 / \partial T_L)_N$  durch den innenballistischen Störungskoeffizienten  $l_J$  für Änderungen des Druckimpulses  $J_k$  bis zum Verbrennungsende und einen empirischen Faktor  $a_T$  ersetzen, dessen Größe von der verwendeten Pulversorte abhängt:

$$\left( \frac{\partial v_0}{\partial T_L} \right)_N = l_T \frac{\hat{v}_0}{\hat{T}_L}, \quad l_T = a_T l_J > 0. \quad (7.16)$$

Ein Auszug aus der Tabelle der Störungskoeffizienten  $l_J$  ist im Anhang, Tafel XI b, wiedergegeben. Diese Tafel besitzt die gleichen Tafeleingänge wie die Tabelle der Koeffizienten  $l_m$ .

Für den Faktor  $a_T$  gilt bei

- Pyroxylinpulver:  $a_T \approx 0,78$ ;
- Nitroglycerinpulver:  $a_T \approx 1,00$ .

Einsetzen von (7.16) in (7.15) ergibt

$$\left( \frac{\partial x_e}{\partial T_L} \right)_N = a_T l_J \frac{\hat{v}_0}{\hat{T}_L} \left( \frac{\partial x_e}{\partial v_0} \right)_N.$$

Hieraus folgt

$$\Delta X_T = -X_T^y(t_c|\hat{\mu}) \cdot 10 \text{ grad} = -a_T l_T \hat{v}_0 \frac{10 \text{ grad}}{\hat{T}_L} X_{v_0}^y(t_c|\hat{\mu}), \quad (7.17)$$

beziehungsweise mit  $\hat{T}_L = 288,9^\circ\text{K}$ :

$$\Delta X_T = -a'_T l_j \frac{\hat{v}_0}{1 \text{ m/s}} |Q_{v_0}|, \quad a'_T = 0,0345 \cdot a_T; \quad (7.18)$$

$$\Delta X_T = -a''_T l_j |\Delta X_v|, \quad a''_T = 3,45 \cdot a_T. \quad (7.19)$$

Der Verbesserungskoeffizient  $\Delta X_T$  ist bei den in Rohrwapfen benutzten Treibpulvern negativ ( $\Delta X_T \leq 0$ ).

#### 7.2.5.6. Der Störungskoeffizient für Änderungen des Abgangswinkels

Der Störungskoeffizient  $\Delta X_\alpha$  für Abgangswinkeländerungen gibt an, um wieviel Meter sich die Horizontalschußweite bei Vergrößerung des Aufsatzwinkels  $\alpha_0$  um  $\delta\alpha = 0-01$  erhöht:

$$\Delta X_\alpha = X_{\vartheta_0}^y(t_c|\hat{\mu}) \cdot 0-01 = \mp 3,6 \cdot |Q_{\vartheta_0}|. \quad (7.20)$$

Entsprechend läßt sich der Störungskoeffizient  $\Delta\alpha_x$  des Aufsatzwinkels (in Strich) für eine Vergrößerung der Schußweite um  $1 \Delta X = 50 \text{ m}$  ermitteln:

$$\Delta X = \left( \frac{\partial x_e}{\partial \vartheta_0} \right)_N^y \Delta\alpha_x, \quad \Delta\alpha_x = \frac{\Delta X}{X_{\vartheta_0}^y(t_c|\hat{\mu})},$$

$$\Delta\alpha_x = \pm \frac{13,9 \text{ m}}{|Q_{\vartheta_0}|} \quad (\vartheta_0 \leq \vartheta_0^*). \quad (7.21)$$

$X_{\vartheta_0}^y$  ist in der unteren Winkelgruppe ( $\vartheta_0 < \vartheta_0^*$ ) positiv, in der oberen Winkelgruppe ( $\vartheta_0 > \vartheta_0^*$ ) negativ. Das gleiche Vorzeichen hat  $\Delta\alpha_x$ .

#### 7.2.5.7. Der Verbesserungskoeffizient für Längswindeinfluß

Der Verbesserungskoeffizient  $\Delta X_w$  für Längswindeinfluß ist diejenige Schußweitenänderung, durch die ein in Schußrichtung wehender Längswind der Geschwindigkeit  $W_x = 10 \text{ m/s}$  kompensiert werden kann:

$$\Delta X_w = \pm 10 |Q_{W_x}| \quad (\vartheta_0 \geq \vartheta_0^*).$$

Nach (6.217) gilt für den Störungskoeffizienten infolge eines Längswindeinflusses

$$X_{w_x}^y(t_e|\hat{\mu}) = \hat{t}_e - \cos \vartheta_0 \cdot X_v^y(t_e|\hat{\mu}) + \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{t}_0} X_{\vartheta}^y(t_e|\hat{\mu}).$$

Hieraus folgen für  $\Delta X_w$  die Darstellungen ( $\vartheta_0 \geq \vartheta_0^*$ ):

$$\begin{aligned} \Delta X_w &= \pm 10 \cdot |Q_{w_x}| \\ &= - \left[ \hat{t}_e - \frac{\cos \vartheta_0}{1 \text{ m/s}} |Q_{v_0}| \mp \frac{\sin \vartheta_0}{\hat{t}_0} \cdot \frac{360 \cdot 60}{2\pi} |Q_{\vartheta_0}| \right] \cdot 10 \text{ m/s}, \\ \Delta X_w &= - \left[ (10 \text{ m/s}) \cdot \hat{t}_e - 10 \cdot \cos \vartheta_0 \cdot |Q_{v_0}| \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{10.8 \cdot 10^3}{\pi} \cdot \frac{10 \text{ m/s}}{\hat{t}_0} \sin \vartheta_0 \cdot |Q_{\vartheta_0}| \right], \end{aligned} \quad (7.22)$$

bzw. wenn man die Verbesserungskoeffizienten der Schußtafel einführt:

$$\Delta X_w = - \left[ (10 \text{ m/s}) \cdot \hat{t}_e - \frac{1000 \text{ m/s}}{\hat{t}_0} \left( \cos \vartheta_0 \cdot |\Delta X_v| \pm \frac{30}{\pi} \sin \vartheta_0 \cdot |\Delta X_{\alpha}| \right) \right]. \quad (7.23)$$

Der Verbesserungskoeffizient  $\Delta X_w$  ist bei Flugbahnen von Artilleriegeschossen mittlerer Reichweite in der unteren Winkelgruppe ( $\vartheta_0 < \vartheta_0^*$ ) in der Regel negativ, in der oberen Winkelgruppe ( $\vartheta_0 > \vartheta_0^*$ ) im allgemeinen positiv.

#### 7.2.5.8. Weitere Verbesserungskoeffizienten für die Horizontalschußweite

Unterschiede in der Oberflächenbeschaffenheit der Granaten wirken sich in einer Veränderung des Ballistischen Koeffizienten aus. Die Verbesserungskoeffizienten für die Zünderkappe und die Lackierung der Granate können deshalb proportional zu  $X_c^y(t_e|\hat{\mu})$  bzw. zu  $\Delta X_v$  angesetzt werden. Die Proportionalitätsfaktoren müssen experimentell bestimmt werden; sie sind in der Schußtafel meist als gesonderte Nebentabellen oder Diagramme enthalten.

Die Korrektur der Schußweite infolge der Krümmung der Erdoberfläche wird (6.15) entnommen.

### 7.2.5.9. Der Verbesserungskoeffizient für Seitenwindeinfluß

Die Verbesserung für den Einfluß eines Seitenwindes wird durch den Azimutwinkel  $\tilde{\psi}_e$  des Auftreffpunkts in der Mündungsebene charakterisiert.

Der Verbesserungskoeffizient  $\Delta Z_w$  für Seitenwindeinfluß ist derjenige Winkel (in Strich), um den die Abgangsebene um die  $y$ -Achse gedreht werden muß, damit der Einfluß eines Seitenwindes der Geschwindigkeit  $W_z = 10$  m/s ausgeschaltet wird.

Aus (6.218) folgert man

$$\Delta z_e = \left( \frac{\partial z_e}{\partial W_z} \right)_N \cdot 10 \text{ m/s} = \left( \hat{i}_e - \frac{\hat{x}_e}{\hat{u}_0} \right) \cdot 10 \text{ m/s},$$

$$\tilde{\psi}_{10} \approx \tan \tilde{\psi}_{10} = \frac{\Delta z_e}{\hat{x}_e} = \frac{10 \cdot |Q_{W_z}|}{\hat{x}_e}.$$

Aus dieser Gleichung folgt  $\tilde{\psi}_{10}$  im Bogenmaß. Es gilt somit

$$\Delta Z_w = -\frac{6000 \cdot 10}{2\pi} \frac{|Q_{W_z}|}{\hat{x}_e} = -9550 \frac{|Q_{W_z}|}{\hat{x}_e}, \quad (7.24)$$

$$\Delta Z_w = -\frac{9550}{\hat{u}_0} \left( \frac{\hat{u}_0 \hat{i}_e}{\hat{x}_e} - 1 \right), \quad \hat{u}_0 = \hat{v}_0 \cos \vartheta_0.$$

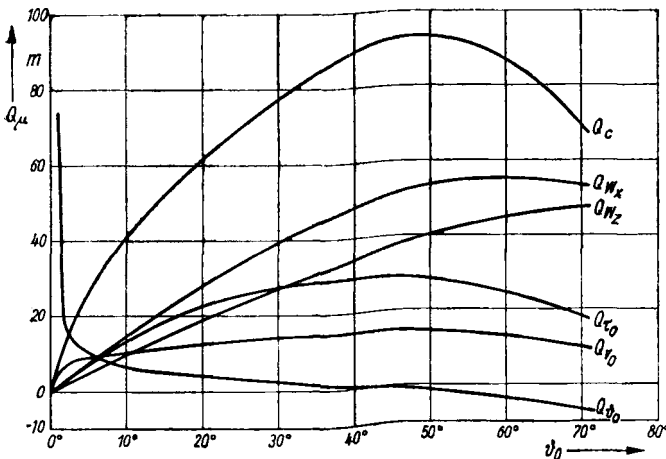


Bild 7.3 Störungskoeffizienten  $|Q_c|$ ,  $|Q_{v_0}|$ ,  $|Q_{\tau_0}|$ ,  $|Q_{\delta_0}|$ ,  $|Q_{W_x}|$ ,  $|Q_{W_z}|$  als Funktion des Abgangswinkels  $\vartheta_0$  (für  $c_{A3} = 1,0 \text{ m}^2/\text{kg}$ ;  $v_0 = 800 \text{ m/s}$ )

Die Abgangsebene ist zur Ausschaltung des Windeinflusses entgegen der Windrichtung zu drehen, da nichtangetriebene Geschosse stets in Richtung des Windes aus der Abgangsebene abweichen.

Bild 7.3 veranschaulicht den Verlauf der Störungskoeffizienten  $|Q_c|$ ,  $|Q_{v_0}|$ ,  $Q_{\vartheta_0}$ ,  $|Q_{\tau_0}|$ ,  $|Q_{w_x}|$ ,  $|Q_{w_z}|$  als Funktion des Abgangswinkels  $\vartheta_0$  für eine Bahnschar mit  $\hat{c}_{4,3} = 1,0 \text{ m}^2/\text{kg}$ ;  $\hat{v}_0 = 800 \text{ m/s}$ .

### 7.2.5.10. Der Verbesserungskoeffizient für die Drallabweichung

Infolge der Rotation des Geschosses um seinen Schwerpunkt weist die Geschoßachse bei Rechtsdrall (in Schußrichtung gesehen) im Mittel rechts aus der Abgangsebene heraus. Hierdurch hat die Resultierende  $R$  der aerodynamischen Kräfte eine nichtverschwindende Querkomponente  $Q > 0$  (siehe Abschnitt 3.3.1.).

Die seitliche Beschleunigung des Geschosses führt zu einer Seitenabweichung, bei Rechtsdrall und Abgangswinkeln  $\vartheta_0 < 70^\circ$  zu einer *Rechtsabweichung*. Man nennt diese drallbedingte Seitenabweichung *Derivation*.

Nimmt man die seitliche Beschleunigung des Geschosses in 1. Näherung als konstant an, so kann im Rahmen der linearen Störungstheorie für die Derivation der Ansatz getroffen werden

$$(\ddot{z}_e)_D = \frac{1}{2} b_D \hat{t}_e^2 \quad (7.25)$$

Die mittlere seitliche Beschleunigung  $b_D$  des Geschosses in  $z$ -Richtung ist in Wirklichkeit nicht konstant, sondern verringert sich infolge des Luftwiderstands mit zunehmender Schußweite. Als Orientierungswert kann  $b_D = (0,15 \cdots 0,25) \text{ m/s}^2$  angegeben werden. Bei der experimentellen Nachprüfung findet man gelegentlich auch Werte, die außerhalb dieses Bereichs liegen.

Neben (7.25) sind eine Vielzahl weiterer Ansätze vorgeschlagen worden. Zwei von ihnen folgen unmittelbar aus (7.25), wenn man  $\hat{t}_e^2$  mit Hilfe der Beziehungen der parabolischen Theorie durch  $\hat{y}_g$  bzw.  $(\hat{x}_e \tan \vartheta_0)$  ersetzt:

$$\hat{t}_e^2 = \frac{8}{g_{0N}} \hat{y}_g = \frac{8 \hat{v}_0^2}{g_{0N}} \sin^2 \vartheta_0 = \frac{4}{g_{0N}} \hat{x}_e \tan \vartheta_0$$

(siehe Tabelle 2.1). Der Ansatz (7.25) geht damit über in

$$(\ddot{z}_e)_D = k_1 \hat{y}_g, \quad k_1 = 0,06 \cdots 0,10 \quad (7.26)$$

beziehungsweise

$$(\tilde{z}_e)_D = k_2 \hat{x}_e \tan \vartheta_0, \quad k_2 = 0,030 \dots 0,050. \quad (7.27)$$

In der sowjetischen Ballistik wird im allgemeinen die Darstellung (7.27) bevorzugt.

Eine rein theoretische Berechnung der Faktoren  $k_i$  ist gegenwärtig noch nicht mit ausreichender Genauigkeit möglich. Die Beziehungen (7.25) bis (7.27) leisten jedoch als Interpolationsformeln gute Dienste: Man benutzt sie, um die Tabelle der experimentell ermittelten Seitenabweichungen rechnerisch zu verdichten.<sup>1)</sup>

Die Schußtafeln geben den Störungskoeffizienten  $\Delta Z_D$  für die Drallabweichung im Winkelmaß (Strich) an. Ähnlich wie bei der Seitenwindkorrektur erhält man ( $\vartheta_0 < 70^\circ$ ):

$$\Delta Z_D = -955 \frac{(\tilde{z}_e)_D}{\hat{x}_e} = -\bar{k}_2 \tan \vartheta_0, \quad \bar{k}_2 = 20 \dots 40. \quad (7.28)$$

Die Verbesserung ist (für  $\vartheta_0 < 70^\circ$ ) negativ: Zur Ausschaltung der Derivation muß die Abgangsebene bei Rechtsdrall der Waffe (in Schußrichtung gesehen) um die  $y$ -Achse nach links gedreht werden.

## 7.2.6. Die Formeln für die Streuungscharakteristiken

### 7.2.6.1. Allgemeines

Die Streuung des Auftreffpunkts wird in der Schießlehre durch die wahrscheinlichen Abweichungen  $St_E$ ,  $St_B$  und  $St_H$  charakterisiert<sup>2)</sup>, wobei zwischen  $St_E$  und  $St_H$  die Beziehung besteht

$$St_H = St_E \cdot \tan |\hat{\vartheta}_e|. \quad (7.29)$$

Die Zahlenwerte für die wahrscheinlichen Abweichungen, die sich bei Schießversuchen durch Auswertung der Streuung der Koordinaten der Auftreffpunkte ergeben, schwanken von Schießversuch zu Schießversuch innerhalb relativ weiter Grenzen: Die „Streuung der Streuung“ beträgt bei den üblichen Schußanzahlen 20% (und mehr).

<sup>1)</sup> Zur experimentellen Ermittlung der Seitenabweichungen siehe Abschnitt 7.4.3.

<sup>2)</sup> Siehe hierzu auch *Wolff* [36].

Die relativ starken Schwankungen der experimentell ermittelten wahrscheinlichen Abweichungen lassen es nicht zu, die in die Schußtafel aufzunehmenden wahrscheinlichen Abweichungen unmittelbar aus den experimentellen Daten durch Interpolation herzuleiten, wie dies bei der Derivation möglich ist.

Um dieser Schwierigkeit zu begegnen, führt man die wahrscheinlichen Abweichungen der Koordinaten des Auftreffpunkts auf die wahrscheinlichen Abweichungen des Ballistischen Koeffizienten, der Anfangsgeschwindigkeit, des Abgangswinkels, des Seitenwinkels und der drallbedingten Derivation zurück, wobei man annimmt, daß diese Parameter (in der Umgebung ihrer Sollwerte) in 1. Näherung normalverteilt und voneinander statistisch unabhängig sind. *Die in der Schußtafel angegebenen wahrscheinlichen Abweichungen werden aus diesen Grundstreuungen der Flugbahnparameter formelmäßig berechnet.*

#### 7.2.6.2. Die Formel für die wahrscheinliche Abweichung der Horizontalschußweite

Es sei

$r_c$ : der wahrscheinliche Fehler des Ballistischen Koeffizienten  $c$  (in %),  
 $r_v$ : der wahrscheinliche Fehler der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  (in %) und  
 $r_\varphi$ : der wahrscheinliche Fehler des Abgangswinkels  $\vartheta_0$  (in Strich).

Dann gilt unter den in Abschnitt 7.2.6.1. genannten Voraussetzungen für die wahrscheinliche Abweichung  $St_E$  der Horizontalschußweite

$$St_E = \sqrt{(\Delta X_c r_c)^2 + (\Delta X_v r_v)^2 + (\Delta X_\alpha r_\varphi)^2}. \quad (7.30)$$

Der Verbesserungskoeffizient  $\Delta X_c$  ist als diejenige Schußweitenänderung definiert, durch die eine Vergrößerung des Ballistischen Koeffizienten um  $\delta c/\hat{c} = 1\%$  kompensiert werden kann:

$$\Delta X_c = -X_c^y(t_e|\hat{\mu}) \frac{\hat{c}}{100} = -|Q_c|.$$

Unter Beachtung von (7.1) kann man hierfür schreiben

$$\Delta X_c = \frac{3}{4} \Delta X_p. \quad (7.31)$$

Zur Ermittlung der wahrscheinlichen Abweichungen  $r_c$ ,  $r_v$ ,  $r_\beta$  werden alle nur irgend verfügbaren Daten herangezogen, nicht nur die Resultate der eigentlichen Schußtafel-Versuchsschießen.

Die wahrscheinliche Abweichung  $r_\beta$  ergibt sich aus den Schießversuchen zur Ermittlung des Abgangsfehlerwinkels (siehe Abschnitt 7.4.1.2.), während  $r_v$  aus den Experimenten zur Messung der Anfangsgeschwindigkeit folgt.

Die wahrscheinliche Abweichung  $r_c$  des Ballistischen Koeffizienten dient als Anpassungsfaktor: Man wählt  $r_c$  so, daß die in besonderen Schießversuchen experimentell ermittelten wahrscheinlichen Abweichungen  $St_E$  der Horizontalschußweite mit der nach (7.30) berechneten wahrscheinlichen Abweichung hinreichend gut übereinstimmen.

Hält man  $r_v$  und  $r_\beta$  für die einzelnen Ladungen (bzw. Ladungsgruppen) konstant, so muß man in Kauf nehmen, daß sich  $r_c$  als Funktion des Abgangswinkels und der Anfangsgeschwindigkeit ändert.

Die Anpassung von experimentellen und berechnetem  $St_E$ -Wert ist besonders einfach, wenn das Versuchsschießen bei dem optimalen Abgangswinkel  $\vartheta_0 = \vartheta_0^*$  durchgeführt wird, da in diesem Fall  $\Delta X_\alpha = 0$  ist:

$$St_E^* = \sqrt{(\Delta X_c^* r_c^*)^2 + (\Delta X_v^* r_v^*)^2}, \quad \Delta X_\alpha^* = 0.$$

Auflösen nach  $r_c^*$  ergibt

$$r_c^* = \frac{1}{\Delta X_c^*} \sqrt{(St_E^*)^2 - (\Delta X_v^* r_v^*)^2}. \quad (7.32)$$

Die wahrscheinlichen Abweichungen  $r_c$ ,  $r_v$ ,  $r_\beta$  haben bei Kanonen die Größenordnung:

$$r_c = (0,25 \dots 1,20) \% ; \quad r_v = (0,15 \dots 0,20) \% ; \quad r_\beta = 0-00,2.$$

### 7.2.6.3. Die Formel für die wahrscheinliche Seitenabweichung des Auftreffpunkts

Analog zu Abschnitt 7.2.6.2. werden zwei Größen  $r_z$  und  $r_\omega$  eingeführt,

$r_z$ : der wahrscheinliche Fehler der Seitenabweichung  $\Delta Z_D$  durch den Drall (im Bogenmaß) und

$r_\omega$ : der wahrscheinliche Fehler  $\omega$  des Azimutwinkels  $\psi_e$  infolge der begrenzten Richtgenauigkeit (in Strich).



Da die experimentelle Bestimmung der Seitenabweichungen infolge des Dralls und des Seitenwindes in *einem* Versuch erfolgt, erfaßt  $r_z$  zugleich die wahrscheinlichen Fehler der Bestimmung des Seitenwindes (siehe Abschnitt 7.4.3.2.).

Der wahrscheinliche Fehler  $r_\omega$  des Azimutwinkels ist in den Schußtafeln in Strich angegeben. Bezeichnet man den wahrscheinlichen Fehler des Azimuts, gemessen im Bogenmaß, mit  $\bar{r}_\omega$ , so kann für die wahrscheinliche seitliche Abweichung  $St_B$  des Auftreffpunkts der Ansatz getroffen werden

$$St_B = \sqrt{(\hat{x}_e \bar{r}_\omega)^2 + (\hat{x}_e \tan \vartheta_0 \cdot r_z)^2}, \quad \bar{r}_\omega = r_\omega/955. \quad (7.33)$$

Die wahrscheinliche Abweichung  $r_\omega$  des Azimuts wird bei der experimentellen Bestimmung des horizontalen Abgangswinkels gewonnen, während die wahrscheinliche Abweichung  $r_z$  die Funktion eines Anpassungsfaktors hat, mit dem die berechnete und die experimentell ermittelte wahrscheinliche Seitenabweichung  $St_B$  in Übereinstimmung gebracht werden. Da  $r_\omega$  für die einzelnen Ladungsgruppen als konstant angenommen wird, ist  $r_z$  eine Funktion der Schußweite und der Anfangsgeschwindigkeit.

Bei modernen Kanonen gilt

$$r_\omega \approx 0-00,2; \quad r_z = 0,0005 \cdots 0,0020.$$

### 7.3. Die Vorbereitung von Schußtafel-Versuchsschießen

Um den hohen Genauigkeitsforderungen zu genügen, die an eine Schußtafel gestellt werden, müssen die Schußtafel-Schießversuche sehr sorgfältig vorbereitet und durchgeführt werden. Die Ausführungen dieses Abschnitts verfolgen das Ziel, einige Gesichtspunkte zu nennen, die hierbei zu beachten sind. Eine detaillierte und systematische Darstellung aller einschlägigen Probleme würde jedoch den Rahmen dieses Buches sprengen, so daß hinsichtlich der Einzelheiten auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen werden muß.

Die Vorbereitung der Schießversuche umfaßt die Vorbereitung der Waffe, die Vorbereitung der Munition, die topographische Vorbereitung des Schießplatzes, die Ermittlung der meteorologischen Bedingungen sowie die Planung der Schußanzahl und der Anzahl der Versuchsschießen.

### **7.3.1. Die Vorbereitung der Waffe zum Schießen**

Zum Ermitteln von Daten, die für die Berechnung von Schußtafeln dienen sollen, setzt man neue oder nur geringfügig abgenutzte Waffen ein. Die Gesamtzahl der bisher aus der Waffe abgegebenen Schüsse soll 25% der ballistischen Lebensdauer des Rohres nicht übersteigen. Der abnutzungsbedingte Abfall der Anfangsgeschwindigkeit von dem Sollwert darf bei der Erdartillerie höchstens 1,5% betragen. (Bei Fla-Geschützen liegt diese Grenze bei 1%.)

Das Rohrrinnere wird visuell auf Beschädigungen kontrolliert und zusätzlich mit speziellen Lehren nachgemessen. Für Schußtafel-Schießen dürfen (unabhängig von den vorgenannten Bedingungen) nur Waffen mit einwandfreier Beschaffenheit der Rohrseele benutzt werden.

Besonderes Augenmerk muß auf die Kontrolle des Richtvorgangs gewendet werden. Festgestellte systematische Fehler des Höhen- und Seitenrichtens werden durch geschützindividuelle Korrekturen ausgeschaltet.

Während der Schußtafel-Schießen werden die Erhöhungswinkel mit Hilfe eines Quadranten eingestellt, der eine Ablesegenauigkeit von mindestens 1' aufweist.

### **7.3.2. Die Vorbereitung der Munition**

Geschosse und Ladungen sollen jeweils einer einzigen Lieferung (Partie) entstammen. Die Geschosse müssen in ihren Abmessungen auf Zeichnungstreue geprüft und einzeln gewogen werden. Für Schußtafel-Versuchsschießen sind Geschosse jeweils einer einzigen Massenkategorie (mit der gleichen Anzahl von Vorzeichen) einzusetzen.

Die ladungsbedingten Abweichungen der Anfangsgeschwindigkeit von dem Sollwert dürfen bei Kanonen maximal 0,5%, bei Haubitzen höchstens 1% betragen.

Besonders wichtig ist es, daß die gesamte Munition, die bei einem speziellen Versuchsschießen verfeuert wird, die gleiche Ladungstemperatur hat. Man bringt die schußfertigen Ladungen deshalb zwei bis drei Tage vor dem Versuchsschießen in eine Klimakammer, in der eine konstante Temperatur herrscht, die der Normaltemperatur  $T_{LN} = 15^{\circ}\text{C}$  nahekommt. Der Transport der Ladungen von der Klimakammer zum Geschütz erfolgt erst unmittelbar vor dem Schießen in speziellen Thermosbehältern.

Wenn Unregelmäßigkeiten des Geschosßfluges, wie anomal große Streuungen und Instabilitäten, festgestellt worden sind, so müssen auch die Schwerpunktslage sowie das polare und das äquatoriale Trägheitsmoment der Geschosse kontrolliert werden.

### **7.3.3. Die topographische Vorbereitung des Schießplatzes**

Die Auswahl der Hauptschußrichtung und die Vermessung des Schießplatzes müssen mit großer Sorgfalt erfolgen.

Die Hauptschußrichtung für Schußtafel-Schießen wird mit geodätischen Methoden in einem wenigdurchschnittenen Gelände fixiert. Als Auftreffgebiet sieht man eine ebene, horizontale Fläche vor, die von allen Seiten gut beobachtet werden kann.

Die Abgangsebene des Geschosses soll die vermessene Hauptschußrichtung enthalten oder wenigstens zu ihr parallel sein; als maximale Differenz der Azimutwinkel von Hauptschußrichtung und Abgangsebene sind 0–00,5 zugelassen.

Die Koordinaten der Auftreffpunkte werden durch Anschneiden der Einschläge von genau vermessenen Beobachtungsstellen ermittelt. Hierzu sind spezielle Winkelmeßgeräte entwickelt worden. Ein modernes Verfahren zur Vermessung der Einschläge arbeitet mit Fototheodoliten.

### **7.3.4. Die Ermittlung der meteorologischen Bedingungen**

Um die Resultate der Schießversuche auf Normalbedingungen reduzieren zu können, muß der Verlauf der meteorologischen Elemente während des Schießens bis zu einer Höhe, die die Gipfelhöhe der Flugbahn übersteigt, registriert werden.

Bei Schußtafel-Schießen der Erdartillerie mißt man folgende meteorologischen Elemente:

- Luftdruck, Lufttemperatur und Luftfeuchte am Boden,
- Geschwindigkeit und Richtung des Bodenwindes,
- den Verlauf der Lufttemperatur und des Luftdrucks<sup>1)</sup> als Funktionen der geometrischen Höhe sowie
- Geschwindigkeit und Richtung des Windes in den einzelnen Höhengschichten.

<sup>1)</sup> Nimmt man an, daß sich die Atmosphäre vertikal in stabilem Gleichgewicht befindet, so kann man sich mit der Messung der Höhenabhängigkeit der Lufttemperatur begnügen; siehe Abschnitt 6.9.2.

Die Höhenabhängigkeit der meteorologischen Elemente wird mit speziellen Meßsonden ermittelt. Bei Flugbahnhöhen, die 200 m nicht übersteigen, beschränkt man sich meist auf die Messung der meteorologischen Elemente am Boden.

Für die Zeitintervalle der Messungen, die Meßhöhen und die erforderliche Mindestanzahl von Sondenaufstiegen je Versuchsschießen sind in den einschlägigen Dienstvorschriften detaillierte Regeln enthalten.

Unter Schießplatzbedingungen sind die Meßwerte der meteorologischen Elemente der Atmosphäre etwa mit folgenden wahrscheinlichen Fehlern  $E_{\mu}$  behaftet:

- Luftdruck am Boden:  $E_{p_0} = (0,5 \cdots 1,0)$  Torr;
- Lufttemperatur bei Messung mit Radiosonde:  $E_{t_0} = (0,5 \cdots 1,6)$  grad;
- Windgeschwindigkeit:  $E_w = (0,60 \cdots 0,65)$  m/s;
- Windrichtung:  $E_{\psi} = 3^{\circ} \cdots 5^{\circ}$ .

Bei instabiler Wetterlage, die durch rasche Änderungen des Luftdrucks und der Lufttemperatur, Windböen, Gewitter u. ä. gekennzeichnet ist, werden keine Schußtafel-Schießen durchgeführt, weil unter diesen Bedingungen die Schießergebnisse nicht hinreichend genau auf Normalbedingungen reduziert werden können.

Starke Windböen, deren Geschwindigkeit 50% der mittleren ballistischen Windgeschwindigkeit übersteigen, führen nicht nur zu Fehlern bei der Berechnung des mittleren ballistischen Windes, sondern bewirken überdies eine merkliche Vergrößerung der Streuung.

### 7.3.5. Die Planung der Schußanzahl und der Anzahl der Versuchsschießen

Die Anzahl der Versuchsschießen<sup>1)</sup> und die Schußanzahl je Schießen werden so geplant, daß eine ausreichende (vorgegebene) Genauigkeit der Resultate mit möglichst geringem Munitionsaufwand erreicht wird.

Bei Versuchsschießen können zwei Gruppen von Fehlern unterschieden werden:

- zufällige Fehler, deren Größe von Schuß zu Schuß variiert, und
- Fehler, die von Versuchsschießen zu Versuchsschießen zufällig variieren, während der einzelnen Versuchsschießen jedoch systematischen Charakter haben.

<sup>1)</sup> Unter einem *Versuchsschießen* wird eine Serie von Schüssen verstanden, die unter konstanten äußeren Bedingungen abgefeuert wird.

Das Ziel der Schießversuche bestehe darin, unter einem bestimmten Erhöhungswinkel mit einem speziellen Geschöß die Horizontalschußweite zu ermitteln.

Zu den *Fehlern der 1. Gruppe*, die von Schuß zu Schuß variieren, gehören die Schwankungen der Anfangsgeschwindigkeit, der Geschößmasse, der Trägheitsmomente sowie der Schwerpunktslage, die Abgangsfehler infolge der Rohrschwingungen, der Einfluß von Windböen u. ä.

*Fehler der 2. Gruppe*, die innerhalb der Schußserie systematischen Charakter haben, aber von Versuchsschießen zu Versuchsschießen variieren, sind die Fehler bei der Fixierung des Erhöhungs- und Seitenwinkels, die Justierfehler bei der Messung der Anfangsgeschwindigkeit, Ungenauigkeiten bei der Ermittlung der meteorologischen Parameter, Fehler bei der Vermessung der Schußtrasse und der B-Stellen sowie die Fehler bei der Reduktion der Resultate der Versuchsschießen auf Normalbedingungen.

Es sei

$St_E$ : die wahrscheinliche Abweichung der Horizontalschußweite im Einzelschuß,

$\epsilon_x$ : der wahrscheinliche Fehler der Schußentfernung bei einem Versuchsschießen infolge der Fehler der 2. Gruppe,

$E_x$ : der resultierende wahrscheinliche Fehler der Schußweite bei allen Versuchsschießen,

$N$ : die Anzahl der Versuchsschießen und

$n$ : die Schußanzahl je Versuchsschießen.

Sieht man die wahrscheinlichen Abweichungen  $St_E$ ,  $\epsilon_x$  als normalverteilt und voneinander statistisch unabhängig an, so besteht nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz<sup>1)</sup> die Beziehung

$$E_x = \sqrt{\frac{St_E^2}{nN} + \frac{\epsilon_x^2}{N}}. \quad (7.34)$$

Bei Kanonen gilt im Mittel<sup>2)</sup>:

$$St_E = \frac{\hat{x}_e}{200} = 0,005 \cdot \hat{x}_e; \quad \epsilon_x = 0,003 \cdot \hat{x}_e.$$

<sup>1)</sup> Siehe etwa *Wolff* [36].

<sup>2)</sup> Die für  $St_E$  und  $\epsilon_x$  angeführten Zahlenwerte kennzeichnen nur die Größenordnungen dieser wahrscheinlichen Abweichungen.

Die Beziehung (7.34) zeigt, daß man den resultierenden wahrscheinlichen Entfernungsfehler  $E_x$  durch Vergrößerung der Schußanzahl in *einem* Versuchsschießen ( $n \rightarrow \infty$ ) höchstens bis auf den Wert  $E'_x = \varepsilon_x / \sqrt{N}$  herabdrücken kann. Die Wiederholung der Versuchsschießen ist in der Regel wirksamer als die unbegrenzte Steigerung von  $n$ .

Tabelle 7.3 *Resultierende wahrscheinliche Abweichung  $E_x$  der Horizontalschußweite  $\hat{x}_e$  (in %)*

$n \backslash N$	1	2	3	4	5	10
3	0,412	0,292	0,238	0,206	0,184	0,130
5	0,374	0,265	0,216	0,187	0,167	0,118
7	0,355	0,251	0,205	0,178	0,159	0,112
10	0,339	0,240	0,196	0,170	0,152	0,108
20	0,319	0,226	0,184	0,160	0,143	0,100
50	0,308	0,218	0,178	0,154	0,138	0,097
100	0,303	0,214	0,175	0,152	0,135	0,095

In Tabelle 7.3 ist  $E_x$  (in %) als Funktion von  $n$  und  $N$  dargestellt. Man entnimmt den in der Tabelle angeführten Zahlenwerten, daß es bei vorgegebenem Munitionsverbrauch ( $nN = \text{const}$ ) zweckmäßiger ist, mehrere getrennte Versuchsschießen durchzuführen als *ein* Versuchsschießen mit der gesamten Munitionsmenge.

Für  $nN = 20$  zum Beispiel gilt

$$n = 20, N = 1: E_x = 0,319\%;$$

$$n = 10, N = 2: E_x = 0,240\%.$$

Der Wert  $E_x = 0,240\%$  ist bei einem einzigen Versuchsschießen mit keinem noch so hohen Munitionsaufwand zu erreichen.

Die Vorbereitungsarbeiten für Schußtafel-Schießversuche sind aufwendig, insbesondere dann, wenn verschiedene Arten von Schießen (wie Entfernungs- und  $v_0$ -Schießen) gekoppelt werden. Man wird die Anzahl der einzelnen Versuchsschießen deshalb nicht unnötig groß wählen. In der Praxis hat sich eingebürgert, für jede experimentell zu ermittelnde Kenngröße<sup>1)</sup> 3  $\cdots$  4 Versuchsschießen mit je 7  $\cdots$  10 Geschossen zu veranstalten.

<sup>1)</sup> Eine derartige empirische Kenngröße ist z. B. die Horizontalschußweite, die mit einem gegebenen Geschöß und einer speziellen Ladung unter einem bestimmten Abgangswinkel erreicht wird.

Bei den angegebenen Werten von  $n$  und  $N$  beträgt die resultierende wahrscheinliche Abweichung  $E_x$  der Horizontalentfernung etwa 0,2% von  $\hat{x}_e$ .

Die erforderliche Anzahl von Schießversuchen wird endgültig erst im Zuge der Experimente festgelegt. Man führt deshalb parallel zu den Schießversuchen eine Analyse der auftretenden Fehler durch.

Die statistische Versuchsplanung hat sich in den letzten Jahren zu einer selbständigen wissenschaftlichen Disziplin<sup>1)</sup> entwickelt, zahlreiche ihrer Methoden und Verfahren verdanken ihre Entstehung der experimentellen Ballistik.

## 7.4. Die Durchführung von Schußtafel-Versuchsschießen

### 7.4.1. Die Ermittlung der Anfangsbedingungen der Flugbahn

Ein wichtiges Teilproblem der ballistischen Versuchsschießen ist die exakte Bestimmung des Abgangswinkels  $\vartheta_0$  und der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ .

#### 7.4.1.1. Die Ermittlung der Anfangsgeschwindigkeit

Die Ermittlung der Bahngeschwindigkeit des Geschosses erfolgt in der Praxis meist durch Messung der Zeit, in der das Geschöß eine definierte Meßstrecke durchläuft. Aus den gemessenen Bahngeschwindigkeiten wird die Anfangsgeschwindigkeit berechnet, indem man die Geschwindigkeitsmessungen auf die Mündung der Waffe reduziert. Ein hierzu geeignetes Verfahren ist in Abschnitt 5.2.1.5. beschrieben worden.

Die resultierende wahrscheinliche Abweichung der Geschwindigkeitsbestimmung setzt sich aus der wahrscheinlichen Abweichung  $r_v$  von  $v_0$  im Einzelschuß und dem wahrscheinlichen Meßfehler  $\varepsilon_v$  der Meßreihe zusammen:

$$E_v = \sqrt{\frac{r_v^2}{nN} + \frac{\varepsilon_v^2}{N}}. \quad (7.35)$$

Die Zahlen  $n$  und  $N$  haben die gleiche Bedeutung wie in Abschnitt 7.3.5.

<sup>1)</sup> Einen guten Überblick über die Methoden der statistischen Versuchsplanung gibt das Buch von *Finney, D.J.: An introduction to the theory of experimental design.* Chicago 1961.

(Russ. Übersetzung: *Финни, Д.: Введение в теорию планирования экспериментов.* Москва 1970.)

Der wahrscheinliche Fehler  $\varepsilon_v$  charakterisiert die Fehler der 2. Art, die im Rahmen einer einzelnen Meßreihe als systematische Fehler wirken, von Meßreihe zu Meßreihe jedoch in zufälliger Weise variieren. Fehler 2. Art sind zum Beispiel die Justierfehler der  $v_0$ -Meßanlage.

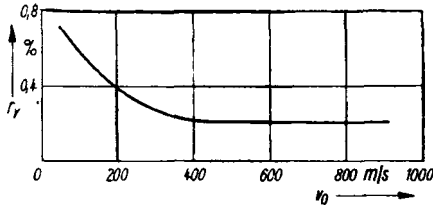


Bild 7.4  
Wahrscheinliche Abweichung  $r_v$  der Anfangsgeschwindigkeit als Funktion von  $v_0$  (in Prozent)

Bei modernen  $v_0$ -Meßgeräten ist  $\varepsilon_v \leq 0,1\%$ , während  $r_v$  als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit darstellbar ist (siehe Tabelle 7.4 und Bild 7.4).

Tabelle 7.4 Wahrscheinliche Abweichung der Anfangsgeschwindigkeit (in %) als Funktion von  $v_0$

$v_0$ (m/s)	60	100	150	200	250	300	350	400	> 400
$r_v$ (%)	0,68	0,58	0,48	0,39	0,33	0,28	0,24	0,23	0,22

#### 7.4.1.2. Die Ermittlung des Abgangfehlerwinkels

Infolge der Rohrschwingungen (und ähnlicher Störeinflüsse) weicht der Abgangswinkel  $\vartheta_0$ , unter dem das Geschoß die Waffe verläßt, von dem Erhöhungswinkel  $\varphi$  ab, auf den das Rohr vor dem Schuß eingestellt worden war. Die Differenz beider Winkel heißt *Abgangfehlerwinkel*  $\delta$ :

$$\delta := \vartheta_0 - \varphi.$$

Für eine vorgegebene Kombination von Geschoß, Ladung und Waffe hat der Abgangfehlerwinkel (im Mittel) systematischen Charakter, sein Mittelwert wird in der Kopfleiste der Haupttafeln von Artillerieschußtafeln angegeben.

Für die ballistischen Eigenschaften der Flugbahn ist nicht der Erhöhungswinkel  $\varphi$ , sondern der tatsächliche Abgangswinkel  $\vartheta_0$  maß-



gebend. In den Erprobungsprogrammen für neuentwickelte Waffen und Munitionsarten sind deshalb stets besondere Versuchsschießen zur Ermittlung des Abgangsfehlerwinkels  $\delta$  vorgesehen.

Mit einer Waffe, deren Anfangsgeschwindigkeit  $\hat{v}_0$  bekannt ist, werde auf eine in der Entfernung  $x = x_E$  befindliche vertikale Scheibe ein Schuß abgegeben. Die Höhe des Treffpunkts über dem Mündungshorizont sei  $y = y_E$  (Bild 7.5). Des weiteren sei die Flugzeit  $t = t_E$  von der Waffenmündung bis zur Scheibe gemessen worden.

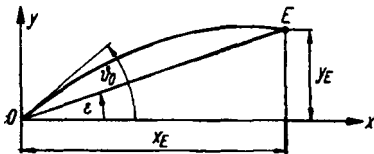


Bild 7.5  
Zur Ermittlung des Abgangsfehlerwinkels  $\delta$  in der Vertikalebene

Ausgehend von den in Abschnitt 5.5.3. abgeleiteten Reihenentwicklungen der Flugbahnelemente nach Potenzen von  $x$  läßt sich ein einfaches Verfahren zur Ermittlung des Abgangsfehlerwinkels angeben.

Eliminiert man aus (5.127) und (5.128) die Verzögerungsfunktion  $E_0$ , so findet man

$$y = p_0 x - \frac{1}{2} \frac{g_0 x^2}{u_0^2} - \frac{2}{3} \frac{g_0 x}{u_0} \left( t - \frac{x}{u_0} \right). \quad (7.36)$$

Mit  $x = x_E$ ,  $y = y_E$ ,  $t = t_E$  und  $y_E/x_E = \tan \varepsilon$  geht (7.36) über in

$$\tan \vartheta_0 = \tan \varepsilon + \frac{g_0 x_E}{2 u_0^2} \left[ 1 + \frac{4}{3} \left( \frac{u_0 t_E}{x_E} - 1 \right) \right], \quad (7.37)$$

$$u_0 = v_0 \cos \vartheta_0.$$

Diese Gleichung ist iterativ nach  $\vartheta_0$  auflösbar.

Verwendet man für den zu ermittelnden Abgangswinkel als 1. Näherung  $\vartheta_{01} = \varphi$ , so folgt als 2. Näherung  $\vartheta_0 = \vartheta_{02}$  aus

$$\tan \vartheta_{02} = \tan \varepsilon + \frac{g_0 x_E}{2 u_{01}^2} \left[ 1 + \frac{4}{3} \left( \frac{u_{01} t_E}{x_E} - 1 \right) \right],$$

$$u_{01} := v_0 \cos \varphi.$$

Um die dritte Näherung zu erhalten, setzt man auf der rechten Seite von (7.37)  $u_0 = u_{02}$  ein.

Das Verfahren kommt meist schon nach 1 ... 2 Iterationsschritten zum Stehen.

Nachdem  $\vartheta_0$  bekannt ist, kann aus (5.128) der Ballistische Koeffizient  $c$  berechnet werden:

$$c = \frac{2 u_0}{G(v_0) x_E} \left( \frac{u_0 t_E}{x_E} - 1 \right), \quad H_\tau(y_0) = 1. \quad (7.38)$$

Im Vakuum gilt  $x = u_0 t$ , so daß  $u_0 t_E/x_E - 1 \equiv 0$  wird. Bei parabelähnlichen Bahnen kann deshalb auf die Messung der Flugzeit des Geschosses von der Waffenmündung bis zur Scheibe verzichtet werden; man rechnet mit der vereinfachten Formel

$$\tan \vartheta_0 = \tan \varepsilon + \frac{g_0 x_E}{2 u_0^2},$$

die sich auch unmittelbar aus den Beziehungen der parabolischen Theorie ergibt.

Da in (7.37) die Luftwiderstandsfunktion  $G(v_\tau)$  nicht explizit auftritt, gilt diese Beziehung (im Rahmen der getroffenen Voraussetzungen) für beliebige Luftwiderstandsgesetze.

Die Anwendung der Formeln (7.37), (7.38) soll an einem *Beispiel* gezeigt werden.

Bei einem Schießversuch mit einer Schützenwaffe ( $v_0 = 710$  m/s) auf eine vertikale Scheibe, die sich in 100 m Entfernung befindet, habe sich ein mittlerer Treffpunkt ergeben, der 98 cm vertikal über der Mündungsebene liegt. Als Flugzeit  $t_E$  von der Mündung bis zur Scheibe sei  $t_E = 0,151$  s gemessen worden.

Zu ermitteln seien der Abgangswinkel  $\vartheta_0$  und der Ballistische Koeffizient  $c_{43}$  des Geschosses.

Die Iteration zur Bestimmung von  $\vartheta_0$  wird mit der 1. Näherung  $\vartheta_{01} = 0$  begonnen. Die 2. Näherung ergibt sich damit aus

$$\tan \vartheta_{02} = \tan \varepsilon + \frac{g_0 x_E}{2 v_0^2} \left[ 1 + \frac{4}{3} \left( \frac{v_0 t_E}{x_E} - 1 \right) \right],$$

$$x_E = 100 \text{ m}; \quad y_E = 0,98 \text{ m}; \quad t_E = 0,151 \text{ s}.$$

Man erhält

$$\tan \vartheta_{02} = 0,01087; \quad \vartheta_{02} = 37,3'.$$

Nochmalige Iteration liefert den gleichen Wert.

Um den Ballistischen Koeffizienten  $c_{43}$  zu ermitteln, hat man in (7.38)  $u_0 = \dot{u}_0$ ,  $x_E = \dot{x}_E$ ,  $t_E = \dot{t}_E$  zu setzen. Den Wert der Verzögerungsfunktion  $G_{43}(v_0) = G_{43}(710)$  entnimmt man Tafel II des Anhangs:  $G_{43}(710) = 0,10451$ ; ferner ist

$$u_0 = v_0 \cos \vartheta_0 = 710 \cdot 0,99994 \text{ m/s} = 709,96 \text{ m/s}.$$

Damit folgt

$$c_{43} = \frac{1419,91}{10,451} (7,0996 \cdot 0,151 - 1) \frac{\text{m}^2}{\text{kg}} = 9,79 \text{ m}^2/\text{kg}.$$

Um die Genauigkeit dieses Verfahrens zur Ermittlung von  $\vartheta_0$  und  $c$  zu überprüfen, können  $y_E$  und  $t_E$  mit  $\varepsilon_{4,3} = 9,79 \text{ m}^2/\text{kg}$ ,  $\vartheta_0 = 710 \text{ m/s}$ ;  $x_e = 100 \text{ m}$  nach dem *Siacci-Formelsatz VII* (Tabelle 5.11, Seite 263) berechnet werden. Man erhält

$$\hat{t}_{ES} = 0,1518 \text{ s}; \quad \hat{y}_{ES} = 0,979 \text{ m}.$$

Diese Werte stimmen praktisch mit den Ausgangswerten überein.

Nachdem der wahre Abgangswinkel  $\vartheta_0$  berechnet vorliegt, erhält man den Abgangsfehlerwinkel  $\delta$  in der Vertikalebene aus

$$\delta = \vartheta_0 - \varphi.$$

Als mittlere Abgangsfehlerwinkel findet man bei Geschützen  $\delta = -20' \dots +1^\circ 10'$ . Es gilt hierbei die Regel, daß Geschütze mit langem Rohr (Kanonen) negative Abgangsfehlerwinkel haben, Waffen mit kurzem Rohr hingegen positive Abgangsfehlerwinkel.

Bei Geschützen mit mehreren Ladungen vergrößert sich der Abgangsfehlerwinkel mit abnehmender Anfangsgeschwindigkeit.

Der Abgangsfehlerwinkel  $\omega$  der Seitenrichtung wird aus dem horizontalen Abstand von Visierpunkt und mittlerem Treffpunkt auf der Scheibe *berechnet*, da die seitliche Verschiebung nicht allein eine Folge des seitlichen Abgangsfehlerwinkels ist, sondern durch Überlagerung von Drallabweichung, Seitenwindeinfluß und seitlichen Richtfehlern zustande kommt.

#### **7.4.2. Die experimentelle Ermittlung der Horizontalschußweite und der wahrscheinlichen Abweichungen des Auftreffpunkts**

Die Versuchsschießen zur Ermittlung der experimentellen Horizontalschußweiten sind die Hauptform der Schußtafel-Schießen der Erdartillerie. Die hierbei gemessenen Daten dienen zur Bestimmung des Ballistischen Koeffizienten  $c$  sowie der wahrscheinlichen Abweichungen  $r_e$  und  $r_z$  (siehe Abschnitt 7.2.6.); sie bilden damit die entscheidende experimentelle Grundlage für die Schußtafel als Ganzes. Hieraus ergibt sich die Notwendigkeit, auf diese Versuchsschießen hinreichend Zeit und Munition zu verwenden.

Die Koordinaten der Auftreff- bzw. Sprengpunkte werden sorgfältig vermessen und in der Reihenfolge der Schüsse registriert.

Bei Schießversuchen tritt nicht selten der Fall auf, daß sich die Anfangsgeschwindigkeit der Geschosse während des Schießens systematisch ändert, wodurch der mittlere Treffpunkt wandert. Sind die Koordinaten

der Auftreffpunkte in chronologischer Reihenfolge registriert worden, so bietet sich die Möglichkeit, diesen Trend quantitativ zu erfassen und die Resultate der Versuchsschießen nachträglich auf  $v_0 = \text{const}$  zu reduzieren.

Die mathematische Bearbeitung der anfallenden Versuchsdaten erfolgt nach den üblichen Verfahren der mathematischen Statistik.<sup>1)</sup>

### 7.4.3. Die Schießversuche zur Ermittlung der Seitenabweichungen

Die Seitenabweichungen des Geschosses infolge des Dralls und des Seitenwindes können im Prinzip durch sorgfältige Auswertung der in Abschnitt 7.4.2. geschilderten Entfernungsschießen gewonnen werden. Eine detaillierte Analyse der Fehlereinflüsse zeigt jedoch, daß ein derartiges Vorgehen nicht sehr zuverlässige Aussagen liefert: Die auf diesem Wege ermittelte Drallabweichung ist mit einem wahrscheinlichen Fehler von etwa 40% behaftet. Die experimentelle Ermittlung der Seitenabweichungen erfolgt deshalb besser mit Hilfe der im folgenden beschriebenen speziellen Schießversuche.

#### 7.4.3.1. Das Vergleichsschießen mit zwei Waffen entgegengesetzter Drallrichtung

Zur experimentellen Ermittlung der Seitenabweichungen werden zwei Geschütze verwendet, von denen das eine Rechts-, das andere Linksdrall hat, die aber in allen übrigen ballistischen Leistungscharakteristiken übereinstimmen.

Werden beide Geschütze parallel zueinander aufgestellt und gleichzeitig abgefeuert, so sollten die Abweichungen infolge des Seitenwindes bei beiden Geschossen gleich sein, während sich die Drallabweichungen in ihrem Vorzeichen unterscheiden (siehe Bild 7.6).

Wie man Bild 7.6 entnimmt, bestehen zwischen den resultierenden Seitenabweichungen  $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2$  und den Seitenabweichungen  $\tilde{z}_D, \tilde{z}_{W_z}$  (durch den Drall bzw. infolge des Seitenwindes) sowie dem Abstand  $a$  der Abgabebenen die Beziehungen

$$\tilde{z}_1 = |\tilde{z}_{W_z}| - |\tilde{z}_D|, \quad \tilde{z}_2 = |\tilde{z}_{W_z}| + |\tilde{z}_D| + a.$$

<sup>1)</sup> Siehe etwa Storm, R.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung/Mathematische Statistik/Statistische Qualitätskontrolle*. 3., neubearb. und erw. Aufl., Leipzig 1969.

Hieraus folgt für  $\tilde{z}_D$  und  $\tilde{z}_{w_s}$ :

$$\tilde{z}_D = \frac{1}{2} (\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1 - a); \quad \tilde{z}_{w_s} = \frac{1}{2} (\tilde{z}_2 + \tilde{z}_1 - a). \quad (7.39)$$

Der Vorteil dieser Methode zur experimentellen Ermittlung der Seitenabweichungen besteht darin, daß die Geschwindigkeit des Seitenwindes nicht gemessen zu werden braucht. Mehr noch: Man erhält aus (7.39) einen experimentellen Wert für die Seitenabweichung infolge des Seitenwindes. Dieser  $\tilde{z}_{w_s}$ -Wert kann dazu verwendet werden, die Zuverlässigkeit der linearen Störungsformeln zu überprüfen.

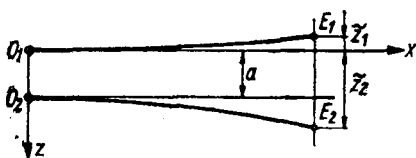


Bild 7.6  
Vergleichsschießen mit Waffen unterschiedlicher Drallrichtung – Projektion der Flugbahnen auf die  $x, z$ -Ebene

Werden die Geschütze unmittelbar hintereinander aufgestellt, so ist  $a = 0$ . Die Parallelität der Abgangsebenen beider Geschütze kann hierbei unschwer mit einer Genauigkeit von 1' gewährleistet werden.

#### 7.4.3.2. Das Schießen mit zwei ballistisch identischen Waffen in entgegengesetzte Richtung

Zur experimentellen Ermittlung der Seitenabweichungen wird gleichzeitig mit zwei ballistisch identischen Geschützen in entgegengesetzte Richtung geschossen (sogenanntes *Gegenschießen*). Hierbei sind die beiden in Bild 7.7 dargestellten Fälle zu unterscheiden. Der Aufstellung der Geschütze gemäß Bild 7.7b ist der Vorzug zu geben; der Abstand der beiden Geschütze soll die Schußweite um maximal (1 ... 2) km übertreffen.

Für die Auswertung ist es zweckmäßig, zwei Koordinatensysteme  $\{x, y\}$  und  $\{x', y'\}$  gemäß Bild 7.7b einzuführen: Als Ergebnisse der Versuchsschießen werden die experimentellen Schußweiten  $\tilde{x}_e, \tilde{x}'_e$  und Seitenabweichungen  $\tilde{z}_e, \tilde{z}'_e$  registriert.

Während des Versuchsschießens wird die Atmosphäre in regelmäßigen Zeitabständen bis zu einer Höhe sondiert, die die Gipfelhöhe übersteigt. Die Geschwindigkeit  $w_B$  des mittleren ballistischen Windes wird bezüglich des  $x, y$ -Systems in die Komponenten  $\bar{W}_{xB}, \bar{W}_{yB}$  zerlegt.

Bei der speziellen Wahl der Koordinatensysteme haben die Schußweitenänderungen  $\delta X_{W_x}$  infolge des Längswindes für die beiden Geschütze unterschiedliches Vorzeichen, die Schußweitenänderungen  $\delta X_{p_r}$  infolge der Abweichungen des Luftdrucks und der Lufttemperatur von den Werten der Normalatmosphäre jedoch gleiches Vorzeichen.

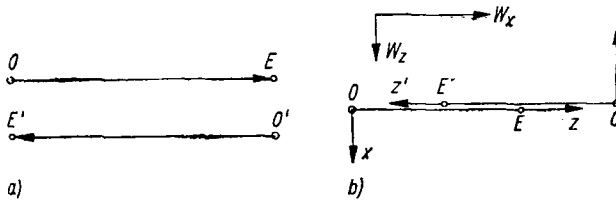


Bild 7.7 Gleichzeitiges Schießen in entgegengesetzter Richtung – Wahl der Koordinatensysteme

Die drallbedingten Seitenabweichungen sind in beiden Koordinatensystemen positiv, die Seitenabweichungen infolge des Seitenwindes haben unterschiedliches Vorzeichen.

Die ungestörten Schußweiten werden mit  $\hat{x}_e$  bzw.  $\hat{x}'_e$ , die gestörten hingegen mit  $\tilde{x}_e$  bzw.  $\tilde{x}'_e$  bezeichnet. Die systematische Abweichung der ungestörten Schußweiten (beim Schuß unter gleichen Anfangsbedingungen) betrage  $\tilde{a} := \hat{x}'_e - \hat{x}_e$ . Dann bestehen für die Schußweitenänderungen und die Seitenabweichungen die Beziehungen:

a) Schußweitenänderungen

$$\tilde{x}_e = \hat{x}_e + \delta X_{W_x} + \delta X_{p_r},$$

$$\tilde{x}'_e = \hat{x}'_e - \delta X_{W_x} + \delta X_{p_r}.$$

Hieraus folgt

$$\delta X_{W_x} = \frac{1}{2} (\tilde{x}_e - \tilde{x}'_e + \tilde{a}). \quad (7.40)$$

b) Seitenabweichungen

$$\tilde{z}_e = \tilde{z}_D + \tilde{z}_{W_x}; \quad \tilde{z}'_e = \tilde{z}_D - \tilde{z}_{W_x}.$$

Somit gilt

$$\tilde{z}_D = \frac{1}{2} (\tilde{z}_e + \tilde{z}'_e), \quad \tilde{z}_{W_x} = \frac{1}{2} (\tilde{z}_e - \tilde{z}'_e). \quad (7.41)$$

Aus den Resultaten der Gegenschießen folgen die Abweichungen der Lage des Auftreffpunkts, die durch den Längswind, den Seitenwind und den Dralleinfluß verursacht werden.

Sorgfältig durchgeführte Versuchsschießen der hier geschilderten Art haben gezeigt, daß bei dem in der Artillerie üblichen Berechnungsverfahren für die Windkorrekturen Fehler von (5 ··· 10) % der Verbesserungswerte auftreten können (siehe auch Abschnitt 7.6.4.).

Die Genauigkeit der experimentellen Werte für die Drallabweichung ist beim Gegenschießen geringer als beim parallelen Schuß mit unterschiedlichen Drallrichtungen: Beim Gegenschießen ist es nicht möglich, den Einfluß der Fehler der Visiereinstellung und des seitlichen Richtens auf die Seitenabweichungen der Geschosse mit der Genauigkeit auszuhalten, mit der dies beim Schießen aus zwei Geschützen unterschiedlicher Drallrichtung gelingt.

Auf die weiteren speziellen Versuchsschießen, die bei der Aufstellung von Schußtafeln erforderlich sind, kann an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

## **7.5. Die Auswertung von Schußtafel-Schießen<sup>1)</sup>**

### **7.5.1. Die Reduktion der experimentellen Schußweite auf Normalbedingungen**

Die Schießversuche finden unter Bedingungen statt, die von den Normalbedingungen abweichen. Die ballistische Auswertung der Versuchsschießen beginnt deshalb damit, die ermittelten Daten auf Normalbedingungen zu reduzieren. Man unterscheidet

- *Topographische Normalbedingungen:* Der Auftreffpunkt liegt in der Mündungsebene, die Schildzapfenachse des Geschützes ist waagrecht.
- *Ballistische Normalbedingungen:* Die Anfangsgeschwindigkeit und die Geschossmasse haben ihre Sollwerte; die Ladungstemperatur beträgt  $T_{LN} = 15^{\circ}\text{C}$ ; die Außenformen von Geschosß und Zünder entsprechen den Zeichnungsmaßen.
- *Meteorologische Normalbedingungen:* Der Luftdruck im Mündungshorizont ist gleich dem Normaldruck  $p_{ON} = 750$  Torr; die Lufttemperatur am Boden beträgt  $\tau_{ON} = 15^{\circ}\text{C}$ ; die funktionelle Abhängigkeit der meteorologischen Elemente von der Höhe entspricht dem Normalverlauf der Standardatmosphäre; es herrscht Windstille.

<sup>1)</sup> Die Ausführungen dieses Abschnitts knüpfen an die Abschnitte 3.6.3. und 7.2.5. an.

Die Reduktion der experimentellen Schußweiten auf Normalbedingungen wird getrennt für die Mittelwerte der einzelnen Versuchsschießen vorgenommen. Dabei erweist sich ein iteratives Vorgehen als notwendig.

1. Schritt: An Hand der (gemessenen) Anfangsgeschwindigkeit  $\bar{v}_0$ , des Abgangswinkels  $\bar{\vartheta}_0$  und der experimentellen Schrägschußweite  $\bar{D}$  wird eine 1. Näherung  $\bar{c}$  für den Ballistischen Koeffizienten  $c$  ermittelt.

2. Schritt: Mit  $(\bar{c}, \bar{v}_0, \bar{\vartheta}_0)$  bestimmt man eine 1. Näherung  $\bar{y}_E$  für die Gipfelordinate  $y_E$  und die Flugbahnelemente im Auftreffpunkt  $E$  im Gelände (Geländewinkel  $\epsilon$ ).

3. Schritt: Die im 2. Schritt ermittelten Flugbahnelemente werden dazu benutzt, den Auftreffpunkt auf die Mündungsebene zu reduzieren (siehe Bild 7.8).

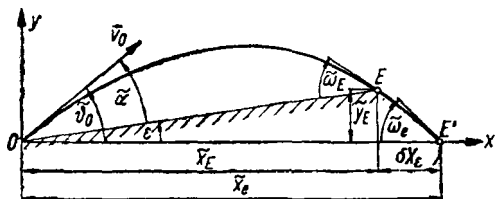


Bild 7.8  
Zur Reduktion der experimentellen Schrägschußweite auf die Mündungsebene

4. Schritt: Mit dem Tafelengang  $(\bar{c}, \bar{v}_0, \bar{\vartheta}_0)$  liest man in dem außenballistischen Tafelwerk die 1. Näherungen für die Störungskoeffizienten der Schußweite  $|\bar{Q}_\mu|$  ab.

Da mit Hilfe der Flugbahnhöhe  $\bar{y}_E$  auch die mittleren ballistischen Abweichungen der meteorologischen Elemente berechnet werden können, sind die Verbesserungen für die Schußweite in 1. Näherung bekannt.

5. Schritt: Die im 3. und 4. Schritt ermittelten Verbesserungen liefern die Horizontalschußweite  $x_E^\circ$  in 1. Näherung.

6. Schritt: Mit dem Tafelengang  $(x_E^\circ, \bar{v}_0, \bar{\vartheta}_0)$  kann aus der Tafel der Flugbahnelemente ein verbesserter Ballistischer Koeffizient  $c^\circ$  entnommen werden.

7. Schritt: Der Reduktionsprozeß wird wiederholt, wobei man von den Bahnparametern  $(c^\circ, \bar{v}_0, \bar{\vartheta}_0)$  ausgeht: Man erhält eine verbesserte Schußweite  $x_E^{\circ\circ}$ .



Der Iterationsprozeß kommt in der Regel damit bereits zum Stillstand; er liefert als Ergebnis die *reduzierte Schußweite*  $\hat{x}_e^{(i)}$  des  $i$ -ten Versuchsschießens.

Aus den  $N$  reduzierten Schußweiten wird mit gewissen Gewichten  $\hat{q}_i$  die Normalschußweite  $\hat{x}_e$  (für die gegebenen Anfangsbedingungen  $\hat{v}_0, \hat{\vartheta}_0$ ) gebildet:

$$\hat{x}_e = \sum_{i=1}^N \hat{q}_i \hat{x}_e^{(i)}.$$

Dieser  $\hat{x}_e$ -Wert liefert den endgültigen Ballistischen Koeffizienten  $\hat{c}$ . In den Reduktionsprozeß lassen sich auch die Korrekturen  $\hat{\vartheta}_0 \rightarrow \vartheta_0, \hat{v}_0 \rightarrow v_0$  einbeziehen, die hier im Interesse der Übersichtlichkeit weggelassen worden sind.

### 7.5.2. Die Reduktion der Schußweite auf den Mündungshorizont bei rasanten Flugbahnen

Die Reduktion der Schußweite auf die Mündungsebene kann bei rasanten Bahnen leicht mit Hilfe der Sekundären *Siacci-Funktionen* (Abschnitt 5.4.8.) und der *Lenderschen Formel* (2.116) ausgeführt werden.

Würde der Punkt  $E$  in der Mündungsebene liegen, so wäre nach (2.116) für das Erreichen der Horizontalschußweite  $x_e = \bar{D}$  der Abgangswinkel

$$\vartheta_0 = \alpha_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\cos \varepsilon} = \frac{\hat{\vartheta}_0 - \varepsilon}{\cos \varepsilon} \quad (7.42)$$

erforderlich, wobei  $\varepsilon$  aus  $\tan \varepsilon = \bar{y}_E / \bar{x}_E$  folgt und  $v_0 = \text{const}$  vorausgesetzt wird.

Die 1. Näherung  $\bar{c}$  des Ballistischen Koeffizienten  $c$  ergibt sich mit Hilfe der Sekundären *Siacci-Funktion*  $f_1$ :

$$f_1(\bar{c} \bar{D}, \bar{v}_0) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{\bar{D}}. \quad (7.43)$$

Nachdem  $\bar{c}$  bekannt ist, liefert die Sekundäre *Siacci-Funktion*  $f_0$  die Horizontalschußweite  $\bar{x}_e$ :

$$f_0(\bar{c} \bar{x}_e, \bar{v}_0) = \bar{c} \sin 2\hat{\vartheta}_0 \quad (7.44)$$

und die Verbesserung der Horizontalschußweite  $\delta X_z$ ,

$$\delta X_z = \tilde{x}_e - \tilde{x}_E = \tilde{x}_e - \tilde{D} \cos \varepsilon. \quad (7.45)$$

Ist die Flugbahn stärker gekrümmt, verwendet man zur Reduktion der Schußweite auf die Mündung das in Abschnitt 5.7.2. besprochene außenballistische Tafelwerk für die Flugbahnelemente.

Geht man mit  $(\tilde{v}_0, \tilde{\vartheta}_0 - \varepsilon, \tilde{D})$  in die Tafel für die Horizontalschußweite ein, so ergibt sich in 1. Näherung der  $c$ -Wert  $\tilde{c}$ .

Die Horizontalschußweite  $\tilde{x}_e$  ist eine Funktion der Flugbahnparameter  $(\tilde{c}, \tilde{v}_0, \tilde{\vartheta}_0)$ .

Im Zusammenhang mit dem Reduktionsprozeß ist auf folgendes hinzuweisen: Wird parallel zu den Entfernungsschießen die Anfangsgeschwindigkeit gemessen, so erübrigt es sich, die innenballistische Korrektur für die Massenänderung vorzunehmen. Die außenballistische Massenänderung ist jedoch in jedem Fall zu berücksichtigen.

### 7.5.3. Die Anpassung der Flugbahnvorhersagen an die experimentell ermittelten Schußweiten

Die in Abschnitt 7.5.1. angegebene Prozedur der  $c$ -Wert-Ermittlung an Hand von Schießversuchen muß für jede Ladung, alle Geschostypen und eine ausgewählte Folge von Abgangswinkeln durchgeführt werden. Als Ergebnis erhält man Diagramme des Typs Bild 7.9. Für die weitere Arbeit glättet man die Kurvenverläufe mit Hilfe der von der angewandten Mathematik bereitgestellten Verfahren bzw. approximiert sie durch Polynome.

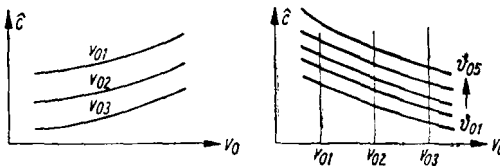


Bild 7.9  
Ballistischer Koeffizient  $c$  als Funktion des Abgangswinkels  $\vartheta_0$  und der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  (qualitativ)

Die Kurvenschar  $\hat{c} = f(\hat{\vartheta}_0, \hat{v}_0)$  hat fundamentale Bedeutung für die Schußtafel-Aufstellung: Man entnimmt ihr die Ballistischen Koeffizienten, mit denen die Bahnelemente der Schußtafel berechnet werden.

Die Anpassung der berechneten wahrscheinlichen Abweichungen an die experimentell ermittelten war bereits in Abschnitt 7.2.6. erläutert worden.

Aus der Anpassung der berechneten und der experimentellen Horizontalschußweite im Auftreffpunkt folgt noch nicht, daß auch die Störungskoeffizienten der realen Bahn mit den Störungskoeffizienten des Bahnmodells übereinstimmen. Da die Störungskoeffizienten, mathematisch gesehen, partielle Ableitungen der Flugbahnelemente nach einem Parameter darstellen, wirken sich die Abweichungen des individuellen Luftwiderstandsgesetzes des Geschosses von dem Standard-Luftwiderstandsgesetz bei den Störungskoeffizienten unter Umständen recht erheblich aus.

## **7.6. Die Genauigkeit der Schußtafel-Angaben**

Fehler in den Schußtafel-Daten führen bei der rechnerischen Vorbereitung der Anfangsangaben zu einer Verringerung der Treffwahrscheinlichkeit. Besondere Bedeutung kommt hierbei der Genauigkeit der Entfernung- bzw. Abgangswinkelangaben zu. Die nachstehenden Ausführungen verfolgen deshalb das Ziel, den Entfernungsfehler der Schußtafel abzuschätzen.

Die resultierende Genauigkeit der Schußtafel-Entfernungsangaben hängt (für einen vorgegebenen Abgangswinkel) sowohl von der Genauigkeit ab, mit der die experimentellen Stützentfernungen bestimmt werden können, wie auch von der Präzision der Berechnung der Bahnelemente.

### **7.6.1. Die wahrscheinliche Abweichung der experimentellen Horizontalschußweite**

Der wahrscheinliche Fehler der experimentellen Horizontalschußweite setzt sich aus dem wahrscheinlichen Meßfehler bei der Bestimmung der Koordinaten der Einschläge und der wahrscheinlichen Abweichung  $St_E$  zusammen. Da die Meßfehler bei der Bestimmung der Koordinaten 2 m nicht übersteigen und  $St_E \approx 0,005 \cdot x_e$  ist, kann man den Meßfehler der Koordinaten der Einschläge bei den folgenden Betrachtungen vernachlässigen.

Nimmt man an, daß zur Ermittlung der experimentellen Schußweiten jeweils 7 Schuß abgegeben worden sind, so findet man für den *wahrscheinlichen Fehler*  $E_{\bar{x}}$  der experimentellen Schußweite

$$E_{\bar{x}} = \frac{St_E}{\sqrt{n}} = \frac{0,005}{\sqrt{7}} \hat{x}_e = 0,002 \cdot \hat{x}_e. \quad (7.46)$$

Die folgenden wahrscheinlichen Abweichungen kommen durch die Reduktion der experimentellen Schußweite auf Normalbedingungen zustande.

### 7.6.2. Die wahrscheinliche Abweichung der Anfangsgeschwindigkeit

Die wahrscheinliche Abweichung der Anfangsgeschwindigkeit ist durch (7.35) gegeben.

Umfaßt das Versuchsschießen  $n = (5 \cdots 7)$  Schuß, so erhält man als wahrscheinlichen Fehler  $E_v$  der mittleren Anfangsgeschwindigkeit des Versuchsschießens

$$E_v \approx 0,003 \cdot \hat{v}_0.$$

Diesem wahrscheinlichen Fehler der Anfangsgeschwindigkeit entspricht ein wahrscheinlicher Schußweitenfehler  $E_{x, v_0}$ ,

$$E_{x, v_0} = (0,002 \cdots 0,003) \cdot \hat{x}_e. \quad (7.47)$$

### 7.6.3. Die wahrscheinliche Abweichung des Abgangswinkels

Die wahrscheinliche Abweichung des Abgangswinkels setzt sich aus dem wahrscheinlichen Fehler  $E_\varphi$  der Einstellung des Erhöhungswinkels mit dem Quadranten und dem wahrscheinlichen Fehler  $E_\delta$  der Bestimmung der vertikalen Komponente des Abgangsfehlerwinkels zusammen. Experimente haben als Mittelwerte geliefert:

$$E_\varphi = 2,3'; \quad E_\delta = 1,2'.$$

Damit folgt für die wahrscheinliche Abweichung  $E_{\theta_0}$  des Abgangswinkels

$$E_{\theta_0} = \sqrt{E_\varphi^2 + E_\delta^2} = 2,6'.$$

Bei Abgangswinkeln über  $25^\circ$  entspricht  $E_{\theta_0}$  ein wahrscheinlicher Entfernungsfehler

$$E_{x, \theta_0} = 0,001 \cdot \hat{x}_e \quad (\theta_0 > 25^\circ). \quad (7.48)$$

Bei Abgangswinkeln zwischen  $5^\circ$  und  $10^\circ$  erreicht  $E_{x, \theta_0}$  Werte:

$$E_{x, \theta_0} = (6,0 \cdots 8,5) \cdot 10^{-3} \cdot \hat{x}_e \quad (\theta_0 = 5^\circ \cdots 10^\circ). \quad (7.49)$$

#### 7.6.4. Die wahrscheinlichen Fehler bei der Bestimmung der meteorologischen Elemente

Für die wahrscheinlichen Fehler bei der Bestimmung der meteorologischen Elemente und die hieraus resultierenden Fehler der Horizontalschußweite gelten die nachstehend genannten Richtwerte, die aus einer Analyse einer großen Anzahl spezieller Meßreihen ermittelt worden sind.

Der wahrscheinliche Fehler  $E_{p_0}$  des Luftdrucks  $p_0$  am Boden beträgt

$$E_{p_0} \approx 1 \text{ Torr}. \quad (7.50)$$

Hieraus resultiert ein wahrscheinlicher Fehler  $E_{x, p_0}$  der Horizontalschußweite  $x_e$  von

$$E_{x, p_0} = (0,0001 \cdots 0,0007) \cdot \hat{x}_e. \quad (7.51)$$

Als wahrscheinlicher Fehler  $E_{\delta_{\bar{v}_B}}$  der mittleren ballistischen Abweichung  $\delta_{\bar{v}_B}$  der Lufttemperatur kann

$$E_{\delta_{\bar{v}_B}} \approx 1,6 \text{ grad} \quad (7.52)$$

angenommen werden; woraus eine wahrscheinliche Abweichung  $E_{x, \delta_{\bar{v}_B}}$  der Horizontalschußweite  $x_e$  folgt:

$$E_{x, \delta_{\bar{v}_B}} = (0,0003 \cdots 0,0012) \cdot \hat{x}_e. \quad (7.53)$$

Der wahrscheinliche Fehler  $E_{w_x}$  der Geschwindigkeit  $w_x$  des Längswindes hat die Größe

$$E_{w_x} \approx 0,65 \text{ m/s}. \quad (7.54)$$

Der hieraus resultierende wahrscheinliche Fehler  $E_{x, w_x}$  der Horizontalschußweite  $x_e$  ergibt sich zu

$$E_{x, w_x} = (0,0004 \cdots 0,0021) \cdot \hat{x}_e. \quad (7.55)$$

### 7.6.5. Die wahrscheinlichen Fehler bei der Berechnung der Verbesserungskoeffizienten

Die wahrscheinlichen Fehler, die bei der Berechnung der Verbesserungskoeffizienten auftreten, haben zwei Ursachen:

- Abweichungen des individuellen Luftwiderstandsgesetzes des Geschosses von dem Standard-Luftwiderstandsgesetz sowie
- die Linearisierung der Störungseinflüsse.

Die wahrscheinlichen Abweichungen der Störungskoeffizienten liegen im Mittel bei 5% ihres Betrags.

### 7.6.6. Der resultierende wahrscheinliche Fehler der Horizontalschußweite an den Stützstellen

Sieht man die in Abschnitt 7.6.4. aufgeführten wahrscheinlichen Abweichungen  $E_{x,\mu}$  als statistisch unabhängig an, so ergeben sich für die resultierenden wahrscheinlichen Abweichungen  $E_x^{(i)}$  der reduzierten Schußweiten  $\hat{x}_e^{(i)}$  getrennter Schießversuche mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes die in Tabelle 7.5 aufgeführten Zahlenwerte.

Tabelle 7.5 Resultierende wahrscheinliche Abweichungen  $E_x^{(i)}$  der reduzierten Schußweiten  $\hat{x}_e^{(i)}$  getrennter Schießversuche (in %)

$v_0 \backslash \vartheta_0$	5°	10°	20°	30°	40°	45°	60°
< 450 m/s	1,03	0,55	0,53	0,50	0,50	0,50	0,53
> 450 m/s	0,78	0,52	0,47	0,47	0,47	0,47	0,50

In Abhängigkeit vom Abgangswinkel variiert die wahrscheinliche Abweichung  $E_x^{(i)}$  in den Grenzen

$$E_x^{(i)} = (0,0047 \cdots 0,0103) \cdot \hat{x}_e. \quad (7.56)$$

Für den Abgangswinkelbereich  $\vartheta_0 = 10^\circ \cdots 60^\circ$  kann man in guter Näherung setzen

$$E_x^{(i)} = 0,0050 \cdot \hat{x}_e. \quad (7.57)$$

Ein Vergleich mit den früher angegebenen wahrscheinlichen Abweichungen zeigt, daß der Hauptteil des Fehlers  $E_x^{(i)}$  zu Lasten der wahrscheinlichen Abweichung der Anfangsgeschwindigkeit geht.

Die Schießversuche werden in der Regel drei- bis viermal wiederholt. Für die wahrscheinliche Abweichung  $E_x^\circ$  der Horizontalschußweite an den Stützstellen folgt damit

$$E_x^\circ = \frac{E_x^{(i)}}{\sqrt{N}} = (0,0025 \cdots 0,0030) \cdot \hat{x}_e. \quad (7.57)$$

### 7.6.7. Die Gesamtgenauigkeit der Entfernungangaben der Schußtafeln

Durch die Glättung der im Schießversuch ermittelten Ballistischen Koeffizienten und die Interpolationen bezüglich der Horizontalschußweite entstehen zusätzliche Fehler, charakterisiert durch die entsprechende wahrscheinliche Abweichung  $E_{x,M}$ . Die resultierende wahrscheinliche Abweichung  $E_{x,ST}$  der Entfernungangaben der Schußtafel berechnet sich damit aus

$$E_{x,ST} = \sqrt{(E_x^\circ)^2 + (E_{x,M})^2}. \quad (7.58)$$

Einige Zahlenwerte sind in der nachstehenden Tabelle 7.6 zusammengestellt.

Tabelle 7.6 *Resultierende wahrscheinliche Fehler  $E_{x,ST}$  der Horizontalschußweiten  $\hat{x}_e$  der Schußtafel (in %)*

$\vartheta_0$	5°	10° ... 45°	50° ... 65°
$E_{x,ST}$	0,66	0,51	0,57

Gibt man in der Schußtafel die Horizontalschußweiten als Tafelgänge fest vor, so können die wahrscheinlichen Entfernungfehler mit Hilfe des Störungskoeffizienten  $\Delta X_\alpha$  in Abgangswinkelfehler übergeführt werden; z. B. gilt

$$E_{\alpha,ST} = \frac{E_{x,ST}}{\Delta X_\alpha}. \quad (7.56)$$

Die resultierenden wahrscheinlichen Abweichungen der Horizontal-schußweite, mit denen man beim praktischen Schießen zu rechnen hat, sind wesentlich größer als die wahrscheinliche Abweichung  $E_{x,ST}$  der Schußtafel-Werte.

### Kontrollfragen zu Kapitel 7

- 7.1. Was verstehen Sie unter einer Schußtafel? Welche Teilprobleme sind bei der Aufstellung einer Schußtafel zu lösen?
- 7.2. Welche Arten von Erdschußtafeln kennen Sie? Charakterisieren Sie Aufbau und Inhalt dieser Tafeln!
- 7.3. Wie sind die im Artilleriewesen gebräuchlichen Verbesserungskoeffizienten definiert? Nennen Sie die Unterschiede zwischen den Verbesserungskoeffizienten der Schußtafel, den Störungskoeffizienten der außenballistischen Störungstheorie und den Störungskoeffizienten des außenballistischen Tafelwerks!
- 7.4. Auf welchem Wege werden die in der Schußtafel angegebenen wahrscheinlichen Abweichungen ermittelt?
- 7.5. Welche Gesichtspunkte sind bei der Vorbereitung von Schußtafel-Versuchsschießen zu beachten?
- 7.6. Warum spaltet man das Versuchsschießen zur Ermittlung einer Schußtafel in mehrere getrennte Versuchsschießen auf, die an unterschiedlichen Tagen durchgeführt werden?
- 7.7. Nach welchem Prinzip wird die Anfangsgeschwindigkeit von Geschossen in der Praxis im allgemeinen ermittelt?
- 7.8. Wie ist zur Bestimmung des Abgangswinkels (bzw. des Abgangsfehlerwinkels) vorzugehen?
- 7.9. Was läßt sich allgemein über das Vorzeichen des Abgangsfehlerwinkels aussagen?
- 7.10. Was ist bei der experimentellen Ermittlung der Horizontalschußweiten zu beachten?
- 7.11. Wie kann die Seitenabweichung infolge des Geschößdralls experimentell ermittelt werden?
- 7.12. Was versteht man unter *Reduktion von experimentellen Schußweiten auf Normalbedingungen*? Schildern Sie das prinzipielle Vorgehen bei der Reduktion!
- 7.13. Auf welchem Wege gelangt man zu Aussagen über die Genauigkeit von Schußtafeln? Mit welchen wahrscheinlichen Fehlern der Schußtafel-Angaben muß gerechnet werden?



# Tafelanhang



TABEL I

## Standardatmosphäre SSA-64 [GOST 4401-64] (Auszug)

$h$	$\tau$	$p$	$\rho$	$a$	$\mu$	$\bar{\lambda}$	$g$
m	°C	mbar	kg/m <sup>3</sup>	m/s	Poise	m	m/s <sup>2</sup>
-1500	24,78	1206,97	1,4114	346,01	$1,8362 \cdot 10^{-4}$	$5,5833 \cdot 10^{-8}$	9,81127
-1000	21,52	1139,27	1,3469	344,11	$1,8207 \cdot 10^{-4}$	$5,8329 \cdot 10^{-8}$	9,80973
-500	18,27	1074,86	1,2850	342,21	$1,8051 \cdot 10^{-4}$	$6,0957 \cdot 10^{-8}$	9,80819
0	15,00	1013,25	1,2250	340,28	$1,7894 \cdot 10^{-4}$	$6,3741 \cdot 10^{-8}$	9,80665
500	11,75	954,53	1,1672	338,36	$1,7736 \cdot 10^{-4}$	$6,6688 \cdot 10^{-8}$	9,80511
1000	8,50	898,76	1,1117	336,43	$1,7578 \cdot 10^{-4}$	$6,9791 \cdot 10^{-8}$	9,80357
1500	5,25	845,66	1,0582	334,48	$1,7420 \cdot 10^{-4}$	$7,3079 \cdot 10^{-8}$	9,80203
2000	1,99	794,98	1,0066	332,52	$1,7260 \cdot 10^{-4}$	$7,6572 \cdot 10^{-8}$	9,80049
2500	-1,26	746,93	0,95706	330,55	$1,7099 \cdot 10^{-4}$	$8,0260 \cdot 10^{-8}$	9,79896
3000	-4,51	701,25	0,90941	328,56	$1,6937 \cdot 10^{-4}$	$8,4170 \cdot 10^{-8}$	9,79742
3500	-7,77	657,74	0,86345	326,56	$1,6773 \cdot 10^{-4}$	$8,8333 \cdot 10^{-8}$	9,79588
4000	-11,02	616,56	0,81942	324,56	$1,6610 \cdot 10^{-4}$	$9,2744 \cdot 10^{-8}$	9,79435
4500	-14,27	577,49	0,77714	322,54	$1,6446 \cdot 10^{-4}$	$9,7426 \cdot 10^{-8}$	9,79281
5000	-17,52	540,45	0,73654	320,51	$1,6280 \cdot 10^{-4}$	$1,0240 \cdot 10^{-7}$	9,79128
5500	-20,77	505,35	0,69758	318,47	$1,6114 \cdot 10^{-4}$	$1,0771 \cdot 10^{-7}$	9,78974
6000	-24,02	472,13	0,66022	316,41	$1,5946 \cdot 10^{-4}$	$1,1335 \cdot 10^{-7}$	9,78820
6500	-27,27	440,69	0,62441	314,34	$1,5778 \cdot 10^{-4}$	$1,1936 \cdot 10^{-7}$	9,78667
7000	-30,52	410,98	0,59010	312,25	$1,5609 \cdot 10^{-4}$	$1,2579 \cdot 10^{-7}$	9,78514
7500	-33,77	382,90	0,55725	310,15	$1,5439 \cdot 10^{-4}$	$1,3264 \cdot 10^{-7}$	9,78360
8000	-37,01	356,48	0,52591	308,05	$1,5267 \cdot 10^{-4}$	$1,3994 \cdot 10^{-7}$	9,78207
8500	-40,26	331,47	0,49585	305,92	$1,5095 \cdot 10^{-4}$	$1,4777 \cdot 10^{-7}$	9,78053
9000	-43,51	307,91	0,46712	303,78	$1,4922 \cdot 10^{-4}$	$1,5614 \cdot 10^{-7}$	9,77900
9500	-46,75	285,79	0,43977	301,63	$1,4747 \cdot 10^{-4}$	$1,6509 \cdot 10^{-7}$	9,77747

TAFEL I (Fortsetzung)

$h$	$\tau$	$p$	$\rho$	$a$	$\mu$	$\lambda$	$g$
m	°C	mbar	kg/m <sup>3</sup>	m/s	Poise	m	m/s <sup>2</sup>
10000	-50,00	264,91	0,41357	299,45	$1,4571 \cdot 10^{-4}$	$1,7471 \cdot 10^{-7}$	9,77594
10500	-53,25	245,28	0,38859	297,27	$1,4393 \cdot 10^{-4}$	$1,8503 \cdot 10^{-7}$	9,77440
11000	-56,49	226,90	0,36485	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$1,9610 \cdot 10^{-7}$	9,77287
11500	-56,49	209,76	0,33728	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$2,1212 \cdot 10^{-7}$	9,77134
12000	-56,49	193,91	0,31180	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$2,2946 \cdot 10^{-7}$	9,76981
12500	-56,49	179,26	0,28825	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$2,4821 \cdot 10^{-7}$	9,76820
13000	-56,49	165,72	0,26648	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$2,6849 \cdot 10^{-7}$	9,76675
13500	-56,49	153,21	0,24636	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$2,9041 \cdot 10^{-7}$	9,76522
14000	-56,49	141,64	0,22776	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$3,1413 \cdot 10^{-7}$	9,76369
14500	-56,49	130,95	0,21056	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$3,3979 \cdot 10^{-7}$	9,76217
15000	-56,49	121,07	0,19467	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$3,6752 \cdot 10^{-7}$	9,76063
15500	-56,49	111,93	0,17998	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$3,9752 \cdot 10^{-7}$	9,75911
16000	-56,49	103,48	0,16640	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$4,2996 \cdot 10^{-7}$	9,75758
16500	-56,49	95,676	0,15384	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$4,6507 \cdot 10^{-7}$	9,75605
17000	-56,49	88,459	0,14224	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$5,0301 \cdot 10^{-7}$	9,75452
17500	-56,49	81,787	0,13151	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$5,4401 \cdot 10^{-7}$	9,75300
18000	-56,49	75,619	0,12159	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$5,8840 \cdot 10^{-7}$	9,75146
18500	-56,49	69,918	0,11242	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$6,3641 \cdot 10^{-7}$	9,74995
19000	-56,49	64,647	0,10395	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$6,8825 \cdot 10^{-7}$	9,74842
19500	-56,49	59,774	$9,6114 \cdot 10^{-2}$	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$7,4436 \cdot 10^{-7}$	9,74689
20000	-56,49	55,269	$8,8870 \cdot 10^{-2}$	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$8,0505 \cdot 10^{-7}$	9,74537
21000	-56,49	47,254	$7,5983 \cdot 10^{-2}$	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$9,4158 \cdot 10^{-7}$	9,74232
22000	-56,49	40,403	$6,4966 \cdot 10^{-2}$	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$1,1013 \cdot 10^{-6}$	9,73927
23000	-56,49	34,547	$5,5550 \cdot 10^{-2}$	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$1,2880 \cdot 10^{-6}$	9,73623
24000	-56,49	29,541	$4,7501 \cdot 10^{-2}$	295,07	$1,4217 \cdot 10^{-4}$	$1,5062 \cdot 10^{-6}$	9,73318

25000	-56,49	25,262	4,0621 · 10 <sup>-2</sup>	295,07	1,4217 · 10 <sup>-4</sup>	1,7613 · 10 <sup>-6</sup>	9,73014
26000	-53,75	21,624	3,4336 · 10 <sup>-2</sup>	296,93	1,4367 · 10 <sup>-4</sup>	2,0925 · 10 <sup>-6</sup>	9,72710
27000	-51,01	18,545	2,9085 · 10 <sup>-2</sup>	298,78	1,4517 · 10 <sup>-4</sup>	2,4806 · 10 <sup>-6</sup>	9,72406
28000	-48,28	15,944	2,4701 · 10 <sup>-2</sup>	300,61	1,4665 · 10 <sup>-4</sup>	2,9327 · 10 <sup>-6</sup>	9,72102
29000	-45,54	13,725	2,1007 · 10 <sup>-2</sup>	302,43	1,4812 · 10 <sup>-4</sup>	3,4619 · 10 <sup>-6</sup>	9,71798
30000	-42,80	11,836	1,7901 · 10 <sup>-2</sup>	304,25	1,4959 · 10 <sup>-4</sup>	4,0786 · 10 <sup>-6</sup>	9,71494
32000	-37,33	8,828	1,3078 · 10 <sup>-2</sup>	307,84	1,5250 · 10 <sup>-4</sup>	5,6248 · 10 <sup>-6</sup>	9,70888
34000	-31,87	6,6692	9,6295 · 10 <sup>-3</sup>	311,38	1,5538 · 10 <sup>-4</sup>	7,6944 · 10 <sup>-6</sup>	9,70282
36000	-26,41	5,0561	7,1388 · 10 <sup>-3</sup>	314,89	1,5823 · 10 <sup>-4</sup>	1,0452 · 10 <sup>-5</sup>	9,69676
38000	-20,95	3,8546	5,3244 · 10 <sup>-3</sup>	318,36	1,6105 · 10 <sup>-4</sup>	1,4109 · 10 <sup>-5</sup>	9,69071
40000	-15,49	2,9586	4,0003 · 10 <sup>-3</sup>	321,78	1,6384 · 10 <sup>-4</sup>	1,8900 · 10 <sup>-5</sup>	9,68466
42000	-10,04	2,2835	3,0236 · 10 <sup>-3</sup>	325,16	1,6660 · 10 <sup>-4</sup>	2,5162 · 10 <sup>-5</sup>	9,67862
44000	-4,59	1,7718	2,2984 · 10 <sup>-3</sup>	328,51	1,6933 · 10 <sup>-4</sup>	3,3302 · 10 <sup>-5</sup>	9,67259
46000	+0,85	1,3825	1,7577 · 10 <sup>-3</sup>	331,82	1,7203 · 10 <sup>-4</sup>	4,3795 · 10 <sup>-5</sup>	9,66656
48000	0,85	1,0813	1,3748 · 10 <sup>-3</sup>	331,82	1,7203 · 10 <sup>-4</sup>	5,5994 · 10 <sup>-5</sup>	9,66054
50000	0,85	0,84581	1,0754 · 10 <sup>-3</sup>	331,82	1,7203 · 10 <sup>-4</sup>	7,1585 · 10 <sup>-5</sup>	9,65452
52000	0,85	0,66174	8,4136 · 10 <sup>-4</sup>	331,82	1,7203 · 10 <sup>-4</sup>	9,1494 · 10 <sup>-5</sup>	9,64851
54000	0,85	0,51780	6,5836 · 10 <sup>-4</sup>	331,82	1,7203 · 10 <sup>-4</sup>	1,1693 · 10 <sup>-4</sup>	9,64250
56000	-6,02	0,40399	5,2687 · 10 <sup>-4</sup>	327,64	1,6862 · 10 <sup>-4</sup>	1,4504 · 10 <sup>-4</sup>	9,63650
58000	-12,89	0,31317	4,1920 · 10 <sup>-4</sup>	323,40	1,6515 · 10 <sup>-4</sup>	1,8090 · 10 <sup>-4</sup>	9,63051
60000	-19,75	0,24121	3,3162 · 10 <sup>-4</sup>	319,11	1,6166 · 10 <sup>-4</sup>	2,2684 · 10 <sup>-4</sup>	9,62452
65000	-36,89	0,12165	1,7937 · 10 <sup>-4</sup>	308,13	1,5274 · 10 <sup>-4</sup>	4,1035 · 10 <sup>-4</sup>	9,60957
70000	-54,00	5,8343 · 10 <sup>-2</sup>	9,2747 · 10 <sup>-5</sup>	296,76	1,4353 · 10 <sup>-4</sup>	7,7433 · 10 <sup>-4</sup>	9,59466
75000	-71,09	2,6384 · 10 <sup>-2</sup>	4,5490 · 10 <sup>-5</sup>	284,95	1,3403 · 10 <sup>-4</sup>	1,5334 · 10 <sup>-3</sup>	9,57978
80000	-88,15	1,1141 · 10 <sup>-2</sup>	2,0979 · 10 <sup>-5</sup>	272,66	1,2420 · 10 <sup>-4</sup>	3,2241 · 10 <sup>-3</sup>	9,56494
85000	-88,15	4,5298 · 10 <sup>-3</sup>	8,5303 · 10 <sup>-6</sup>	272,66	1,2420 · 10 <sup>-4</sup>	7,9293 · 10 <sup>-3</sup>	9,55013
90000	-88,15	1,8444 · 10 <sup>-3</sup>	3,4733 · 10 <sup>-6</sup>	272,66	1,2420 · 10 <sup>-4</sup>	1,9474 · 10 <sup>-2</sup>	9,53536

TAFEL I (Fortsetzung)

$h$	$\tau$	$p$	$\rho$	$\rho_{0L}$	$g$
m	°C	mbar	kg/m <sup>3</sup>	—	m/s <sup>2</sup>
100000	-63,93	$3,2411 \cdot 10^{-4}$	$5,3993 \cdot 10^{-7}$	28,962	9,50591
110000	-15,79	$7,8222 \cdot 10^{-5}$	$1,0583 \cdot 10^{-7}$	28,934	9,47660
120000	+59,09	$2,5551 \cdot 10^{-5}$	$2,6586 \cdot 10^{-8}$	28,727	9,44741
130000	278,89	$1,2071 \cdot 10^{-5}$	$7,5045 \cdot 10^{-9}$	28,520	9,41839
140000	494,85	$7,3853 \cdot 10^{-6}$	$3,2766 \cdot 10^{-9}$	28,314	9,38948
150000	706,90	$5,1233 \cdot 10^{-6}$	$1,7682 \cdot 10^{-9}$	28,107	9,36069
160000	882,10	$3,8127 \cdot 10^{-6}$	$1,1081 \cdot 10^{-9}$	27,900	9,33205
170000	901,85	$2,9181 \cdot 10^{-6}$	$8,2787 \cdot 10^{-10}$	27,700	9,30240
180000	920,04	$2,2493 \cdot 10^{-6}$	$6,2332 \cdot 10^{-10}$	27,476	9,27400
190000	937,44	$1,7456 \cdot 10^{-6}$	$4,7276 \cdot 10^{-10}$	27,245	9,24570
200000	953,61	$1,3633 \cdot 10^{-6}$	$3,6109 \cdot 10^{-10}$	27,000	9,21750
210000	971,86	$1,0716 \cdot 10^{-6}$	$2,7709 \cdot 10^{-10}$	26,750	9,18950
220000	988,84	$8,4773 \cdot 10^{-7}$	$2,1412 \cdot 10^{-10}$	26,487	9,16150
230000	1004,2	$6,7469 \cdot 10^{-7}$	$1,6656 \cdot 10^{-10}$	26,205	9,13370
240000	1017,7	$5,4006 \cdot 10^{-7}$	$1,3039 \cdot 10^{-10}$	25,899	9,10610
250000	1029,6	$4,3468 \cdot 10^{-7}$	$1,0270 \cdot 10^{-10}$	25,577	9,07850
260000	1043,0	$3,5184 \cdot 10^{-7}$	$8,1111 \cdot 10^{-11}$	25,213	9,05110
270000	1055,6	$2,8639 \cdot 10^{-7}$	$6,4465 \cdot 10^{-11}$	24,854	9,02380
280000	1066,8	$2,3439 \cdot 10^{-7}$	$5,1548 \cdot 10^{-11}$	24,488	8,99660
290000	1076,3	$1,9285 \cdot 10^{-7}$	$4,1463 \cdot 10^{-11}$	24,110	8,96960
300000	1084,8	$1,5939 \cdot 10^{-7}$	$3,3521 \cdot 10^{-11}$	23,731	8,94270

TAFEL II

Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943: Widerstandsfunktion  $G_{43}(v_\tau)$ ,  
 Widerstandsfunktion  $F_{43}(v_\tau)$  und Ballistischer Widerstandsgrad  $n_{43}(v_\tau)$

$v_\tau$	$G_{43}(v_\tau)$ $\times 100$	$F_{43}(v_\tau)$	$n_{43}(v_\tau)$	$v_\tau$	$G_{43}(v_\tau)$ $\times 100$	$F_{43}(v_\tau)$	$n_{43}(v_\tau)$
m s <sup>-1</sup>	kgm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup>	kgm <sup>-1</sup> s <sup>-2</sup>	—	m s <sup>-1</sup>	kgm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup>	kgm <sup>-1</sup> s <sup>-2</sup>	—
100	0,7454	0,74	2,000	178	1,3269	2,36	2,000
102	0,7603	0,77	2,000	180	1,3418	2,41	2,000
104	0,7751	0,80	2,000	182	1,3566	2,47	2,000
106	0,7901	0,83	2,000	184	1,3714	2,52	2,000
108	0,8050	0,86	2,000	186	1,3865	2,58	2,000
110	0,8200	0,90	2,000	188	1,4015	2,63	2,000
112	0,8348	0,93	2,000	190	1,4163	2,69	2,000
114	0,8498	0,97	2,000	192	1,4313	2,75	2,000
116	0,8646	1,00	2,000	194	1,4460	2,81	2,000
118	0,8796	1,04	2,000	196	1,4609	2,87	2,000
120	0,8945	1,08	2,000	198	1,4759	2,93	2,000
122	0,9094	1,11	2,000	200	1,491	2,99	2,000
124	0,9243	1,15	2,000	202	1,506	3,05	2,000
126	0,9392	1,19	2,000	204	1,521	3,11	2,000
128	0,9541	1,23	2,000	206	1,536	3,17	2,000
130	0,9690	1,27	2,000	208	1,551	3,23	2,000
132	0,9839	1,31	2,000	210	1,566	3,30	2,000
134	0,9988	1,35	2,000	212	1,580	3,36	2,000
136	1,0138	1,39	2,000	214	1,595	3,43	2,000
138	1,0287	1,43	2,000	216	1,610	3,49	2,000
140	1,0436	1,47	2,000	218	1,625	3,56	2,000
142	1,0586	1,51	2,000	220	1,640	3,62	2,000
144	1,0734	1,55	2,000	222	1,655	3,69	2,000
146	1,0884	1,59	2,000	224	1,670	3,75	2,000
148	1,1032	1,63	2,000	226	1,685	3,82	2,000
150	1,1182	1,68	2,000	228	1,700	3,89	2,000
152	1,1330	1,72	2,000	230	1,714	3,95	2,000
154	1,1480	1,77	2,000	232	1,730	4,02	2,000
156	1,1629	1,82	2,000	234	1,744	4,09	2,000
158	1,1778	1,86	2,000	236	1,759	4,15	2,000
160	1,1927	1,91	2,000	238	1,774	4,22	2,000
162	1,2076	1,96	2,000	240	1,789	4,29	2,000
164	1,2225	2,00	2,000	242	1,804	4,36	2,000
166	1,2373	2,05	2,000	244	1,819	4,43	2,000
168	1,2522	2,10	2,000	246	1,834	4,50	2,000
170	1,2673	2,15	2,000	248	1,849	4,58	2,000
172	1,2822	2,20	2,000	250	1,864	4,65	2,000
174	1,2970	2,25	2,000	251	1,871	4,69	2,000
176	1,3118	2,31	2,000	252	1,879	4,73	2,000

TAFEL II (Fortsetzung)

$v_\tau$	$G_{43}(v_\tau)$ $\times 100$	$F_{43}(v_\tau)$	$n_{43}(v_\tau)$	$v_\tau$	$G_{43}(v_\tau)$ $\times 100$	$F_{43}(v_\tau)$	$n_{43}(v_\tau)$
$m s^{-1}$	$kg m^{-2} s^{-1}$	$kg m^{-1} s^{-2}$	— •	$m s^{-1}$	$kg m^{-2} s^{-1}$	$kg m^{-1} s^{-2}$	—
253	1,886	4,76	2,000	294	2,357	6,91	3,362
254	1,893	4,80	2,000	295	2,376	6,99	3,425
255	1,901	4,84	2,010	296	2,396	7,07	3,490
256	1,908	4,88	2,026	297	2,416	7,16	3,558
257	1,916	4,92	2,042	298	2,437	7,25	3,628
258	1,924	4,96	2,058	299	2,459	7,34	3,701
259	1,932	5,00	2,075	300	2,482	7,44	3,777
260	1,940	5,04	2,092	301	2,505	7,54	3,857
261	1,949	5,08	2,110	302	2,529	7,64	3,943
262	1,957	5,13	2,128	303	2,555	7,74	4,037
263	1,965	5,17	2,147	304	2,580	7,84	4,142
264	1,974	5,21	2,167	305	2,607	7,95	4,262
265	1,983	5,26	2,187	306	2,636	8,06	4,402
266	1,992	5,30	2,208	307	2,666	8,18	4,569
267	2,001	5,34	2,230	308	2,698	8,31	4,773
268	2,010	5,39	2,253	309	2,733	8,45	5,030
269	2,019	5,43	2,278	310	2,770	8,59	5,369
270	2,029	5,48	2,304	311	2,811	8,74	5,857
271	2,039	5,53	2,331	312	2,858	8,91	6,553
272	2,049	5,58	2,360	313	2,913	9,11	7,367
273	2,060	5,63	2,390	314	2,977	9,34	8,244
274	2,070	5,68	2,422	315	3,051	9,61	9,152
275	2,081	5,73	2,455	316	3,135	9,91	10,053
276	2,092	5,78	2,490	317	3,230	10,24	10,675
277	2,104	5,83	2,526	318	3,331	10,59	10,819
278	2,115	5,88	2,564	319	3,435	10,95	10,781
279	2,128	5,94	2,603	320	3,540	11,32	10,500
280	2,140	5,99	2,643	321	3,644	11,69	9,973
281	2,153	6,05	2,685	322	3,744	12,05	9,487
282	2,166	6,11	2,728	323	3,842	12,41	9,067
283	2,179	6,17	2,773	324	3,937	12,76	8,684
284	2,193	6,23	2,819	325	4,029	13,10	8,353
285	2,208	6,29	2,867	326	4,119	13,44	8,062
286	2,223	6,35	2,916	327	4,207	13,77	7,795
287	2,238	6,41	2,967	328	4,293	14,09	7,545
288	2,253	6,48	3,019	329	4,377	14,41	7,309
289	2,269	6,54	3,073	330	4,461	14,72	7,085
290	2,285	6,61	3,128	331	4,544	15,03	6,871
291	2,302	6,68	3,184	332	4,623	15,34	6,665
292	2,320	6,75	3,242	333	4,700	15,64	6,468
293	2,338	6,83	3,301	334	4,778	15,94	6,279



TAFEL II (Fortsetzung)

$v_\tau$	$G_{43}(v_\tau) \times 100$	$F_{43}(v_\tau)$	$n_{43}(v_\tau)$	$v_\tau$	$G_{43}(v_\tau) \times 100$	$F_{43}(v_\tau)$	$n_{43}(v_\tau)$
$\text{m s}^{-1}$	$\text{kgm}^{-2} \text{s}^{-1}$	$\text{kgm}^{-1} \text{s}^{-2}$	—	$\text{m s}^{-1}$	$\text{kgm}^{-2} \text{s}^{-1}$	$\text{kgm}^{-1} \text{s}^{-2}$	—
335	4,853	16,24	6,097	376	6,747	25,37	2,507
336	4,925	16,54	5,923	377	6,773	25,54	2,475
337	4,996	16,83	5,756	378	6,799	25,71	2,444
338	5,066	17,12	5,595	379	6,825	25,87	2,415
339	5,133	17,40	5,441	380	6,851	26,04	2,387
340	5,199	17,68	5,295	382	6,899	26,36	2,336
341	5,265	17,95	5,157	384	6,947	26,68	2,290
342	5,328	18,22	5,025	386	6,994	27,00	2,249
343	5,390	18,49	4,899	388	7,039	27,31	2,212
344	5,452	18,76	4,776	390	7,083	27,62	2,179
345	5,511	19,02	4,657	392	7,125	27,93	2,149
346	5,568	19,28	4,542	394	7,165	28,23	2,122
347	5,624	19,53	4,430	396	7,205	28,53	2,097
348	5,680	19,77	4,320	398	7,245	28,83	2,073
349	5,733	20,01	4,212	400	7,284	29,12	2,051
350	5,785	20,25	4,105	420	7,630	32,03	1,874
351	5,837	20,48	3,999	440	7,928	34,86	1,767
352	5,886	20,71	3,895	460	8,187	37,65	1,689
353	5,933	20,93	3,793	480	8,421	40,42	1,634
354	5,979	21,15	3,694	500	8,635	43,20	1,601
355	6,024	21,37	3,600	520	8,834	45,98	1,572
356	6,067	21,59	3,512	540	9,025	48,77	1,558
357	6,108	21,81	3,431	560	9,208	51,58	1,546
358	6,150	22,02	3,357	580	9,386	54,43	1,535
359	6,189	22,23	3,289	600	9,554	57,30	1,524
360	6,228	22,43	3,226	620	9,720	60,22	1,523
361	6,267	22,63	3,167	640	9,883	63,22	1,527
362	6,303	22,82	3,111	660	10,044	66,29	1,533
363	6,339	23,02	3,057	680	10,206	69,41	1,539
364	6,375	23,21	3,006	700	10,371	72,58	1,546
365	6,411	23,40	2,957	720	10,533	75,79	1,553
366	6,445	23,59	2,909	740	10,693	79,08	1,560
367	6,479	23,77	2,863	760	10,853	82,46	1,568
368	6,511	23,95	2,818	780	11,016	85,93	1,577
369	6,543	24,13	2,774	800	11,185	89,49	1,586
370	6,574	24,31	2,732	820	11,347	93,10	1,596
371	6,605	24,49	2,691	840	11,512	96,75	1,605
372	6,635	24,67	2,651	860	11,679	100,45	1,614
373	6,664	24,85	2,613	880	11,845	104,23	1,624
374	6,692	25,03	2,576	900	12,013	108,1	1,635
375	6,720	25,20	2,541	920	12,182	112,1	1,646

TAFEL II (Fortsetzung)

$v_\tau$	$G_{43}(v_\tau) \times 100$	$F_{43}(v_\tau)$	$n_{43}(v_\tau)$	$v_\tau$	$G_{43}(v_\tau) \times 100$	$F_{43}(v_\tau)$	$n_{43}(v_\tau)$
m s <sup>-1</sup>	kg m <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup>	kg m <sup>-1</sup> s <sup>-2</sup>	—	m s <sup>-1</sup>	kg m <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup>	kg m <sup>-1</sup> s <sup>-2</sup>	—
940	12,356	116,1	1,658	1220	15,105	184,3	1,910
960	12,530	120,3	1,670	1240	15,334	190,1	1,927
980	12,704	124,5	1,683	1260	15,566	196,0	1,943
1000	12,882	128,9	1,697	1280	15,801	202,1	1,955
1020	13,063	133,3	1,715	1300	16,034	208,3	1,963
1040	13,250	137,9	1,734	1320	16,274	214,7	1,970
1060	13,441	142,5	1,754	1340	16,515	221,1	1,977
1080	13,631	147,3	1,773	1360	16,755	227,7	1,983
1100	13,830	152,2	1,794	1380	16,997	234,4	1,989
1120	14,030	157,2	1,814	1400	17,243	241,2	1,994
1140	14,237	162,4	1,834	1450	17,855	258,7	1,999
1160	14,447	167,6	1,854	1500	18,471	276,9	2,000
1180	14,665	173,0	1,873	1550	19,087	295,7	2,000
1200	14,882	178,6	1,892	1580	19,456	307,3	2,000

Außerhalb des in der Tafel angegebenen Bereichs gilt:

$$v_\tau \leq 100 \text{ m/s: } \begin{aligned} G_{43}(v_\tau) &= 0,00007454 \cdot v_\tau; \\ F_{43}(v_\tau) &= 0,00007454 \cdot v_\tau^2; \\ n_{43}(v_\tau) &= 2,000 = \text{const}; \end{aligned}$$

$$v_\tau \geq 1585 \text{ m/s: } \begin{aligned} G_{43}(v_\tau) &= 0,00012315 \cdot v_\tau; \\ F_{43}(v_\tau) &= 0,00012315 \cdot v_\tau^2; \\ n_{43}(v_\tau) &= 2,000 = \text{const}. \end{aligned}$$

TAFEL III

Widerstandsbeiwert  $c_w^{\circ}(M)$  (nach Šapiro, Mazing, Prudnikov [21]) und  
Widerstandsbeiwert  $c_w^{43}(M)$  für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943

M	$c_w^{\circ}(M)$	$c_w^{43}(M)$	M	$c_w^{\circ}(M)$	$c_w^{43}(M)$	M	$c_w^{\circ}(M)$	$c_w^{43}(M)$
0,00	0,1020	0,1573	1,00	0,1450	0,3252	2,40	0,1710	0,2924
0,10	0,1010	0,1573	1,02	0,1780	0,3436	2,50	0,1665	0,2877
0,20	0,1000	0,1573	1,04	0,2000	0,3572	2,60	0,1620	0,2834
0,30	0,0990	0,1573	1,06	0,2320	0,3667	2,70	0,1585	0,2795
0,40	0,0980	0,1573	1,08	0,2660	0,3735	2,80	0,1545	0,2760
0,50	0,0970	0,1573	1,10	0,2730	0,3782	2,90	0,1510	0,2729
0,60	0,0960	0,1573	1,12	0,2760	0,3811	3,00	0,1495	0,2702
0,62	0,0958	0,1573	1,14	0,2770	0,3830	3,10	0,1465	0,2679
0,64	0,0956	0,1573	1,16	0,2764	0,3840	3,20	0,1435	0,2659
0,66	0,0954	0,1573	1,18	0,2760	0,3845	3,30	0,1420	0,2642
0,68	0,0952	0,1573	1,20	0,2744	0,3843	3,40	0,1400	0,2629
0,70	0,0950	0,1573	1,22	0,2720	0,3840	3,50	0,1385	0,2620
0,72	0,0948	0,1573	1,24	0,2660	0,3831	3,60	0,1360	0,2612
0,74	0,0946	0,1573	1,26	0,2620	0,3822	3,70	0,1340	0,2608
0,76	0,0944	0,1573	1,28	0,2570	0,3811	3,80	0,1324	0,2604
0,78	0,0948	0,1580	1,30	0,2530	0,3797	3,90	0,1310	0,2602
0,80	0,0954	0,1592	1,40	0,2370	0,3711	4,00	0,1294	0,2600
0,82	0,0960	0,1611	1,50	0,2250	0,3612	4,10	0,1278	0,2600
0,84	0,0968	0,1642	1,60	0,2150	0,3512	4,20	0,1262	0,2600
0,86	0,0976	0,1685	1,70	0,2070	0,3418	4,30	0,1250	0,2600
0,88	0,0986	0,1745	1,80	0,2010	0,3326	4,40	0,1240	0,2600
0,90	0,1000	0,1829	1,90	0,1950	0,3242	4,50	0,1230	0,2600
0,92	0,1018	0,1984	2,00	0,1900	0,3165	4,60	0,1220	0,2600
0,94	0,1038	0,2356	2,10	0,1845	0,3096	4,70	0,1210	0,2600
0,96	0,1060	0,2723	2,20	0,1800	0,3032	4,80	0,1200	0,2600
0,98	0,1130	0,3019	2,30	0,1750	0,2975	4,90	0,1190	0,2600
						5,00	0,1180	0,2600

TAFEL IV

Tabellen von Otto/Lardillon (Auszug)

$2k x_e$	$\frac{k v_0^2}{g_0}$	$\frac{v_0^2}{2g_0 x_e}$	$ \vartheta_e $	$\frac{v_e}{v_0}$	$t_e \sqrt{\frac{g_0}{x_e}}$	$\frac{y_E}{x_e}$
$\vartheta_0 = 55^\circ$						
0,10	0,056	0,560	56° 04'	0,963	1,703	0,364
0,15	0,086	0,573	56° 36'	0,945	1,711	0,368
0,20	0,117	0,585	57° 07'	0,928	1,720	0,372
0,25	0,149	0,596	57° 38'	0,911	1,728	0,375
0,30	0,183	0,610	58° 09'	0,894	1,737	0,379
0,35	0,219	0,626	58° 40'	0,878	1,746	0,383
0,40	0,257	0,642	59° 11'	0,861	1,754	0,387
0,45	0,296	0,658	59° 42'	0,845	1,763	0,391
0,50	0,337	0,674	60° 12'	0,829	1,772	0,395
0,55	0,380	0,691	60° 42'	0,813	1,781	0,399
0,60	0,426	0,710	61° 12'	0,798	1,791	0,403
0,65	0,474	0,729	61° 42'	0,783	1,800	0,407
0,70	0,524	0,749	62° 12'	0,768	1,809	0,410
0,75	0,577	0,769	62° 42'	0,753	1,817	0,414
0,80	0,632	0,790	63° 11'	0,739	1,826	0,418
0,85	0,690	0,812	63° 41'	0,725	1,835	0,422
0,90	0,752	0,836	64° 10'	0,710	1,845	0,427
0,95	0,817	0,860	64° 39'	0,696	1,854	0,431
1,00	0,886	0,886	65° 08'	0,682	1,864	0,436
$\vartheta_0 = 60^\circ$						
0,10	0,060	0,608	61° 03'	0,962	1,880	0,442
0,15	0,093	0,624	61° 32'	0,945	1,890	0,447
0,20	0,128	0,640	62° 03'	0,927	1,900	0,452
0,25	0,164	0,656	62° 32'	0,909	1,910	0,456
0,30	0,202	0,673	63° 03'	0,891	1,920	0,461
0,35	0,242	0,691	63° 32'	0,874	1,930	0,466
0,40	0,284	0,710	64° 03'	0,857	1,940	0,471
0,45	0,328	0,730	64° 31'	0,841	1,950	0,476
0,50	0,375	0,750	65° 01'	0,824	1,961	0,481
0,55	0,424	0,771	65° 30'	0,808	1,971	0,487
0,60	0,476	0,793	66° 00'	0,791	1,981	0,492
0,65	0,531	0,817	66° 28'	0,776	1,992	0,498
0,70	0,589	0,841	66° 57'	0,761	2,002	0,504
0,75	0,650	0,867	67° 25'	0,746	2,012	0,509
0,80	0,715	0,894	67° 53'	0,730	2,023	0,514
0,85	0,784	0,922	68° 21'	0,715	2,034	0,519
0,90	0,858	0,953	68° 49'	0,700	2,046	0,525
0,95	0,937	0,986	69° 17'	0,685	2,058	0,531
1,00	1,020	1,022	69° 44'	0,670	2,069	0,536

TAFEL IV (Fortsetzung)

$2k x_e$	$\frac{k v_0^2}{g_0}$	$\frac{v_0^2}{2g_0 x_e}$	$ \vartheta_e $	$\frac{v_e}{v_0}$	$t_e \sqrt{\frac{g_0}{x_e}}$	$\frac{y_e}{x_e}$
$\vartheta_0 = 65^\circ$						
0,10	0,069	0,689	66° 00'	0,961	2,093	0,548
0,15	0,106	0,709	66° 28'	0,942	2,104	0,555
0,20	0,146	0,730	66° 57'	0,922	2,116	0,561
0,25	0,188	0,752	67° 26'	0,903	2,128	0,568
0,30	0,233	0,775	67° 55'	0,884	2,140	0,574
0,35	0,280	0,799	68° 23'	0,866	2,153	0,581
0,40	0,329	0,824	68° 51'	0,848	2,165	0,587
0,45	0,382	0,850	69° 18'	0,830	2,178	0,594
0,50	0,439	0,878	69° 46'	0,812	2,191	0,602
0,55	0,500	0,908	70° 14'	0,795	2,205	0,609
0,60	0,564	0,940	70° 41'	0,777	2,218	0,616
0,65	0,632	0,973	71° 08'	0,759	2,232	0,624
0,70	0,705	1,007	71° 34'	0,742	2,245	0,631
0,75	0,782	1,043	72° 01'	0,725	2,259	0,639
0,80	0,865	1,081	72° 27'	0,708	2,272	0,647
0,85	0,954	1,122	72° 54'	0,691	2,286	0,655
0,90	1,048	1,165	73° 20'	0,675	2,300	0,664
0,95	1,149	1,210	73° 46'	0,659	2,314	0,672
1,00	1,259	1,258	74° 12'	0,643	2,328	0,680
$\vartheta_0 = 70^\circ$						
0,10	0,083	0,833	70° 56'	0,956	2,375	0,705
0,15	0,129	0,862	71° 23'	0,934	2,390	0,714
0,20	0,178	0,891	71° 50'	0,912	2,405	0,723
0,25	0,230	0,921	72° 16'	0,891	2,421	0,732
0,30	0,286	0,954	72° 43'	0,870	2,437	0,742
0,35	0,346	0,989	73° 10'	0,849	2,452	0,752
0,40	0,411	1,027	73° 36'	0,829	2,468	0,762
0,45	0,480	1,067	74° 02'	0,808	2,485	0,772
0,50	0,555	1,110	74° 27'	0,788	2,501	0,783
0,55	0,636	1,156	74° 53'	0,767	2,518	0,794
0,60	0,723	1,205	75° 18'	0,748	2,536	0,804
0,65	0,817	1,257	75° 44'	0,727	2,554	0,815
0,70	0,920	1,314	76° 09'	0,707	2,573	0,827
0,75	1,031	1,375	76° 34'	0,688	2,591	0,839
0,80	1,151	1,439	76° 58'	0,668	2,609	0,851
0,85	1,281	1,507	77° 22'	0,649	2,628	0,863
0,90	1,423	1,581	77° 45'	0,629	2,646	0,876
0,95	1,578	1,661	78° 09'	0,609	2,665	0,889
1,00	1,747	1,747	78° 33'	0,590	2,685	0,902

## Primäre Siacci-Funktionen für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 (Auszug)

$D(U)$	$J(U)$	$A(U)$	$T(U)$	$U$	$D(U)$	$J(U)$	$A(U)$	$T(U)$	$U$
8000	0,125504	341,925	6,86762	719,6	10500	0,268961	811,207	11,1148	482,1
8010	0,125884	343,182	6,88153	718,5	10510	0,269807	813,901	11,1355	481,2
8020	0,126265	344,443	6,89545	717,5	10520	0,270656	816,604	11,1563	480,4
8030	0,126647	345,708	6,90940	716,4	10530	0,271508	819,315	11,1771	479,6
8040	0,127030	346,976	6,92337	715,4	10540	0,272362	822,034	11,1980	478,7
8050	0,127413	348,248	6,93736	714,3	10550	0,273219	824,762	11,2189	477,9
8060	0,127798	349,524	6,95137	713,3	10560	0,274079	827,499	11,2399	477,0
8070	0,128184	350,804	6,96540	712,2	10570	0,274942	830,244	11,2608	476,2
8080	0,128571	352,088	6,97945	711,2	10580	0,275809	832,998	11,2818	475,4
8090	0,128960	353,376	6,99352	710,1	10590	0,276679	835,760	11,3029	474,5
8100	0,129350	354,667	7,00762	709,1	10600	0,277552	838,531	11,3240	473,7
8110	0,129741	355,962	7,02173	708,0	10610	0,278428	841,311	11,3451	472,8
8120	0,130133	357,261	7,03586	707,0	10620	0,279307	844,099	11,3663	472,0
8130	0,130526	358,564	7,05002	706,0	10630	0,280189	846,896	11,3875	471,2
8140	0,130920	359,871	7,06420	704,9	10640	0,281074	849,702	11,4088	470,4
8150	0,131316	361,183	7,07840	703,9	10650	0,281962	852,517	11,4300	469,5
8160	0,131713	362,498	7,09262	702,8	10660	0,282853	855,340	11,4513	468,7
8170	0,132111	363,817	7,10686	701,8	10670	0,283748	858,172	11,4727	467,9
8180	0,132510	365,140	7,12112	700,8	10680	0,284646	861,013	11,4941	467,0
8190	0,132910	366,467	7,13540	699,7	10690	0,285547	863,864	11,5155	466,2
8200	0,133311	367,798	7,14970	698,7	10700	0,286451	866,724	11,5370	465,4
8210	0,133713	369,133	7,16402	697,6	10710	0,287358	869,593	11,5585	464,6
8220	0,134117	370,472	7,17836	696,6	10720	0,288269	872,471	11,5800	463,7
8230	0,134522	371,815	7,19273	695,6	10730	0,289183	875,358	11,6016	462,9
8240	0,134928	373,162	7,20712	694,6	10740	0,290100	878,253	11,6232	462,1
8250	0,135335	374,514	7,22153	693,5	10750	0,291020	881,157	11,6449	461,3

TAFEL VI

Sekundäre Siacci-Funktionen für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943  
(Auszug)

TAFEL VIa: Sekundäre Siacci-Funktion  $f_0(x'_c, U_0) = c' \sin 2\theta_0$

$x'_c \backslash U_0$	800	780	760	740	720	700	680
500	0,00803	0,00846	0,00892	0,00941	0,00994	0,01053	0,01117
600	0,00973	0,01024	0,01080	0,01141	0,01206	0,01277	0,01355
700	0,01147	0,01206	0,01272	0,01345	0,01422	0,01506	0,01598
800	0,01324	0,01392	0,01469	0,01553	0,01642	0,01739	0,01846
900	0,01504	0,01582	0,01670	0,01765	0,01867	0,01977	0,02098
1000	0,01688	0,01777	0,01875	0,01981	0,02096	0,02220	0,02355
1100	0,01876	0,01976	0,02085	0,02202	0,02330	0,02468	0,02618
1200	0,02067	0,02179	0,02299	0,02428	0,02569	0,02722	0,02888
1300	0,02262	0,02386	0,02517	0,02659	0,02813	0,02982	0,03165
1400	0,02462	0,02597	0,02740	0,02894	0,03062	0,03247	0,03448
1500	0,02666	0,02812	0,02967	0,03134	0,03317	0,03518	0,03737
1600	0,02874	0,03032	0,03199	0,03379	0,03578	0,03795	0,04033
1700	0,03087	0,03256	0,03436	0,03630	0,03845	0,04078	0,04335
1800	0,03304	0,03485	0,03678	0,03887	0,04118	0,04368	0,04644
1900	0,03526	0,03719	0,03926	0,04150	0,04397	0,04665	0,04960
2000	0,03752	0,03958	0,04179	0,04419	0,04682	0,04969	0,05283
2100	0,03983	0,04203	0,04438	0,04695	0,04974	0,05280	0,05614
2200	0,04219	0,04453	0,04703	0,04977	0,05273	0,05598	0,05953
2300	0,04460	0,04709	0,04974	0,05265	0,05579	0,05924	0,06301
2400	0,04707	0,04970	0,05251	0,05559	0,05893	0,06258	0,06657
2500	0,04960	0,05237	0,05535	0,05860	0,06214	0,06600	0,7022
2600	0,05219	0,05510	0,05826	0,06168	0,06543	0,06950	0,07396
2700	0,05485	0,05790	0,06124	0,06484	0,06880	0,07309	0,07780
2800	0,05755	0,06077	0,06429	0,06808	0,07225	0,07677	0,08174
2900	0,06033	0,06371	0,06741	0,07140	0,07578	0,08054	0,08578
3000	0,06316	0,06672	0,07060	0,07481	0,07939	0,08441	0,08991
3250	0,07054	0,07457	0,07894	0,08367	0,08883	0,09451	0,10075
3500	0,07839	0,08293	0,08781	0,09309	0,09889	0,10528	0,1123
3750	0,08674	0,09178	0,09724	0,10315	0,10964	0,1168	0,1245
4000	0,09561	0,10119	0,10727	0,1139	0,1211	0,1290	0,1376
4250	0,10506	0,1112	0,11795	0,1253	0,1333	0,1421	0,1516
4500	0,1152	0,1220	0,1294	0,1375	0,1464	0,1561	0,1666
4750	0,1260	0,1335	0,1417	0,1506	0,1604	0,1710	0,1825
5000	0,1375	0,1458	0,1548	0,1646	0,1753	0,1868	0,1993
5250	0,1498	0,1589	0,1687	0,1794	0,1910	0,2035	0,2170
5500	0,1630	0,1729	0,1835	0,1951	0,2076	0,2210	0,2355
5750	0,1770	0,1877	0,1992	0,2117	0,2251	0,2394	0,2549
6000	0,1919	0,2034	0,2158	0,2291	0,2434	0,2587	0,2751

TAFEL VIb: *Sekundäre Siacci-Funktion*

$$f_1(x'_e, U_0) = \frac{v_0^2 \sin 2\vartheta_0}{x_e - x_0}$$

$U_0$ $x'_e$	800	775	750	725	700	675
0	9,81	9,81	9,81	9,81	9,81	9,81
250	10,04	10,04	10,05	10,05	10,06	10,07
500	10,29	10,29	10,30	10,31	10,32	10,33
750	10,55	10,55	10,56	10,58	10,59	10,61
1000	10,81	10,82	10,84	10,86	10,88	10,90
1250	11,09	11,10	11,13	11,15	11,18	11,21
1500	11,38	11,40	11,43	11,46	11,50	11,53
1750	11,69	11,71	11,75	11,79	11,83	11,87
2000	12,01	12,04	12,08	12,13	12,18	12,23
2250	12,35	12,39	12,43	12,49	12,55	12,61
2500	12,70	12,75	12,81	12,87	12,94	13,01
2750	13,07	13,13	13,21	13,27	13,35	13,43
3000	13,47	13,54	13,62	13,70	13,79	13,88
3250	13,89	13,97	14,06	14,15	14,26	14,36
3500	14,33	14,42	14,52	14,63	14,75	14,86
3750	14,80	14,90	15,01	15,14	15,27	15,39
4000	15,30	15,41	15,53	15,67	15,82	15,95
4250	15,83	15,95	16,09	16,24	16,40	16,54
4500	16,39	16,53	16,68	16,84	17,01	17,16
4750	16,98	17,14	17,30	17,47	17,65	17,80
5000	17,61	17,78	17,96	18,14	18,31	18,46
5250	18,27	18,46	18,65	18,83	18,99	19,13
5500	18,97	19,17	19,36	19,54	19,69	19,82
5750	19,70	19,91	20,09	20,27	20,40	20,51
6000	20,46	20,67	20,85	21,01	21,13	21,21
6250	21,25	21,45	21,62	21,76	21,86	21,91
6500	22,06	22,25	22,41	22,53	22,60	22,62
6750	22,89	23,07	23,21	23,30	23,34	23,33
7000	23,74	23,90	24,01	24,08	24,09	24,04



TAFEL VIc: *Sekundäre Siacci-Funktionen*

$$f_2(x'_e, U_0) = \frac{\tan |\vartheta'_e|}{\tan \vartheta_0}; \quad f_3(x'_e, U_0) = \frac{v_0 \sin \vartheta_0}{t_e - t_0};$$

$$f_4(x'_e, U_0) = \frac{v_0 \cos \vartheta_0}{v_e \cos \vartheta_e}; \quad f_5(x'_e, U_0) = \frac{x_g - x_0}{x_e - x_0}.$$

$x'_e \backslash U_0$	800	750	700	650	800	750	700	650
	$f_2(x'_e, U_0)$				$f_3(x'_e, U_0)$			
0	1,000	1,000	1,000	1,000	4,905	4,905	4,905	4,905
500	1,048	1,049	1,051	1,053	4,963	4,965	4,967	4,969
1000	1,101	1,103	1,107	1,111	5,027	5,031	5,035	5,040
1500	1,158	1,163	1,169	1,176	5,096	5,102	5,109	5,117
2000	1,220	1,228	1,237	1,247	5,170	5,179	5,189	5,201
2500	1,288	1,299	1,311	1,324	5,250	5,262	5,276	5,293
3000	1,363	1,377	1,392	1,407	5,337	5,353	5,372	5,394
3500	1,445	1,462	1,480	1,495	5,432	5,453	5,478	5,508
4000	1,534	1,554	1,572	1,581	5,536	5,563	5,596	5,640
4500	1,631	1,651	1,663	1,652	5,651	5,686	5,733	5,794
5000	1,733	1,747	1,739	1,701	5,781	5,829	5,894	5,968
5500	1,832	1,825	1,791	1,734	5,930	5,997	6,076	6,153
6000	1,913	1,880	1,826	1,758	6,105	6,188	6,271	6,341
6500	1,969	1,918	1,852	1,778	6,305	6,393	6,471	6,527
7000	2,008	1,945	1,872	1,795	6,519	6,604	6,670	6,708
	$f_4(x'_e, U_0)$				$f_5(x'_e, U_0)$			
0	800	750	700	650	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
500	746	697	649	601	0,5059	0,5061	0,5063	0,5065
1000	693	646	600	554	0,5119	0,5123	0,5128	0,5133
1500	642	598	554	510	0,5182	0,5188	0,5196	0,5203
2000	593	552	509	467	0,5248	0,5256	0,5266	0,5275
2500	547	507	466	427	0,5316	0,5326	0,5338	0,5350
3000	503	464	426	390	0,5386	0,5399	0,5413	0,5427
3500	461	424	389	357	0,5459	0,5474	0,5490	0,5505
4000	421	387	356	330	0,5534	0,5552	0,5568	0,5581
4500	384	354	330	312	0,5611	0,5631	0,5644	0,5648
5000	352	329	312	299	0,5690	0,5707	0,5713	0,5700
5500	327	311	299	287	0,5768	0,5776	0,5768	0,5733
6000	310	298	287	276	0,5837	0,5832	0,5804	0,5748
6500	297	287	276	266	0,5892	0,5871	0,5822	0,5749
7000	286	276	266	256	0,5931	0,5892	0,5826	0,5742

TAFEL VIC: Sekundäre Siacci-Funktionen

$$f_6(x'_e, U_0) = \frac{y_g - y_0}{x_e - x_0} \cot \vartheta_0; \quad f_{v_0}(x_e, U_0) = \frac{\partial x_e}{\partial v_0} \cdot \frac{v_0}{x_e}.$$

$x'_e \backslash U_0$	800	750	700	650	800	750	700	650
	$f_6(x'_e, U_0)$				$f_{v_0}(x'_e, U_0)$			
0	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	2,000	2,000	2,000	2,000
500	0,2560	0,2562	0,2564	0,2566	1,926	1,925	1,924	1,923
1000	0,2623	0,2627	0,2631	0,2635	1,853	1,852	1,850	1,847
1500	0,2688	0,2694	0,2701	0,2708	1,783	1,781	1,778	1,772
2000	0,2757	0,2765	0,2776	0,2786	1,716	1,712	1,707	1,698
2500	0,2830	0,2840	0,2854	0,2867	1,651	1,644	1,637	1,624
3000	0,2906	0,2920	0,2936	0,2953	1,586	1,577	1,567	1,550
3500	0,2987	0,3005	0,3023	0,3043	1,522	1,511	1,497	1,476
4000	0,3073	0,3095	0,3115	0,3135	1,459	1,445	1,428	1,403
4500	0,3163	0,3187	0,3209	0,3225	1,396	1,380	1,360	1,332
5000	0,3258	0,3282	0,3301	0,3307	1,335	1,317	1,293	1,262
5500	0,3356	0,3374	0,3386	0,3377	1,275	1,255	1,229	1,196
6000	0,3451	0,3461	0,3460	0,3435	1,217	1,196	1,169	1,134
6500	0,3539	0,3540	0,3523	0,3482	1,163	1,140	1,113	1,077
7000	0,3617	0,3606	0,3574	0,3520	1,112	1,088	1,060	1,025

TAFEL VII

*Korrekturfunktion  $\Phi_2(z)$  zur Berechnung der vertikalen Fallstrecke beim Widerstandsansatz von Siacci (nach [37])*

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{1-z} + \left( \frac{z}{1-z} \right)^2 \ln z$$

$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$
1,00	1,0000	0,83	0,9407	0,66	0,8755
0,99	0,9967	0,82	0,9371	0,65	0,8714
0,98	0,9933	0,81	0,9334	0,64	0,8673
0,97	0,9899	0,80	0,9297	0,63	0,8632
0,96	0,9865	0,79	0,9260	0,62	0,8590
0,95	0,9831	0,78	0,9222	0,61	0,8548
0,94	0,9797	0,77	0,9185	0,60	0,8506
0,93	0,9762	0,76	0,9147	0,59	0,8464
0,92	0,9728	0,75	0,9109	0,58	0,8421
0,91	0,9693	0,74	0,9070	0,57	0,8379
0,90	0,9658	0,73	0,9032	0,56	0,8335
0,89	0,9623	0,72	0,8993	0,55	0,8292
0,88	0,9587	0,71	0,8954	0,54	0,8248
0,87	0,9552	0,70	0,8914	0,53	0,8203
0,86	0,9516	0,69	0,8875	0,52	0,8159
0,85	0,9480	0,68	0,8835	0,51	0,8114
0,84	0,9444	0,67	0,8795	0,50	0,8069

## TAFEL VIII

Korrekturfunktionen  $F_i(z)$  für die Bahnelemente nach dem Verfahren von Piton-Bressant und Hélie

Z	$F_1(Z)$	$F_2(Z)$	$F_3(Z)$	$F_4(Z)$	$F_5(Z)$	$F_6(Z)$	$F_7(Z)$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,05	1,0476	0,9325	0,9873	0,9635	0,9752	0,9641	0,9815
1,10	1,0909	0,9771	0,9742	0,9288	0,9509	0,9312	0,9636
1,15	1,1304	0,8305	0,9611	0,8961	0,9271	0,9010	0,9462
1,20	1,1667	0,7906	0,9480	0,8652	0,9041	0,8732	0,9295
1,25	1,2000	0,7559	0,9351	0,8361	0,8818	0,8476	0,9134
1,30	1,2308	0,7255	0,9225	0,8087	0,8603	0,8239	0,8979
1,35	1,2593	0,6984	0,9101	0,7828	0,8395	0,8020	0,8830
1,40	1,2857	0,6742	0,8981	0,7584	0,8195	0,7816	0,8687
1,45	1,3103	0,6523	0,8863	0,7354	0,8002	0,7626	0,8550
1,50	1,3333	0,6325	0,8749	0,7136	0,7817	0,7448	0,8418
1,55	1,3548	0,6143	0,8638	0,6930	0,7639	0,7281	0,8291
1,60	1,3750	0,5976	0,8531	0,6735	0,7468	0,7125	0,8169
1,65	1,3939	0,5822	0,8426	0,6550	0,7303	0,6978	0,8052
1,70	1,4118	0,5680	0,8325	0,6374	0,7144	0,6839	0,7939
1,75	1,4286	0,5547	0,8227	0,6207	0,6992	0,6709	0,7830
1,80	1,4444	0,5423	0,8132	0,6049	0,6845	0,6585	0,7725
1,85	1,4595	0,5307	0,8039	0,5898	0,6704	0,6467	0,7624
1,90	1,4737	0,5199	0,7949	0,5754	0,6568	0,6355	0,7526
1,95	1,4872	0,5097	0,7862	0,5617	0,6437	0,6249	0,7432
2,00	1,5000	0,5000	0,7778	0,5486	0,6311	0,6148	0,7341
2,05	1,5122	0,4909	0,7696	0,5361	0,6190	0,6051	0,7253
2,10	1,5238	0,4822	0,7616	0,5241	0,6073	0,5959	0,7168
2,15	1,5349	0,4741	0,7538	0,5127	0,5959	0,5871	0,7086
2,20	1,5455	0,4663	0,7463	0,5017	0,5850	0,5786	0,7006
2,25	1,5556	0,4588	0,7390	0,4912	0,5745	0,5705	0,6929
2,30	1,5652	0,4518	0,7318	0,4811	0,5643	0,5628	0,6854
2,35	1,5745	0,4450	0,7249	0,4714	0,5544	0,5553	0,6781
2,40	1,5833	0,4385	0,7181	0,4620	0,5449	0,5481	0,6710
2,45	1,5918	0,4323	0,7115	0,4531	0,5357	0,5412	0,6642
2,50	1,6000	0,4264	0,7051	0,4444	0,5268	0,5345	0,6575
2,55	1,6078	0,4207	0,6989	0,4361	0,5181	0,5281	0,6511
2,60	1,6154	0,4152	0,6928	0,4281	0,5097	0,5219	0,6448
2,65	1,6226	0,4100	0,6868	0,4204	0,5016	0,5159	0,6387
2,70	1,6296	0,4049	0,6810	0,4130	0,4938	0,5101	0,6327
2,75	1,6364	0,4000	0,6753	0,4058	0,4861	0,5045	0,6269
2,80	1,6429	0,3953	0,6698	0,3988	0,4787	0,4991	0,6213
2,85	1,6491	0,3907	0,6644	0,3921	0,4715	0,4938	0,6157
2,90	1,6552	0,3863	0,6591	0,3856	0,4646	0,4887	0,6104
2,95	1,6610	0,3821	0,6539	0,3793	0,4578	0,4838	0,6051
3,00	1,6667	0,3780	0,6489	0,3732	0,4512	0,4790	0,6000

TAFEL VIII (Fortsetzung)

Z	$F_1(Z)$	$F_2(Z)$	$F_3(Z)$	$F_4(Z)$	$F_5(Z)$	$F_6(Z)$	$F_7(Z)$
3,05	1,6721	0,3740	0,6440	0,3673	0,4448	0,4743	0,5951
3,10	1,6774	0,3701	0,6391	0,3616	0,4386	0,4698	0,5902
3,15	1,6825	0,3664	0,6344	0,3561	0,4325	0,4654	0,5854
3,20	1,6875	0,3627	0,6298	0,3507	0,4266	0,4611	0,5808
3,25	1,6923	0,3592	0,6253	0,3455	0,4208	0,4569	0,5763
3,30	1,6970	0,3558	0,6208	0,3404	0,4152	0,4529	0,5718
3,35	1,7015	0,3525	0,6165	0,3355	0,4098	0,4489	0,5675
3,40	1,7059	0,3492	0,6122	0,3307	0,4045	0,4451	0,5632
3,45	1,7101	0,3461	0,6081	0,3261	0,3993	0,4413	0,5591
3,50	1,7143	0,3430	0,6040	0,3215	0,3943	0,4377	0,5550
3,55	1,7183	0,3400	0,6000	0,3171	0,3893	0,4341	0,5510
3,60	1,7222	0,3371	0,5960	0,3129	0,3845	0,4306	0,5471
3,65	1,7260	0,3343	0,5922	0,3087	0,3798	0,4272	0,5433
3,70	1,7297	0,3315	0,5884	0,3046	0,3753	0,4239	0,5396
3,75	1,7333	0,3288	0,5847	0,3007	0,3708	0,4207	0,5359
3,80	1,7368	0,3262	0,5810	0,2968	0,3664	0,4175	0,5323
3,85	1,7403	0,3236	0,5775	0,2931	0,3622	0,4144	0,5288
3,90	1,7436	0,3211	0,5739	0,2894	0,3580	0,4113	0,5253
3,95	1,7468	0,3186	0,5705	0,2859	0,3539	0,4084	0,5219
4,00	1,7500	0,3162	0,5671	0,2824	0,3499	0,4055	0,5186
4,05	1,7531	0,3139	0,5638	0,2790	0,3460	0,4026	0,5153
4,10	1,7561	0,3116	0,5605	0,2757	0,3422	0,3998	0,5121
4,15	1,7590	0,3093	0,5573	0,2724	0,3385	0,3971	0,5090
4,20	1,7619	0,3072	0,5541	0,2693	0,3348	0,3944	0,5059
4,25	1,7647	0,3050	0,5510	0,2662	0,3313	0,3918	0,5028
4,30	1,7674	0,3029	0,5479	0,2631	0,3278	0,3892	0,4998
4,35	1,7701	0,3008	0,5449	0,2602	0,3243	0,3867	0,4969
4,40	1,7727	0,2988	0,5419	0,2573	0,3210	0,3842	0,4940
4,45	1,7753	0,2968	0,5390	0,2545	0,3177	0,3818	0,4912
4,50	1,7778	0,2949	0,5361	0,2517	0,3145	0,3794	0,4884
4,55	1,7802	0,2930	0,5333	0,2490	0,3113	0,3771	0,4856
4,60	1,7826	0,2911	0,5305	0,2463	0,3082	0,3748	0,4829
4,65	1,7850	0,2893	0,5278	0,2437	0,3052	0,3725	0,4803
4,70	1,7872	0,2875	0,5251	0,2412	0,3022	0,3703	0,4777
4,75	1,7895	0,2857	0,5224	0,2387	0,2993	0,3682	0,4751
4,80	1,7917	0,2840	0,5198	0,2363	0,2964	0,3660	0,4726
4,85	1,7938	0,2823	0,5172	0,2339	0,2936	0,3639	0,4701
4,90	1,7959	0,2806	0,5147	0,2316	0,2909	0,3619	0,4676
4,95	1,7980	0,2790	0,5122	0,2293	0,2882	0,3598	0,4652
5,00	1,8000	0,2774	0,5097	0,2270	0,2855	0,3578	0,4628
6,00	1,8333	0,2500	0,4667	0,1898	0,2410	0,3238	0,4217
7,00	1,8571	0,2294	0,4329	0,1630	0,2085	0,2979	0,3898
8,00	1,8750	0,2132	0,4055	0,1429	0,1837	0,2774	0,3641
9,00	1,8889	0,2000	0,3827	0,1271	0,1641	0,2606	0,3428
10,00	1,9000	0,1890	0,3634	0,1145	0,1483	0,2465	0,3248

TAFEL IX

*Außenballistisches Tafelwerk für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 – Teil 1: Bahnelemente im Auftreff- und Gipfelpunkt (Auszug)*

TAFEL IXa: *Horizontalschußweiten  $x_e$  (in m)*

$v_0$ $c_{43}$	700	750	800	850	900	950	1000
$\vartheta_0 = 25^\circ$							
0,30	19696	21655	23672	25739	27851	30007	32208
0,32	19118	20973	22880	24831	26822	28851	30918
0,34	18587	20346	22150	23994	25873	27786	29731
0,36	18097	19767	21478	23222	24998	26804	28638
0,38	17645	19234	20858	22510	24192	25899	27631
0,40	17226	18741	20285	21855	23449	25066	26703
0,45	16301	17657	19031	20422	21828	23249	24684
0,50	15514	16743	17982	19230	20486	21749	23019
$\vartheta_0 = 30^\circ$							
0,30	21427	23554	25772	28082	30483	32975	35556
0,32	20780	22782	24868	27037	29289	31622	34037
0,34	20189	22078	24041	26080	28194	30381	32642
0,36	19648	21432	23283	25203	27189	29242	31361
0,38	19150	20840	22588	24398	26267	28197	30185
0,40	18689	20295	21950	23658	25421	27237	29105
0,45	17674	19103	20565	22063	23597	25168	26775
0,50	16813	18106	19420	20754	22108	23483	24881
$\vartheta_0 = 35^\circ$							
0,30	22804	25068	27462	30011	32718	35583	38608
0,32	22109	24224	26461	28843	31369	34041	36858
0,34	21474	23455	25549	27777	30137	32630	35256
0,36	20891	22754	24719	26805	29012	31340	33789
0,38	20354	22115	23963	25918	27985	30160	32445
0,40	19858	21530	23273	25111	27047	29081	31214
0,45	18766	20256	21788	23378	25036	26766	28570
0,50	17836	19190	20566	21973	23417	24907	26444

TAFEL IXa (Fortsetzung)

$c_{43} \backslash v_0$	700	750	800	850	900	950	1000
$\vartheta_0 = 40^\circ$							
0,30	23 780	26 150	28 709	31 504	34 536	37 804	41 311
0,32	23 059	25 264	27 638	30 233	33 048	36 085	39 345
0,34	22 397	24 459	26 666	29 077	31 691	34 511	37 540
0,36	21 788	23 725	25 784	28 028	30 457	33 073	35 886
0,38	21 225	23 054	24 984	27 077	29 335	31 762	34 373
0,40	20 702	22 440	24 256	26 213	28 313	30 567	32 990
0,45	19 543	21 094	22 694	24 369	26 138	28 019	30 031
0,50	18 547	19 964	21 403	22 877	24 402	25 997	27 680
$\vartheta_0 = 45^\circ$							
0,30	24 276	26 749	29 455	32 477	35 827	39 495	43 475
0,32	23 542	25 839	28 343	31 133	34 232	37 638	41 344
0,34	22 868	25 012	27 336	29 912	32 775	35 932	39 376
0,36	22 246	24 260	26 424	28 804	31 447	34 368	37 563
0,38	21 669	23 573	25 596	27 800	30 239	32 938	35 897
0,40	21 132	22 941	24 841	26 890	29 142	31 633	34 371
0,45	19 928	21 550	23 213	24 955	26 826	28 864	31 118
0,50	18 880	20 354	21 854	23 389	24 994	26 707	28 555

TAFEL IXb: Flugzeiten  $t_e$  (in s)

$c_{43} \backslash v_0$	700	750	800	850	900	950	1000
$\vartheta_0 = 30^\circ$							
0,30	57,03	60,32	63,56	66,75	69,90	72,99	76,00
0,32	56,28	59,49	62,66	65,78	68,88	71,90	74,86
0,34	55,55	58,68	61,78	64,83	67,88	70,84	73,75
0,36	54,84	57,89	60,92	63,91	66,90	69,80	72,65
0,38	54,16	57,13	60,09	63,02	65,94	68,78	71,57
0,40	53,50	56,40	59,29	62,16	64,99	67,78	70,50
0,45	51,96	54,65	57,37	60,06	62,72	65,34	67,90
0,50	50,60	53,11	55,62	58,12	60,60	63,04	65,44
$\vartheta_0 = 35^\circ$							
0,30	64,55	68,31	72,02	75,70	79,34	82,95	86,51
0,32	63,68	67,35	70,98	74,57	78,13	81,67	85,14
0,34	62,84	66,42	69,96	73,47	76,96	80,42	83,81
0,36	62,03	65,51	68,97	72,40	75,82	79,20	82,52
0,38	61,24	64,63	68,01	71,36	74,71	78,01	81,26
0,40	60,48	63,78	67,07	70,36	73,62	76,85	80,03
0,45	58,73	61,76	64,83	67,92	71,01	74,05	77,05
0,50	57,19	59,99	62,82	65,68	68,55	71,40	74,22
$\vartheta_0 = 40^\circ$							
0,30	71,73	75,96	80,18	84,37	88,51	92,60	96,65
0,32	70,75	74,87	79,00	83,10	87,14	91,14	95,10
0,34	69,81	73,82	77,85	81,86	85,81	89,72	93,60
0,36	68,91	72,81	76,73	80,65	84,51	88,34	92,14
0,38	68,05	71,84	75,65	79,47	83,25	86,99	90,71
0,40	67,23	70,91	74,61	78,32	82,02	85,68	89,31
0,45	65,30	68,69	72,11	75,59	79,07	82,53	85,98
0,50	63,58	66,71	69,87	73,09	76,33	79,58	82,83
$\vartheta_0 = 45^\circ$							
0,30	78,60	83,27	87,97	92,65	97,28	101,88	106,47
0,32	77,54	82,08	86,67	91,24	95,76	100,25	104,73
0,34	76,52	80,93	85,41	89,87	94,29	98,67	103,05
0,36	75,54	79,83	84,19	88,54	92,86	97,14	101,42
0,38	74,60	78,78	83,01	87,25	91,47	95,66	99,83
0,40	73,71	77,77	81,87	85,99	90,12	94,22	98,29
0,45	71,60	75,33	79,14	82,99	86,87	90,76	94,62
0,50	69,70	73,15	76,66	80,25	83,88	87,54	91,20



TAFEL IXc: Auftreffgeschwindigkeiten  $v_e$  (in m/s)

$v_0$ $c_{4,3}$	700	750	800	850	900	950	1000
$\vartheta_0 = 30^\circ$							
0,30	348	354	361	368	376	384	393
0,32	343	348	353	359	366	373	381
0,34	339	343	347	352	358	364	371
0,36	335	339	342	346	351	356	362
0,38	332	335	338	341	345	349	354
0,40	329	332	335	337	340	343	347
0,45	323	326	328	330	333	335	337
0,50	318	321	324	326	328	329	330
$\vartheta_0 = 35^\circ$							
0,30	356	363	371	379	389	400	411
0,32	350	356	363	369	378	387	397
0,34	345	350	356	361	368	376	385
0,36	341	345	350	354	360	367	374
0,38	338	341	345	348	353	359	365
0,40	335	338	341	344	348	353	358
0,45	329	331	333	335	338	341	344
0,50	324	326	328	330	332	334	335
$\vartheta_0 = 40^\circ$							
0,30	365	374	383	393	405	418	432
0,32	359	367	374	383	393	404	416
0,34	354	361	367	374	382	392	402
0,36	349	355	360	366	373	381	390
0,38	345	350	354	359	365	372	379
0,40	341	345	349	353	358	364	370
0,45	335	337	340	342	345	349	352
0,50	329	331	333	335	337	339	341
$\vartheta_0 = 45^\circ$							
0,30	374	384	396	409	423	439	455
0,32	367	376	386	397	409	423	437
0,34	361	369	377	386	397	409	421
0,36	356	363	369	377	386	396	407
0,38	351	357	362	369	377	385	395
0,40	347	352	357	363	369	376	385
0,45	339	342	345	349	353	357	364
0,50	333	335	337	339	342	345	349

TAFEL IXd: *Auftreffwinkel*  $|\vartheta_e|$ 

$\begin{matrix} v_0 \\ c_{43} \end{matrix}$	700	750	800	850	900	950	1000
$\vartheta_0 = 30^\circ$							
0,30	44° 56'	46° 09'	47° 07'	47° 55'	48° 34'	49° 04'	49° 26'
0,32	45° 12'	46° 33'	47° 37'	48° 31'	49° 19'	49° 54'	50° 21'
0,34	45° 23'	46° 51'	48° 01'	49° 01'	49° 58'	50° 38'	51° 10'
0,36	45° 30'	47° 04'	48° 20'	49° 26'	50° 29'	51° 15'	51° 53'
0,38	45° 34'	47° 12'	48° 34'	49° 46'	50° 52'	51° 44'	52° 28'
0,40	45° 35'	47° 14'	48° 42'	50° 00'	51° 08'	52° 06'	52° 55'
0,45	45° 28'	47° 04'	48° 36'	50° 06'	51° 25'	52° 35'	53° 36'
0,50	45° 25'	46° 57'	48° 24'	49° 50'	51° 13'	52° 31'	53° 43'
$\vartheta_0 = 35^\circ$							
0,30	50° 06'	51° 22'	52° 19'	52° 59'	53° 24'	53° 38'	53° 43'
0,32	50° 19'	51° 46'	52° 51'	53° 38'	54° 11'	54° 31'	54° 41'
0,34	50° 28'	52° 02'	53° 16'	54° 10'	54° 51'	55° 18'	55° 34'
0,36	50° 33'	52° 11'	53° 33'	54° 35'	55° 24'	55° 58'	56° 21'
0,38	50° 34'	52° 15'	53° 43'	54° 53'	55° 49'	56° 31'	57° 02'
0,40	50° 32'	52° 14'	53° 46'	55° 04'	56° 08'	56° 58'	57° 36'
0,45	50° 26'	52° 04'	53° 36'	55° 01'	56° 19'	57° 29'	58° 30'
0,50	50° 21'	51° 51'	53° 20'	54° 48'	56° 10'	57° 31'	58° 42'
$\vartheta_0 = 40^\circ$							
0,30	54° 27'	55° 41'	56° 34'	57° 05'	57° 16'	57° 12'	56° 58'
0,32	54° 40'	56° 01'	57° 04'	57° 47'	58° 05'	58° 08'	57° 58'
0,34	54° 47'	56° 13'	57° 27'	58° 21'	58° 47'	58° 58'	58° 54'
0,36	54° 49'	56° 20'	57° 44'	58° 47'	59° 22'	59° 42'	59° 45'
0,38	54° 49'	56° 25'	57° 55'	59° 05'	59° 50'	60° 19'	60° 31'
0,40	54° 49'	56° 29'	58° 01'	59° 16'	60° 11'	60° 49'	61° 11'
0,45	54° 46'	56° 17'	57° 52'	59° 16'	60° 30'	61° 30'	62° 20'
0,50	54° 46'	56° 11'	57° 38'	59° 04'	60° 25'	61° 40'	62° 45'
$\vartheta_0 = 45^\circ$							
0,30	58° 11'	59° 18'	60° 04'	60° 25'	60° 23'	60° 04'	59° 36'
0,32	58° 23'	59° 35'	60° 32'	61° 03'	61° 10'	60° 59'	60° 36'
0,34	58° 31'	59° 47'	60° 54'	61° 34'	61° 52'	61° 49'	61° 32'
0,36	58° 36'	59° 56'	61° 11'	62° 00'	62° 29'	62° 34'	62° 24'
0,38	58° 39'	60° 03'	61° 24'	62° 22'	63° 00'	63° 14'	63° 11'
0,40	58° 42'	60° 10'	61° 33'	62° 40'	63° 25'	63° 48'	63° 52'
0,45	58° 47'	60° 10'	61° 34'	62° 48'	63° 57'	64° 47'	65° 19'
0,50	58° 51'	60° 09'	61° 28'	62° 46'	64° 00'	65° 06'	65° 57'

TAFEL IXe: Gipfelhöhe  $y_g$  (in m)

$v_0$ $c_{4,3}$	700	750	800	850	900	950	1000
$\vartheta_0 = 30^\circ$							
0,30	4065	4534	5020	5522	6038	6567	7109
0,32	3977	4430	4899	5383	5880	6388	6908
0,34	3893	4331	4784	5251	5730	6219	6718
0,36	3814	4237	4675	5125	5587	6059	6539
0,38	3739	4149	4572	5007	5452	5906	6368
0,40	3668	4066	4475	4895	5324	5762	6207
0,45	3500	3869	4247	4635	5031	5433	5841
0,50	3349	3693	4045	4405	4771	5142	5517
$\vartheta_0 = 35^\circ$							
0,30	5207	5810	6437	7087	7760	8455	9170
0,32	5089	5668	6273	6898	7544	8210	8894
0,34	4977	5534	6118	6719	7340	7979	8634
0,36	4870	5407	5971	6549	7146	7760	8388
0,38	4768	5287	5831	6388	6961	7552	8155
0,40	4670	5175	5697	6234	6786	7353	7935
0,45	4447	4913	5393	5888	6394	6912	7441
0,50	4249	4680	5124	5580	6046	6522	7006
$\vartheta_0 = 40^\circ$							
0,30	6413	7160	7942	8759	9610	10496	11415
0,32	6259	6977	7731	8514	9328	10178	11055
0,34	6114	6805	7532	8283	9062	9878	10716
0,36	5977	6643	7343	8064	8811	9594	10396
0,38	5848	6491	7163	7856	8574	9323	10092
0,40	5728	6348	6991	7658	8349	9064	9802
0,45	5445	6014	6603	7212	7841	8490	9157
0,50	5198	5721	6262	6821	7397	7989	8596
$\vartheta_0 = 45^\circ$							
0,30	7669	8571	9520	10517	11563	12659	13806
0,32	7481	8346	9255	10212	11212	12257	13352
0,34	7303	8134	9006	9924	10881	11880	12925
0,36	7135	7934	8772	9652	10568	11524	12523
0,38	6976	7745	8550	9394	10273	11189	12144
0,40	6826	7565	8339	9149	9994	10874	11784
0,45	6482	7156	7862	8597	9363	10158	10981
0,50	6182	6800	7445	8116	8812	9534	10281

TAFEL X

*Außenballistisches Tafelwerk für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 – Teil 2: Tafeln der Störungskoeffizienten für die Horizontalschußweite im Auftreffpunkt (Auszug)*

TAFEL Xa: Störungskoeffizient  $Q_{r_0}$

(Änderung der Schußweite in m bei Änderung der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  um 1 m/s)

$c_{43}$ $r_0$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,4	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
$\vartheta_0 = 25^\circ$												
700	38,4	29,9	24,5	20,8	16,0	12,9	9,3	6,5	4,3	3,2	2,5	2,0
800	40,7	31,1	24,9	20,8	15,8	12,6	9,0	6,2	4,0	3,0	2,3	1,9
900	42,7	32,1	25,2	20,7	15,5	12,2	8,6	5,8	3,8	2,8	2,2	1,7
1000	44,6	32,9	25,5	20,6	15,1	11,8	8,2	5,5	3,6	2,6	2,0	1,6
$\vartheta_0 = 30^\circ$												
700	41,6	31,7	25,7	21,9	16,7	13,4	9,5	6,6	4,3	3,1	2,5	2,0
800	45,2	33,7	26,5	22,0	16,6	13,2	9,2	6,3	4,0	2,9	2,3	1,9
900	48,9	35,7	27,3	22,2	16,5	12,9	8,8	6,0	3,8	2,7	2,1	1,7
1000	52,6	37,8	28,2	22,3	16,2	12,5	8,5	5,7	3,6	2,6	2,0	1,6
$\vartheta_0 = 35^\circ$												
700	44,2	33,1	26,8	22,9	17,5	13,9	9,7	6,6	4,2	3,1	2,4	1,9
800	49,4	35,9	27,9	23,2	17,5	13,7	9,4	6,3	4,0	2,9	2,2	1,8
900	55,6	39,5	29,4	23,6	17,5	13,5	9,1	6,0	3,8	2,7	2,1	1,7
1000	62,1	43,6	31,3	24,1	17,3	13,2	8,8	5,8	3,5	2,5	2,0	1,6
$\vartheta_0 = 40^\circ$												
700	46,2	34,4	28,0	23,9	18,0	14,3	9,8	6,6	4,1	3,0	2,3	1,9
800	53,6	37,9	29,2	24,3	18,2	14,2	9,5	6,3	3,9	2,8	2,2	1,7
900	62,8	43,4	31,3	24,9	18,4	14,1	9,3	6,1	3,7	2,6	2,0	1,6
1000	72,6	50,2	34,8	25,8	18,3	13,9	9,0	5,8	3,5	2,5	1,9	1,5
$\vartheta_0 = 45^\circ$												
700	47,6	35,6	29,1	24,7	18,4	14,5	9,8	6,5	4,0	2,9	2,2	1,8
800	57,5	39,7	30,4	25,3	18,7	14,5	9,6	6,2	3,8	2,7	2,1	1,7
900	70,1	47,4	33,0	26,2	19,1	14,5	9,4	6,0	3,6	2,5	1,9	1,5
1000	82,6	57,0	38,7	27,8	19,3	14,5	9,2	5,8	3,4	2,4	1,8	1,4

TAFEL Xb: Störungskoeffizient  $Q_c$

(Änderung der Schußweite in m bei Änderung des Ballistischen Koeffizienten  $c$  um 1%)

$v_0 \backslash c_{43}$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,4	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
$\vartheta_0 = 25^\circ$												
700	90,4	80,7	73,0	68,3	62,4	57,3	50,8	43,9	36,4	31,7	28,3	25,2
800	124	110	96,4	87,3	77,8	69,5	60,0	50,5	40,8	34,9	30,9	27,2
900	161	143	123	108	93,5	82,3	69,2	56,9	45,0	38,0	33,3	29,3
1000	202	179	152	131	109	95,8	78,4	63,0	49,1	40,9	35,6	31,3
$\vartheta_0 = 30^\circ$												
700	102	88,8	79,8	75,9	70,2	63,7	56,1	48,4	39,5	34,2	30,1	26,6
800	142	123	105	95,8	86,8	77,0	66,0	55,3	44,1	37,5	32,7	28,6
900	187	162	135	119	104	91,0	75,9	62,0	48,4	40,5	35,3	30,6
1000	238	207	171	145	121	106	85,7	68,5	52,6	43,3	37,7	32,7
$\vartheta_0 = 35^\circ$												
700	109	95,4	86,6	83,2	76,9	69,3	60,5	51,6	41,7	35,8	31,2	27,5
800	156	133	112	104	94,7	83,5	71,0	58,7	46,4	39,0	33,9	29,5
900	211	180	146	128	113	98,9	81,6	65,8	50,8	42,1	36,5	31,7
1000	274	236	190	156	132	115	92,2	72,7	55,1	45,1	38,9	33,8
$\vartheta_0 = 40^\circ$												
700	113	101	93,2	89,3	82,4	73,9	63,7	53,8	43,1	36,6	31,9	28,1
800	167	139	120	112	101	89,7	74,7	61,3	47,8	39,9	34,5	30,1
900	233	195	156	136	121	106	85,9	68,6	52,2	43,1	37,1	32,1
1000	308	266	209	166	142	124	97,4	75,8	56,5	46,1	39,4	34,1
$\vartheta_0 = 45^\circ$												
700	114	104	98,4	94,3	85,8	77,0	65,2	54,7	43,5	36,6	31,7	28,1
800	175	144	126	119	106	93,1	76,6	62,3	48,1	39,9	34,3	30,0
900	250	209	164	145	127	110	88,3	69,8	52,6	43,1	36,9	31,8
1000	332	291	227	180	149	129	101	77,3	56,9	46,0	39,3	33,6

TAFEL Xc: Störungskoeffizient  $Q_{\tau_0}$

(Änderung der Schubweite in m bei Änderung der Bodenlufttemperatur um 1 Grad)

$v_0$ \ $c_{43}$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,4	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
$\vartheta_0 = 25^\circ$												
700	21,7	23,4	24,0	24,0	23,3	22,5	20,5	18,1	15,1	13,0	11,6	10,5
800	25,6	27,2	27,7	27,6	26,5	25,1	22,5	19,6	16,1	13,8	12,2	11,0
900	29,8	31,2	31,6	31,3	29,6	27,8	24,6	21,1	17,2	14,6	12,8	11,5
1000	34,4	35,5	35,7	35,1	32,8	30,6	26,7	22,6	18,2	15,3	13,4	12,0
$\vartheta_0 = 30^\circ$												
700	23,8	26,3	27,0	26,8	25,7	24,6	22,3	19,4	16,0	13,8	12,1	10,9
800	26,7	29,4	30,5	30,4	28,8	27,2	24,3	20,9	17,0	14,5	12,7	11,4
900	29,4	32,4	34,0	34,0	31,9	29,9	26,4	22,4	18,1	15,3	13,3	11,9
1000	32,1	35,3	37,3	37,6	35,2	32,7	28,4	23,9	19,1	16,0	13,9	12,4
$\vartheta_0 = 35^\circ$												
700	25,5	28,6	29,2	28,6	27,2	25,9	23,3	20,3	16,5	14,1	12,4	11,1
800	26,7	30,9	32,6	32,3	30,2	28,6	25,4	21,8	17,6	14,9	13,0	11,6
900	26,7	32,1	35,3	35,9	33,4	31,3	27,6	23,2	18,6	15,7	13,6	12,0
1000	26,1	32,7	37,3	39,2	36,7	34,1	29,6	24,6	19,6	16,4	14,1	12,5
$\vartheta_0 = 40^\circ$												
700	26,5	29,9	30,2	29,5	28,0	26,5	23,9	20,6	16,7	14,2	12,4	11,0
800	25,1	31,5	33,7	33,1	30,8	29,1	25,9	22,1	17,7	15,0	13,0	11,5
900	21,6	30,2	35,5	36,6	33,9	31,7	27,9	23,5	18,7	15,7	13,6	12,0
1000	17,2	27,3	35,4	39,4	37,2	34,4	29,9	24,9	19,7	16,4	14,1	12,5
$\vartheta_0 = 45^\circ$												
700	26,5	29,9	30,1	29,4	28,0	26,4	23,8	20,4	16,6	14,0	12,2	10,9
800	22,3	30,8	33,4	32,9	30,7	28,9	25,7	21,9	17,5	14,7	12,8	11,4
900	15,0	27,0	34,1	35,9	33,5	31,4	27,7	23,3	18,4	15,4	13,3	11,8
1000	7,6	20,3	31,5	37,7	36,5	33,9	29,7	24,6	19,3	16,1	13,8	12,2

TAFEL Xd: Störungskoeffizient  $Q_{Wx}$

(Änderung der Schußweite in m bei Änderung der Geschwindigkeit  $W_x$  des Längswindes um 1 m/s)

$c_{43}$ $v_0$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,4	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
$\vartheta_0 = 25^\circ$												
700	27,4	30,2	31,6	32,1	32,2	31,9	30,8	29,2	27,0	25,2	24,1	22,9
800	31,7	34,1	35,3	35,6	35,1	34,4	32,8	30,8	28,2	26,2	25,0	23,6
900	36,5	38,5	39,2	39,2	38,0	37,0	34,8	32,4	29,4	27,2	25,7	24,4
1000	41,7	43,2	43,2	42,7	41,0	39,5	36,8	33,9	30,5	28,2	26,4	25,1
$\vartheta_0 = 30^\circ$												
700	33,7	36,8	38,0	37,8	37,5	36,9	35,3	33,3	30,6	28,6	27,1	25,8
800	38,1	40,9	42,1	41,8	40,8	39,7	37,7	35,1	32,0	29,8	28,1	26,7
900	43,1	45,5	46,3	46,0	44,1	42,6	40,0	36,9	33,4	30,9	29,0	27,5
1000	48,8	50,6	50,7	50,0	47,5	45,4	42,1	38,6	34,7	31,9	29,8	28,3
$\vartheta_0 = 35^\circ$												
700	39,1	42,8	43,4	43,0	41,9	41,0	39,3	36,9	33,8	31,6	29,9	28,5
800	43,5	47,2	48,2	47,6	45,7	44,3	42,0	39,0	35,4	32,9	31,0	29,4
900	48,7	51,8	52,9	52,3	49,5	47,5	44,5	41,0	37,0	34,1	32,0	30,3
1000	54,8	57,1	57,8	56,9	53,4	50,7	46,9	42,8	38,4	35,3	33,0	31,2
$\vartheta_0 = 40^\circ$												
700	44,0	47,6	47,7	46,9	45,6	44,5	42,5	39,9	36,6	34,1	32,2	30,8
800	48,3	52,8	53,5	52,3	49,9	48,2	45,5	42,3	38,4	35,6	33,5	31,9
900	53,4	57,4	59,0	57,2	54,2	51,8	48,4	44,5	40,1	37,0	34,7	32,9
1000	59,4	62,7	64,2	63,3	58,6	55,4	51,1	46,5	41,7	38,3	35,8	33,8
$\vartheta_0 = 45^\circ$												
700	47,8	50,8	50,5	49,6	48,3	47,2	45,1	42,4	38,9	36,4	34,2	32,7
800	52,2	57,3	57,3	55,8	53,1	51,3	48,4	45,0	41,0	38,1	35,7	34,0
900	56,7	62,6	63,7	62,2	57,9	55,3	51,6	47,4	42,8	39,6	37,1	35,1
1000	62,1	67,3	69,5	68,6	62,9	59,3	54,6	49,7	44,5	41,0	38,3	36,1

TAFEL Xe: Störungskoeffizient  $Q_{Wz}$

(Seitenabweichung des Geschosses in m bei Änderung der Geschwindigkeit  $W_z$  des Seitenwindes um 1 m/s)

$c_{43}$ $v_0$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,4	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
-------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$\vartheta_0 = 25^\circ$

700	18,0	19,1	19,5	19,6	19,8	19,9	20,0	19,8	19,4	18,7	18,2	17,8
800	22,1	23,3	23,5	23,4	23,2	23,0	22,7	22,1	21,2	20,3	19,6	19,0
900	26,0	27,4	27,4	27,0	26,4	25,9	25,2	24,2	22,8	21,8	20,9	20,1
1000	29,7	31,2	31,2	30,5	29,4	28,6	27,4	26,1	24,3	23,1	22,0	21,1

$\vartheta_0 = 30^\circ$

700	21,7	22,7	22,9	23,0	23,4	23,5	23,6	23,3	22,6	21,8	21,2	20,6
800	26,4	27,6	27,6	27,4	27,2	27,0	26,6	25,8	24,7	23,6	22,7	22,0
900	30,8	32,4	32,2	31,6	30,8	30,2	29,3	28,1	26,5	25,2	24,1	23,2
1000	35,0	36,9	36,7	35,8	34,2	33,3	31,8	30,2	28,1	26,6	25,3	24,2

$\vartheta_0 = 35^\circ$

700	24,8	25,9	26,1	26,2	26,7	26,8	26,9	26,5	25,6	24,7	23,9	23,2
800	30,1	31,5	31,4	31,1	30,9	30,7	30,2	29,3	27,9	26,7	25,6	24,7
900	35,0	36,9	36,7	35,9	34,9	34,3	33,2	31,8	29,9	28,4	27,1	26,0
1000	39,4	42,0	41,9	40,7	38,7	37,6	36,0	34,1	31,7	29,9	28,4	27,2

$\vartheta_0 = 40^\circ$

700	27,4	28,6	29,0	29,2	29,6	29,9	30,0	29,5	28,4	27,4	26,5	25,6
800	33,3	35,0	34,9	34,6	34,3	34,1	33,6	32,6	30,9	29,5	28,3	27,3
900	38,4	41,0	40,9	40,0	38,7	38,0	36,8	35,3	33,1	31,3	29,9	28,7
1000	42,7	46,4	46,7	45,4	43,0	41,7	39,9	37,8	35,0	32,9	31,3	29,9

$\vartheta_0 = 45^\circ$

700	29,6	31,0	31,5	31,9	32,3	32,7	32,8	32,2	31,0	29,9	28,9	27,9
800	35,9	38,0	38,0	37,8	37,4	37,2	36,6	35,5	33,7	32,1	30,8	29,7
900	41,0	44,4	44,6	43,8	42,3	41,4	40,2	38,4	36,0	34,0	32,5	31,2
1000	45,0	49,9	50,8	49,8	47,2	45,5	43,5	41,1	38,1	35,8	34,0	32,5



TAFEL XI: Störungskoeffizient  $Q_{\theta_0}$

(Änderung der Schußweite in m bei Änderung des Abgangswinkels um 1')

$\frac{c_{43}}{v_0}$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,4	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
$\theta_0 = 25^\circ$												
700	6,4	5,4	4,8	4,4	3,6	3,0	2,3	1,7	1,1	0,81	0,62	0,50
800	7,7	6,2	5,3	4,8	3,9	3,2	2,4	1,7	1,1	0,80	0,62	0,49
900	9,4	7,2	6,0	5,2	4,2	3,4	2,5	1,7	1,1	0,80	0,61	0,48
1000	11,6	8,5	6,7	5,7	4,5	3,7	2,6	1,8	1,1	0,80	0,60	0,47
$\theta_0 = 30^\circ$												
700	5,2	4,4	3,9	3,5	2,8	2,2	1,6	1,1	0,67	0,45	0,32	0,24
800	6,3	5,0	4,3	3,8	3,0	2,4	1,7	1,1	0,67	0,44	0,30	0,23
900	8,1	6,0	4,9	4,3	3,3	2,6	1,8	1,2	0,67	0,43	0,29	0,21
1000	10,7	7,5	5,7	4,8	3,6	2,8	1,9	1,2	0,68	0,42	0,28	0,20
$\theta_0 = 35^\circ$												
700	4,0	3,4	2,9	2,5	1,9	1,4	0,96	0,57	0,27	0,12	0,05	0,00
800	4,9	3,9	3,3	2,8	2,1	1,6	1,0	0,58	0,25	0,10	0,03	-0,02
900	6,9	4,9	3,8	3,3	2,4	1,7	1,1	0,59	0,24	0,09	0,01	-0,04
1000	10,0	6,6	4,7	3,8	2,7	2,0	1,2	0,60	0,23	0,07	-0,01	-0,05

TAFEL Xf: (Fortsetzung)

$c_{43}$ / $r_0$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,4	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
$\theta_0 = 40^\circ$												
700	2,6	2,2	1,8	1,4	0,92	0,60	0,28	0,05	-0,12	-0,19	-0,21	-0,22
800	3,4	2,7	2,2	1,8	1,1	0,70	0,30	0,03	-0,15	-0,21	-0,23	-0,24
900	5,3	3,5	2,7	2,2	1,4	0,84	0,33	0,02	-0,18	-0,24	-0,26	-0,27
1000	8,3	5,3	3,5	2,7	1,6	1,0	0,40	0,02	-0,20	-0,27	-0,29	-0,29
$\theta_0 = 45^\circ$												
700	0,83	0,65	0,40	0,15	-0,11	-0,28	-0,43	-0,49	-0,51	-0,49	-0,46	-0,44
800	1,6	1,2	0,75	0,40	-0,01	-0,24	-0,45	-0,54	-0,56	-0,54	-0,50	-0,47
900	3,2	2,0	1,3	0,76	0,13	-0,16	-0,46	-0,58	-0,60	-0,58	-0,53	-0,50
1000	5,8	3,8	2,3	1,4	0,36	-0,04	-0,44	-0,61	-0,64	-0,61	-0,57	-0,52

TAFEL XI

Innenballistische Störungskoeffizienten nach Sluchockij (Auszug)

a) Innenballistischer Störungskoeffizient  $I_m$  für Geschossmasse-Änderungen

$\Delta_d$	4					6					8					10														
	0,5	0,6	0,7	0,8		0,5	0,6	0,7	0,8		0,5	0,6	0,7	0,8		0,5	0,6	0,7	0,8		0,5	0,6	0,7	0,8						
$P_{max}$																														
2000	0,28	0,18	—	—	0,32	0,26	0,19	—	—	0,34	0,29	0,21	—	—	0,36	0,40	0,36	0,31	0,26	0,21	0,36	0,31	0,26	0,21	0,16	0,36	0,31	0,26	0,21	0,16
2500	0,34	0,29	0,20	—	0,37	0,32	0,27	0,22	0,22	0,39	0,34	0,29	0,23	0,23	0,40	0,40	0,36	0,31	0,26	0,21	0,40	0,36	0,31	0,26	0,21	0,40	0,36	0,31	0,26	0,21
3000	0,38	0,33	0,28	0,22	0,40	0,36	0,32	0,27	0,27	0,42	0,38	0,34	0,29	0,29	0,43	0,43	0,39	0,35	0,30	0,26	0,43	0,39	0,35	0,30	0,26	0,43	0,39	0,35	0,30	0,26
3500	0,41	0,37	0,33	0,28	0,42	0,39	0,35	0,32	0,32	0,44	0,41	0,37	0,33	0,33	0,44	0,44	0,41	0,38	0,34	0,30	0,44	0,41	0,38	0,34	0,30	0,44	0,41	0,38	0,34	0,30
4000	0,43	0,39	0,36	0,32	0,44	0,41	0,38	0,35	0,35	0,45	0,43	0,40	0,37	0,37	0,45	0,45	0,43	0,40	0,37	0,33	0,45	0,43	0,40	0,37	0,33	0,45	0,43	0,40	0,37	0,33
4500	0,44	0,41	0,38	0,35	0,45	0,43	0,40	0,38	0,38	0,46	0,44	0,42	0,40	0,40	0,46	0,46	0,44	0,42	0,40	0,37	0,46	0,44	0,42	0,40	0,37	0,46	0,44	0,42	0,40	0,37

b) Innenballistischer Störungskoeffizient  $I_s$  für Druckimpuls-Änderungen

$\Delta_d$	4					6					8					10														
	0,5	0,6	0,7	0,8		0,5	0,6	0,7	0,8		0,5	0,6	0,7	0,8		0,5	0,6	0,7	0,8		0,5	0,6	0,7	0,8						
$P_{max}$																														
2000	0,38	0,55	—	—	0,30	0,45	0,49	—	—	0,25	0,38	0,46	—	—	0,22	0,33	0,33	0,33	0,46	—	0,22	0,33	0,33	0,46	—	0,22	0,33	0,33	0,46	—
2500	0,24	0,39	0,53	—	0,18	0,29	0,44	0,48	0,48	0,16	0,26	0,37	0,46	0,46	0,14	0,22	0,22	0,22	0,32	0,45	0,14	0,22	0,22	0,32	0,45	0,14	0,22	0,22	0,32	0,45
3000	0,17	0,28	0,41	0,50	0,12	0,21	0,32	0,46	0,46	0,10	0,17	0,27	0,39	0,39	0,09	0,15	0,15	0,15	0,23	0,34	0,09	0,15	0,15	0,23	0,34	0,09	0,15	0,15	0,23	0,34
3500	0,12	0,20	0,31	0,43	0,09	0,15	0,23	0,35	0,35	0,07	0,12	0,19	0,29	0,29	0,07	0,11	0,11	0,11	0,17	0,26	0,07	0,11	0,11	0,17	0,26	0,07	0,11	0,11	0,17	0,26
4000	0,09	0,15	0,23	0,33	0,07	0,11	0,17	0,25	0,25	0,06	0,09	0,14	0,21	0,21	0,05	0,08	0,08	0,08	0,13	0,19	0,05	0,08	0,08	0,13	0,19	0,05	0,08	0,08	0,13	0,19
4500	0,07	0,12	0,18	0,26	0,05	0,09	0,13	0,18	0,18	0,05	0,08	0,11	0,15	0,15	0,04	0,07	0,07	0,07	0,10	0,14	0,04	0,07	0,07	0,10	0,14	0,04	0,07	0,07	0,10	0,14

Maßeinheiten:  $\Delta$  in g/cm<sup>3</sup>;  $P_{max}$  in kp/cm<sup>2</sup>

## Literaturverzeichnis

- [1] *Дмитриев, М. П.*: Некоторые вопросы подготовки стрельбы зенитной артиллерии. Dissertation 1941 (zitiert nach [2]).
- [2] *Шапиро, Я. М.*: Внешняя баллистика, Москва 1946.
- [3] *Лернер, Ф. Ф.*: Теоретический курс стрельбы по воздушному флоту. Петроград 1921 (zitiert nach [6]).
- [4] *Вентцель, Д. А.*; *Шапиро, Я. М.*: Внешняя баллистика. Москва/Ленинград 1939.
- [5] *Hauck, G.*: Rasananzmaße für Flugbahnen. *Wiss. Z. Hochschule für Verkehrswesen Dresden* 18 (1971) H.2, S.403 bis 416.
- [6] Таблицы Внешней баллистики. *Часть первая*: Основные элементы траектории. *Часть вторая*: Поправочные коэффициенты. Москва 1949.
- [7] *Хрговиц, А. Х.*: Физика атмосферы. Ленинград 1969.
- [8] *Faust, H.*: Der Aufbau der Erdatmosphäre. (Reihe: Die Wissenschaft, Bd. 127) Braunschweig 1968.
- [9] *Fleagle, R. G.*; *Businger, J. A.*: An introduction to atmospheric physics. New York/London 1963. [Russ. Übersetzung: *Флигель, Р.*; *Бузингер, Дж.*: Введение в физику атмосферы. Москва 1965.]
- [10] *Brusz, H.-D.*; *Sählbrandt, D.*: Erdatmosphäre. (Meyers Taschenlexikon) Leipzig 1965.
- [11] *Глаголев, Ю. А.*: Справочник по физическим параметрам атмосферы. Ленинград 1970.
- [12] *Bonney, E. A.*: Aerodynamics. [Russ. Übersetzung: *Бонни, Э. А.*: Аэродинамика. Москва 1960.]
- [13] *Остославский, И. В.*; *Стражева, И. В.*: Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. Изд. 2-е, перераб. и допол. Москва 1963.
- [14] *Moulton, F. R.*: Methods in exterior ballistics. New York 1962.
- [15] *Miele, A.*: Flight mechanics. Vol.1: Theory of flight paths. Reading etc. 1962. [Russ. Übersetzung: *Миеле, А.*: Механика полета. Том 1: Теория траекторий полета. Москва 1965].
- [16] *Martin, J. J.*: Atmospheric reentry. An introduction to its science and engineering. Englewood Cliffs 1966. [Russ. Übersetzung: *Мартин, Дж.*: Вход в атмосферу. Введение в теорию и практику. Москва 1969.]
- [17] *Шибловский, В. П.*: Введение в динамику разреженного газа. Москва 1965.
- [18] *Краснов, Н. Ф.*: Аэродинамика тел вращения. Изд. 2-е, перераб. и допол. Москва 1964.

- [19] *Краснов, Н.Ф.; Кошевой, В.Н.; Данилов, А.Н.; Захарченко, В.Ч.*: Аэродинамика ракет. Москва 1968.
- [20] *Котова, Л. Н.*: Линеаризованная оценка погрешности численного интегрирования системы дифференциальных уравнений основной задачи внешней баллистики. *Докл. Акад. наук СССР* **121** (1958) 3, стр. 418 до. 421.
- [21] *Шапиро, Я.М.; Мазинг, Г.Ю.; Прудников, Н.Е.*: Основы проектирования ракет на твердом топливе. Москва 1968.
- [22] *Cranz, C.*: Lehrbuch der Ballistik. Bd.1: Äußere Ballistik, 5. Aufl. Berlin 1925.
- [23] *Molitz, H.; Strobel, R.*: Äußere Ballistik. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1963.
- [24] *Hauck, G.*: Zuordnung und Transformation von Störungsanfangswertproblemen. *Wiss. Z. TH Magdeburg* **12** (1968), S.203 bis 212.
- [25] *Stoyanoff, A.*: Sur la vitesse minimum des projectiles dans un milieu à densité constante. *Mémorial Art. Franç.* **10** (1931), Н.3. (zitiert nach [4] Bd.1, S.101).
- [26] *Kraus*: Näherungsformeln, Ungleichungen, Grenzwertsätze in der äußeren Ballistik. *Wehrtechnische Monatshefte* **45** (1941), S.186 bis 191; **47** (1943), S.235 bis 241 und 299 bis 307.
- [27] *Leimanis, E.*: Mathematical exterior ballistics. In: *Leimanis, E.; Minorsky, N.*: Dynamics and nonlinear mechanics. (Surveys in applied mathematics, Vol. II.) New York 1958, S.38 bis 51.
- [28] *Лойцянский, Л.Г.; Лурье, А.И.*: Курс теоретической механики. Том 2: Динамика. Изд. 5-е, перераб. Москва 1955.
- [29] *Некрасов, А.И.*: Курс теоретической механики. Том 2: Динамика. Изд. 2-е, перераб. Москва 1953.
- [30] *Athen, H.*: Ballistik. 2., neubearb. u. erw. Aufl. Heidelberg 1958.
- [31] *Popoff, K.*: Die Hauptprobleme der äußeren Ballistik im Lichte der modernen Mathematik. Leipzig 1954.
- [32] *Stange, K.*: Zur Berechnung einer Flugbahnschar nach dem *Athenschen* Verfahren. *Z. Angew. Math. Mech.* **20** (1940), S.350 bis 357.
- [33] *Нейшюлер, Л.Я.*: Таблицы для расчета баллистических траекторий по методу *С.А. Казакова*, со вступительной статьей *Д.А. Райкова* и таблицей поправок *О.П. Крамер*. Москва/Ленинград 1946.
- [34] Теория стрельбы наземной артиллерии. *Книга первая*: Определение установок для стрельбы на поражение. *Книга вторая*: Стрельба на поражение. Москва 1960.
- [35] *Stutz, W.*: Schießlehre. Basel/Stuttgart 1959.
- [36] *Wolff, W.*: Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Problem der Geschößstreuung. Berlin 1960.
- [37] *McShane, E.J.; Kelley, J.L.; Reno, F.V.*: Exterior ballistics. Denver 1953.
- [38] *Hauck, G.*: Elementare Vergleichsvariablen-Transformationen. *Wiss. Z. Techn. Hochschule Magdeburg* **12** (1968), Н.213, S.213 bis 215.
- [39] *Hauck, G.*: Vergleichsvariablen-Transformation der linearisierten Störungsdifferentialgleichungen. *Wiss. Z. Techn. Universität Dresden* **15** (1966), S.211 bis 216.
- [40] *Hauck, G.*: Zur Berechnung der Bahnstörungen für die passive Bewegung eines Flugkörpers über einer ebenen Erde. *Wiss. Z. Techn. Universität Dresden* **15** (1966), S.445 bis 452.
- [41] *Hauck, G.*: Lineare Beziehungen zwischen den ballistischen Störungskoeffizienten. *Wiss. Z. Techn. Universität Dresden* **15** (1966), S.903 bis 914.

- [42] *Hauck, G.*: Zur Integration von inhomogenen Störungsanfangswertproblemen. *Wiss. Z. Techn. Hochschule Magdeburg* 12 (1968), S.217 bis 222.
- [43] *Sänger, R.*: Ballistische Störungstheorie unter besonderer Berücksichtigung der Witterungseinflüsse. Basel 1949.
- [44] *Серебряков, Я. М.*: Внутренняя баллистика ствольных систем и пороховых ракет. Изд. 3-е, дополн. и перераб. Москва 1962.
- [45] *Das Schießen der Artillerie*. Teil 1 und 2. Berlin 1964.
- [46] *Große, H.*: Untersuchungen zur Genauigkeit des Verfahrens von *Siacci* unter besonderer Berücksichtigung des sowjetischen Standard-Luftwiderstandsgesetzes 1943. Dissertation Techn. Hochschule Magdeburg 1971.
- [47] *Handbuch für Artillerieoffiziere*. Berlin 1967.

# Verzeichnis der Formelsymbole

$A$	} Zahlenfaktoren
$A_i$	
$A$	aerodynamische Auftriebskraft, die auf ein Geschöß einwirkt
$A$	Betrag der aerodynamischen Auftriebskraft $A$
$A$	Koeffizientenmatrix des linearen Störungsanfangswertproblems
$\mathbf{A}$	Primäre <i>Siacci</i> -Funktion
$a$	Schallgeschwindigkeit
$d$	Zielhöhe
$a$	Gravitationsbeschleunigung der Erde
$b'$	Betrag der Verzögerung des Geschößes durch den Luftwiderstand
$b$	Beschleunigung (allgemein)
$b$	Betrag von $b$
$B$	} Koeffizientenmatrizen linearer Störungsanfangswertprobleme
$B^\circ$	
$B^*$	
$\bar{B}$	Koeffizientenmatrix des Störungsanfangswertproblems für die Fehlerschranken
$B$	bestrichener Raum
$C_0$	Ballistischer Koeffizient (des modernen Ansatzes für $b'$ )
$C_m$	Massenkoeffizient eines Geschößes
$C^*$	modifizierter Ballistischer Koeffizient (bei vertikalen Bahnen)
$c$	} Ballistischer Koeffizient (des klassischen Ansatzes für $b'$ )
$\bar{c}$	
$c_2$	modifizierter Ballistischer Koeffizient (beim quadratischen Widerstandsansatz)
$c_{4,3}$	Ballistischer Koeffizient, bezogen auf das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943
$c_a$	aerodynamischer Auftriebsbeiwert
$c_m$	aerodynamischer Momentenbeiwert
$c_p$	spezifische Wärme bei konstantem Druck
$c_q$	aerodynamischer Querkraftbeiwert
$c_v$	spezifische Wärme bei konstantem Volumen
$c_w$	aerodynamischer Widerstandsbeiwert
$c^*$	reduzierter Ballistischer Koeffizient (bei Ermittlung des Einflusses von $p_0$ -Änderungen)
$D$	Schrägschußweite
$\mathbf{D}$	Primäre <i>Siacci</i> -Funktion
$\mathbf{D}^*$	modifizierte Primäre <i>Siacci</i> -Funktion
$d$	Kaliber eines Geschößes (Geschößdurchmesser)
$d_h$	Heckdurchmesser eines Geschößes

$E$	Sättigungsdampfdruck des Wassers; Verzögerungsfunktion
$E_{p_0}$	wahrscheinlicher Fehler des Luftdrucks $p_0$ am Boden
$E_{v_0}$	wahrscheinlicher Fehler der Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit $v_0$
$E_w$	wahrscheinlicher Fehler der experimentell ermittelten Windgeschwindigkeit $ w $
$E_{W_x}$	wahrscheinlicher Fehler der Ermittlung der Geschwindigkeit $W_x$ des Längswindes
$E_x$	resultierender wahrscheinlicher Fehler der Schußweite $x_e$ bei allen Versuchsschießen
$E_x^x$	wahrscheinlicher Fehler der experimentellen Ermittlung der Schußweite $x_e$
$E_{x,M}$	wahrscheinlicher Fehler der Horizontalschußweite infolge der mathematischen Bearbeitung (Glättung, Interpolation) der Versuchsergebnisse
$E_{x,p_0}$	wahrscheinlicher Fehler der Horizontalschußweite $x_e$ infolge des wahrscheinlichen Fehlers $E_{p_0}$ des Luftdrucks $p_0$ am Boden
$E_{x,st}$	resultierender wahrscheinlicher Fehler der Entfernungsangaben der Schußtafel
$E_{x,v_0}$	wahrscheinlicher Fehler der Horizontalschußweite $x_e$ infolge der wahrscheinlichen $v_0$ -Abweichung $E_{v_0}$
$E_{x,w_x}$	wahrscheinlicher Fehler der Horizontalschußweite infolge des wahrscheinlichen Fehlers $E_{W_x}$ der Ermittlung der Längswindgeschwindigkeit $W_x$
$E_{x,\delta\tau}$	wahrscheinlicher Fehler der Horizontalschußweite $x_e$ infolge des wahrscheinlichen Fehlers $E_{\delta\tau}$ der mittleren ballistischen Abweichung $\delta\tau_B$ der Lufttemperatur $\tau$
$E_{x,\vartheta_0}$	wahrscheinlicher Fehler der Horizontalschußweite $x_e$ infolge des wahrscheinlichen Fehlers $E_{\vartheta_0}$ des Abgangswinkels $\vartheta_0$
$E_x^{(i)}$	resultierende wahrscheinliche Abweichung der reduzierten Schußweite des $i$ -ten Schießversuchs
$E_x^o$	wahrscheinliche Abweichung der Horizontalschußweiten der Schußtafel an den Stützstellen
$E_\delta$	wahrscheinlicher Fehler der Ermittlung der vertikalen Komponente $\delta$ des Abgangswinkels
$E_{\delta\tau}$	wahrscheinlicher Fehler der mittleren ballistischen Abweichung $\delta\tau_B$ der Lufttemperatur $\tau$
$E_{\vartheta_0}$	wahrscheinlicher Fehler des Abgangswinkels $\vartheta_0$
$E_\tau$	wahrscheinlicher Fehler der experimentell ermittelten Lufttemperatur $\tau$
$E_\varphi$	wahrscheinlicher Fehler der Einstellung des Erhöhungswinkels $\varphi$
$E_\varphi$	wahrscheinlicher Fehler der experimentell ermittelten Windrichtung $\varphi$
$E_n$	Elementarmatrix der Ordnung $n$
$e$	Partialdruck des Wasserdampfes
$e$	Störfunktion
$e^i$	Komponenten von $e$
$F$	Funktions (allgemein)
$f$	
$F$	Luftwiderstandsfunktion; Fläche; Querschnittsfläche eines Geschosses
$F_{43}$	Luftwiderstandsfunktion des Standard-Luftwiderstandsgesetzes 1943
$F_i$	Funktionen zur Berechnung der Flugbahnelemente beim Verfahren PBH
$F$	Zentrifugalkraft
$f_{ik}$	Element $(i, k)$ der Matrix $\bar{B}$
$f$	Vektorfunktion (allgemein)
$f^i$	$i$ -te Komponente von $f$
$\bar{f}, \bar{f}_i$	Sekundäre Siacci-Funktionen
$G$	Widerstandsfunktion
$G_{43}$	Widerstandsfunktion für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943



<b><math>G</math></b>	Schwerkraft; Gewicht des Geschosses
$G$	Betrag von $G$
$g$	Schrittweiten-Kontrollfunktion
$g$	Fallbeschleunigung
$g$	Betrag von $g$
<b><math>H</math></b>	Druckfunktion
$H_{\tau}(y)$	ballistische Höhenfunktionen
$H^*(y)$	
<b><math>H</math></b>	verallgemeinerte <i>Cauchy</i> -Matrix
$h$	Schrittweite bei der numerischen Integration eines Anfangswertproblems; geometrische Höhe (eines Flugbahnpunktes) über der Erdoberfläche
$h^*$	geopotentielle Höhe
$\tilde{h}$	fiktive Höhen
$h$	
$h$	Vektorfunktion
$h^i$	$i$ -te Komponente von $h$
<b><math>I_n</math></b>	Einheitsmatrix $n$ -ter Ordnung
<b><math>J</math></b>	Primäre <i>Siacci</i> -Funktion
$i$	(ballistischer) Formkoeffizient
$i_r$	Einheitsvektor in Richtung des Radiusvektor $r$
$i_x$	Einheitsvektor in Richtung der positiven $x$ -Achse
$i_y$	Einheitsvektor in Richtung der positiven $y$ -Achse
$i_z$	Einheitsvektor in Richtung der positiven $z$ -Achse
$i_\eta$	Einheitsvektor in $\eta$ -Richtung
$i_\xi$	Einheitsvektor in $\xi$ -Richtung
$i_\varphi$	Einheitsvektor senkrecht zum Radiusvektor $r$
$i_\omega$	Einheitsvektor in Richtung von $\omega$
$i^{(g)}$	globaler Formkoeffizient
$i^{(l)}$	lokaler Formkoeffizient
$i^{(m)}$	mittlerer Formkoeffizient
$j$	Spaltenvektor (6.95)
<b><math>K</math></b>	Parameter des Verfahrens PBH
<b><math>K^*</math></b>	Schrittkenzahl (der natürlichen Schrittweite)
<b><math>K</math></b>	Corioliskraft
<b><math>K_D</math></b>	<i>Knudsen</i> -Zahl
$k$	Konstante des kugelsymmetrischen Anteils des Gravitationspotentials der Erde; Flugbahnparameter beim quadratischen Widerstandsansatz
$k'$	Flugbahnparameter (beim Verfahren von <i>Siacci</i> )
$l$	(charakteristische) Länge des Geschosses
$l_0$	charakteristische Längenabmessung des Strömungsfeldes
$l_h$	Länge des Heckkonus eines Geschosses
$l_s$	Spitzenlänge eines Geschosses
$l_z$	Länge des zylindrischen Teils eines Geschosses
<b><math>M_E</math></b>	Masse der Erde
<b><math>M</math></b>	aequatoriales aerodynamisches Moment
<b><math>M</math></b>	Betrag des aerodynamischen Momentes $M$
<b><math>M</math></b>	Molekulargewicht
<b><math>M</math></b>	<i>Mach</i> -Zahl
$m$	natürliche Zahl; Geschoßmasse

$N$	Anzahl der Versuchsschießen
$n$	Schußanzahl je Versuchsschießen (Kapitel 7); natürliche Zahl
$n$	ballistischer Widerstandsgrad
$O(\cdot)$	Fehlerordnung eines Näherungsverfahrens
$P_{i,j}$	Vergleichsvariablen-Transformationsmatrix (für die Transformation des Variablensystem $\mathcal{Z}_i$ in das Variablensystem $\mathcal{Z}_j$ )
$P_{\pm}$	Funktionen zur Berechnung vertikaler Bahnen
$p$	Ordnung eines numerischen Integrationsverfahrens; Flugbahnneigung ( $p = \tan \theta$ )
$p$	Lösungsvektor eines Anfangswertproblems (allgemein)
$p^i$	Komponente von $p$
$p$	Luftdruck
$p_0$	Luftdruck am Boden
$Q$	Querschnittsbelastung eines Geschosses
$Q_c$	Störungskoeffizient der Horizontalschußweite $x_0$ für eine Änderung des Ballistischen Koeffizienten $c$ (bzw. des Luftdrucks am Boden $p_0$ ) um 1 %
$Q_q$	Störungskoeffizient für die Komponente $q$ der Bahngeschwindigkeit $v$
$Q_{v_0}$	Störungskoeffizient der Horizontalschußweite $x_0$ für eine Änderung der Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ um 1 m/s
$Q_{w_x}$	Störungskoeffizient der Horizontalschußweite $x_0$ für einen Längswind der Geschwindigkeit $W_x = 1$ m/s
$Q_{w_x}$	Störungskoeffizient der Seitenabweichung für einen Querwind der Geschwindigkeit $W_x = 1$ m/s
$Q_{\theta_0}$	Störungskoeffizient der Horizontalschußweite $x_0$ für eine Änderung des Abgangswinkels $\theta_0$ um 1'
$Q_{\tau_0}$	Störungskoeffizient der Horizontalschußweite $x_0$ für eine Änderung der Lufttemperatur $\tau_0$ am Boden um 1 grad
$Q$	aerodynamische Querkraft, die auf ein Geschöß einwirkt
$Q$	Betrag der aerodynamischen Querkraft $Q$
$Q_{\pm}$	Funktionen zur Berechnung vertikaler Bahnen
$q$	spezifische Feuchte (der Luft); verallgemeinerte Flugbahnneigung (im schiefwinkligen $\xi, \eta$ -System); Komponente der Bahngeschwindigkeit $v$ in $z$ -Richtung; Flugbahnparameter (Verhältnis von potentieller zu kinetischer Energie des Geschosses); Gewichtsfaktor-Funktion
$q_i$	ballistisches Gewicht der $i$ -ten Schicht
$q$	Lösungsvektor eines Anfangswertproblems (allgemein)
$q^i$	$i$ -te Komponente von $q$
$R_E$	(mittlerer) Erdradius
$R$	Resultierende der am Geschöß angreifenden aerodynamischen Kräfte
$R$	Betrag von $R$
$\mathfrak{R}$	spezifische Gaskonstante
$R$	Rasanz(maß)
$Re$	Reynolds-Zahl
$r$	relative Feuchte (der Luft)
$r_c$	wahrscheinliche Abweichung des Ballistischen Koeffizienten $c$
$r_{v_0}$	wahrscheinliche Abweichung der Anfangsgeschwindigkeit $v_0$
$r_v$	wahrscheinlicher Meßfehler der Geschwindigkeitsmessung im Einzelschuß
$r_{\theta}$	wahrscheinliche Abweichung des Abgangswinkels $\theta_0$

$r$	Fehler-Hauptfunktion eines numerischen Integrationsverfahrens; Radiusvektor
$r$	Betrag des Radiusvektor $r$
$St_B$	wahrscheinliche Abweichung des Auftreffpunktes nach der Seite
$St_E$	wahrscheinliche Abweichung des Auftreffpunktes in der Entfernung
$St_H$	wahrscheinliche Abweichung des Auftreffpunktes nach der Höhe
$s$	unabhängige Variable (allgemein); Feuchtezahl (der Luft); Bogenlänge der Flugbahn
$\bar{s}$	Flugbahnparameter (Abschn. 2.9.2.)
$s$	Ortsvektor des Geschosses im erdfesten rotierenden Bezugssystem
$T$	Störungskoeffizient der Flugzeit $\hat{t}$ der Normalbahn
$T_L$	Ladungstemperatur
$T$	Primäre <i>Siacci</i> -Funktion
$T^*$	modifizierte Primäre <i>Siacci</i> -Funktion
$t$	Flugzeit
$U$	Pseudogeswindigkeit; Störungskoeffizient für die Horizontalkomponente $u$ der Bahngeschwindigkeit $v$
$u$	Horizontalkomponente der Bahngeschwindigkeit $v$
$u_\eta$	Komponente der Bahngeschwindigkeit $v$ in $\eta$ -Richtung (schiefwinkliges $\xi, \eta$ -System)
$u_\xi$	Komponente der Bahngeschwindigkeit $v$ in $\xi$ -Richtung (schiefwinkliges $\xi, \eta$ -System)
$u$	Spaltenvektor (allgemein)
$u^i$	$i$ -te Komponente von $u$
$V$	Volumen eines Geschosses; Störungskoeffizient der Bahngeschwindigkeit $\hat{v}$ der Normalbahn
$V_n$	Vertauschungsmatrix der Ordnung $n$
$v_0^*$	reduzierte Anfangsgeschwindigkeit (bei Ermittlung des Einflusses von $\tau_0$ -Änderungen)
$v_{gr}$	Grenzgeschwindigkeit („Fallschirmgeschwindigkeit“) eines Geschosses
$v_\tau$	fiktive Geschößgeschwindigkeit
$v$	Bahngeschwindigkeit
$v$	Betrag von $v$
$v$	Spaltenvektor (allgemein)
$v^i$	$i$ -te Komponente von $v$
$v_0$	Anfangsgeschwindigkeit
$v_0$	Betrag von $v_0$
$v_\tau$	Vektor der Relativgeschwindigkeit des Geschosses gegenüber der mit der Windgeschwindigkeit $w$ bewegten Luft
$W$	Störungskoeffizient für die Vertikalkomponente $w$ der Bahngeschwindigkeit $v$
$W$	aerodynamischer Widerstand, den ein Geschöß bei seiner Bewegung durch die Luft überwinden muß
$W$	Betrag von $W$
$w$	Vertikalkomponente der Bahngeschwindigkeit $v$
$w_h$	horizontale Komponente von $w$
$w_v$	vertikale Komponente von $w$
$w$	Vektor der Windgeschwindigkeit
$W_x$	Komponente von $w$ in $x$ -Richtung
$W_y$	Komponente von $w$ in $y$ -Richtung
$W_z$	Komponente von $w$ in $z$ -Richtung
$X$	Störungskoeffizient der Abszisse $\hat{x}$ der Normalbahn
$X^i$	Störungskoeffizient der allgemeinen Variablen $x^i$

<b>X</b>	Entfernung des direkten Schusses
$x$	Abszisse eines Flugbahnpunktes
$x_e$	Horizontalschußweite (Abszisse des Auftreffpunktes in der Mündungsebene)
$x^*$	Entfernung eines Flugbahnpunktes, gemessen längs der Erdoberfläche
$\mathbf{x}$	Vektor (allgemein)
$x^i$	$i$ -te Komponente von $\mathbf{x}$
<b>Y</b>	Störungskoeffizient der Ordinate $y$ der Normalbahn
$y$	Ordinate eines Flugbahnpunktes
$\mathbf{y}$	Vektor (allgemein)
$y^i$	$i$ -te Komponente von $\mathbf{y}$
<b>Z</b>	Störungskoeffizient für die Seitenabweichung aus der Abgangsebene
<b>Z</b>	Variable des Verfahrens PBH
$Z^i$	Störungskoeffizient der allgemeinen Variablen $z^i$
$\mathbf{z}$	Vektor (allgemein)
$z^i$	$i$ -te Komponente von $\mathbf{z}$
$z$	Flugbahnkoordinate; Seitenabweichung
$\alpha$	<i>Mach</i> scher Winkel; Verhältnis von Luftwiderstand $W$ zu Gewicht $G$ eines Geschosses; Aufsatzwinkel
$\alpha_0$	Aufsatzwinkel für $\varepsilon = 0$ ( $\alpha_0 = \vartheta_0$ )
$\alpha_i$	Koeffizientenfunktionen der Parameterentwicklungen
$\beta$	Zahlenfaktor; Seitenwinkel der Flugbahntangente
$\beta_i$	Koeffizientenfunktionen der Parameterentwicklungen
$\gamma$	Verkantungswinkel
$\gamma_g$	Gravitationskonstante
$A$	exakter relativer Zuwachs
$\Delta p$	relative Änderung des Luftdrucks am Boden
$\Delta X_e$	Verbesserungskoeffizient der Horizontalschußweite $x_e$ für eine Änderung des Ballistischen Koeffizienten um 1 %
$\Delta X_m$	Verbesserungskoeffizient der Horizontalschußweite $x_e$ für eine Änderung der Geschossmasse $m$ um $\frac{1}{3}$ %
$\Delta X_p$	Verbesserungskoeffizient der Horizontalschußweite $x_e$ für eine Änderung des Luftdrucks $p_0$ am Boden um 10 Torr
$\Delta X_T$	Verbesserungskoeffizient der Horizontalschußweite $x_e$ für eine Änderung der Ladungstemperatur $T_L$ um 10 grad
$\Delta X_v$	Verbesserungskoeffizient der Horizontalschußweite $x_e$ für eine Änderung der Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ um 1 %
$\Delta X_w$	Verbesserungskoeffizient der Horizontalschußweite $x_e$ für einen Längswind mit einer Geschwindigkeit $W_x = 10$ m/s
$\Delta X_\alpha$	Störungskoeffizient der Horizontalschußweite $x_e$ für eine Änderung des Aufsatzwinkels $\alpha$ um 0.01
$\Delta X_{\bar{t}}$	Verbesserungskoeffizient der Horizontalschußweite $x_e$ für eine Änderung der mittleren ballistischen Lufttemperatur $\bar{t}_b$ um 10 grad
$\Delta Y_A$	Störungskoeffizient für die Höhe des Auftreffpunktes bei einer Änderung des Aufsatzes $A$ um 1 $\Delta X$
$\Delta Z_D$	Verbesserungskoeffizient für die Seitenabweichung infolge des Dralls
$\Delta Z_w$	Verbesserungskoeffizient für einen Seitenwind der Geschwindigkeit $W_s = 10$ m/s

$\Delta\alpha_G$	Störungskoeffizient des Aufsatzwinkels $\alpha$ für eine Änderung der Horizontalschußweite $x_0$ um $4 St_E$	
$\Delta t_c$	relative Änderung der Lufttemperatur am Boden	
$\delta$	Anstellwinkel der Geschößlängsachse gegenüber der Flugbahntangente; Abgangsfehlerwinkel nach der Höhe; maximaler Abstand der Flugbahn von der Visierlinie	
$\delta^{\mu\nu}$	<i>Kronecker-Symbol</i>	
$\delta_i$	Fehlervektoren bei numerischer Integration	
$\delta_{\mu}^{\nu}$	Einheitsvektoren ( <i>Kronecker-Vektoren</i> )	
$\delta\mu$	Spaltenvektor der Parameteränderungen	
$\varepsilon$	Geländewinkel	
$\varepsilon_v$	wahrscheinlicher Fehler einer Geschwindigkeits-Meßreihe („Fehler der 2. Gruppe“)	
$\varepsilon_x$	wahrscheinlicher Fehler der Schußentfernung bei <i>einem</i> Versuchsschießen infolge von „Fehlern der 2. Gruppe“	
$\varepsilon_v$ $\varepsilon_v^*$ $\varepsilon_v^{**}$	} Fehlerschranken	
$\varepsilon$		Korrekturvektor für die Gravitationsbeschleunigung
$\varepsilon$ $\varepsilon^*$		} Störfunktionen
$\zeta$	Störungsvektor	
$\zeta^i$	$i$ -te Komponente von $\zeta$	
$\eta$	Störung der Abgangshöhe; Funktion zur Berücksichtigung des Feuchte-Einflusses auf den Luftdruck; Ordinate eines Kurvenpunktes (allgemein)	
$\theta$	Störungskoeffizient des Neigungswinkels $\hat{\theta}$ der Normalbahn	
$\vartheta$	Neigungswinkel der Flugbahntangente gegenüber der Mündungsebene	
$\vartheta_0$	Abgangswinkel	
$\vartheta_0^*$	optimaler Abgangswinkel	
$\vartheta_0$	Auftreffwinkel	
$\varkappa$	Zahlenfaktor; Adiabatenexponent	
$x$	Lösungsvektor des homogenen linearen Störungsanfangswertproblems	
$x^i$	$i$ -ter Spaltenvektor von $\Phi$	
$x^{i*}$	Elemente von $\Phi$	
$\Lambda$	Schrittfaktor (der natürlichen Schrittweite)	
$\Lambda_i$	Temperaturgradient der $i$ -ten Schicht	
$\Lambda^*$	geopotentieller Temperaturgradient	
$\lambda$	Parameter der <i>Popoffschen</i> Entwicklungen für die Flugbahnelemente	
$\lambda_0$	Flugbahnparameter (beim Verfahren von <i>Siacci</i> )	
$\bar{\lambda}$	mittlere freie Weglänge der Luftmoleküle	
$\lambda$	resultierender Lösungsvektor des inhomogenen Störungsanfangswertproblems	
$\lambda_i$	Eigenwerte der Matrix $\bar{B}$ ; Wurzeln des charakteristischen Polynoms	
$\mu$	dynamische Zähigkeit (der Luft)	
$\mu, \mu^i$	Flugbahnparameter (allgemein)	
$\mu$	Vektor der Flugbahnparameter	
$\nu$	Zahlenfaktor	
$\xi$	Abszisse eines Kurvenpunktes	
$\xi, \eta$	schiefwinklige Flugbahnkoordinaten	
$\xi$	linearer Störungsvektor	

$\xi^i$	$i$ -te Komponente von $\xi$
$\xi_c$	Spaltenvektor der Störungen der Bahnelemente im Auftreffpunkt
$\pi$	Störungskoeffizienten-Vektor
$\rho$	Luftdichte; Flugbahnparameter (Abschn. 2.9.2.)
$\bar{\rho}$	Flugbahnparameter (Abschn. 2.9.2.)
$\bar{\rho}_G$	mittlere Dichte eines Geschosses
$\rho$	Fehlervektor der Feinrechnung (bei der numerischen Integration)
$\Sigma_i$	Symbol für das $i$ -te Variablensystem
$\sigma$	skalare Funktionen (allgemein)
$\sigma_i$	Exponent der Luftdruck-Funktion in der $i$ -ten Schicht
$\sigma$	Störungskoeffizienten-Vektor
$\tau$	Lufttemperatur; Integrationsvariable (allgemein); skalare Funktion (allgemein)
$\tau_v$	virtuelle Temperatur
$\tau^*$	Molekulartemperatur
$\tilde{\tau}$	fiktive Lufttemperaturen
$\hat{\tau}$	
$\Phi$	Widerstandsfunktion (allgemein)
$\Phi_i$	Funktionen zur Berechnung der Fallstrecke eines Geschosses (beim Verfahren von <i>Siacci</i> )
$\Phi$	Zuwachsfunktion (bei numerischer Integration); Fundamentalmatrix der homogenen linearen Störungsdifferentialgleichungen
$\varphi$	Erhöhungswinkel der Seelenachse des Rohres vor Schußabgabe; Funktion (allgemein); Störfunktion; Winkel zwischen den Radiusvektoren von Abgangspunkt $O$ und laufendem Flugbahnpunkt $E$ (Polarkoordinatendarstellung); astronomische Breite des Ursprungs $O$ des erdfesten Koordinatensystems
$\tilde{\varphi}$	Vorhaltungswinkel (beim Bombenwurf)
$\varphi$	vektorielle Transformationsfunktion der Bahnelemente; Lösungsvektor eines Anfangswertproblems (allgemein)
$\varphi^i$	$i$ -te Komponente von $\varphi$
$\chi$	Hilfsfunktion zur Berechnung der Höhenabhängigkeit der Verzögerung $b'$
$\chi$	Störungsvektor
$\Psi$	Energie des Geschosses
$\Psi$	Fehlertransport-Matrix; Fundamentalmatrix der homogenen linearen Störungsdifferentialgleichungen
$\psi$	Azimet eines Flugbahnpunktes (vom Abgangspunkt aus gesehen)
$\psi$	vektorielle Transformationsfunktion der Bahnkoordinaten
$\psi^i$	$i$ -te Komponente von $\psi$
$\Omega$	<i>Cauchy</i> -Matrix des linearen homogenen Störungsanfangswertproblems
$\omega$	Abgangsfehlerwinkel nach der Seite
$\omega_E$	Auftreffwinkel im geneigten Gelände
$\omega_*$	Auftreffwinkel in der Mündungsebene ( $\omega_* =  \partial_c $ )
$\omega$	Winkelgeschwindigkeitsvektor der Erdrotation
$\omega$	Betrag von $\omega$

#### Punkte

$O$	Abgangspunkt
$E$	Auftreffpunkt
$F$	Punkt geringster Folgsamkeit eines Geschosses

<i>G</i>	Gipfelpunkt
<i>M</i>	Flugbahnpunkt (beliebig)
<i>P</i>	Punkt kleinsten relativen Widerstandes; Druckpunkt (eines Geschosses); Flugbahnpunkt (beliebig)
<i>S</i>	Schwerpunkt (eines Geschosses); Scheitel der Flugbahn
<i>V</i>	Punkt geringster Bahngeschwindigkeit
<i>Z</i>	Zielpunkt
$\Omega$	Punkt größter Winkelgeschwindigkeit eines Geschosses

### Indizes (tiefgestellt)

0	(bei meteorologischen Elementen) Bodenwerte ( $h = 0$ ); (bei Flugbahnelementen) Anfangspunkt des Vorhersage-Intervalls, Abgangspunkt
43	Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943
E	Auftreffpunkt (allgemein); Auftreffpunkt im geneigten Gelände
G	Geschoß
g	Gipfelpunkt
L	Luft
N	(bei meteorologischen Elementen) Normalatmosphäre; (bei Flugbahnelementen) Normalbahn
d	Flugbahnelemente beim Austritt des Geschosses aus der Mündung der Waffe
e	Endpunkt des Vorhersage-Intervalls; Auftreffpunkt in der Mündungsebene Kennzeichnung einer Folge ausgewählter Flugbahnpunkte; Unterscheidung von Konstanten und Parametern; $i$ -te Komponente eines Vektors

### Indizes (hochgestellt)

$i, j$	Kennzeichnung der Komponenten eines Vektors bzw. der Elemente einer Matrix; Vergleichsvariable (allgemein)
--------	---

### Symbole

T	Transponierung einer Matrix
'	Unterscheidung von Variablen (Koordinatensystemen); Ableitung nach $x$
o	Unterscheidung von Variablen
*	Bahnelemente für die maximale Schußweite
~	Flugbahnelemente der gestörten Bahn
—	(ballistischer) Mittelwert; Unterscheidung von Variablen
^	(bei Flugbahnelementen) Elemente der ungestörten Normalbahn; (bei Luftwiderstandsfunktionen) Verlauf für das Standard-Luftwiderstandsgesetz

## Sachwörter- und Namenverzeichnis

- Abbrechfehler 319  
–, fortgeplanter 301, 313  
–, lokaler 301, 309, 310, 311
- Abgangsebene 15, 19, 80
- Abgangsfehlerwinkel 18, 524, 527  
–, Ermittlung 495  
–, horizontaler 19  
–, vertikaler 19
- Abgangsgeschwindigkeit 19
- Abgangspunkt 16, 18
- Abgangswinkel 18, 36, 37, 49, 80, 429, 461, 467, 478, 510  
–, optimaler 203, 204  
–, wahrscheinliche Abweichung 536
- Abgangszeitpunkt 18
- Abstandsschießen 497, 498
- Abstandszünder 497
- Adiabatexponent 93
- Anfangsbedingungen der Flugbahn 17, 175  
–, Störungen 331, 333
- Anfangsgeschwindigkeit 15, 19, 30, 225, 430, 466, 478, 505, 518, 523, 536  
–, Abhängigkeit von der Ladungstemperatur 518  
–, Ermittlung 523, 524  
–, Störungskoeffizienten 478  
–, wahrscheinlicher Fehler 523, 524
- Anfangsschrittweite 316, 317
- Anfangsstörungen 434
- Anfangswertproblem 17, 18, 173, 369  
–, äquivalente Formen 180  
–, Integration 19, 294
- Anfangswertproblem der Störungstheorie 331
- Anfangszeitpunkt 18
- Angelrutenschwenken von Flugbahnen 265, 267
- Anpassung von Luftwiderstandsgesetzen 159  
–, globale 163, 164, 165, 166  
–, lokale 160, 161  
– im Mittel 162
- Anstellwinkel 126, 129
- Äquatorebene 346
- aerodynamische Beiwerte 126
- Artilleriegeschöß 133, 159
- Artillerie-Normalatmosphäre 120, 121, 122, 152
- Athen, H.* 289, 577
- Atmosphäre 87, 92  
–, chemische Bestandteile 94  
–, Modelle 92, 103  
–, Stabilitätsbedingungen 95, 98, 100
- Aufsatzwinkel 38, 63, 70  
– -korrektur 63, 65  
–, optimaler 43, 44
- Aufschlagschießen 497
- Auftreffgeschwindigkeit 30, 34, 41, 49
- Auftreffpunkt 16, 33, 39, 253, 283, 285, 309, 339, 360, 413, 414  
–, wahrscheinliche Abweichungen 527
- Auftreffwinkel 34, 39, 42, 49
- Auftrieb 125  
– -sbeiwert 125
- Äußere Ballistik 9, 10, 13
- Außenballistisches Tafelwerk  
– der Bahnelemente 320, 321, 322, 386, 562  
– der Störungskoeffizienten 426, 568, 575
- Azimet 346, 412



- Bahnelemente 9, 10, 23, 48, 163, 282,  
 283, 285, 295, 381, 391  
 Bahngeschwindigkeit 194, 210  
 -, fiktive 225  
 -, Messung 523  
 Bahnkrümmung 211  
 Bahnmodell 10, 12  
 -, parabolisches 12, 14, 15, 17, 35,  
 66, 86  
 -, klassisches 12, 86, 138, 171, 331,  
 353, 444, 494  
 Bahnparameter 276, 295  
 Bahnscharen 277  
 Bahnvorhersage 9, 10, 14  
 ballistischer  
 - Mittelwert 336, 483, 484, 487  
 - Koeffizient 139, 140, 141, 153,  
 389, 428, 459, 466  
 - Widerstandsgrad 144, 145, 147  
 barometrische Höhenformel 103  
 Beiwerte, aerodynamische 126  
 bestrichener Raum 66, 76, 77,  
 78  
 Bewegungsgleichungen  
 -, Äquivalenz 180  
 -, modifiziertes  $t$ -System 181, 182,  
 381  
 -, natürliche 182, 183  
 -,  $p$ -System 184, 185, 463, 466,  
 467, 468  
 -,  $t$ -System 20, 175, 336, 456  
 -,  $U$ -System 187, 247  
 -,  $x$ -System 23, 183, 184  
 -,  $y$ -System 186  
 -,  $\vartheta$ -System 185  
 Bezugssystem 15, 16  
 -, rotierendes 339, 342  
 -, windfestes 408  
 Blockintegration (Shintani) 313  
 Boden-  
 - -luftdruck 505  
 - -lufttemperatur 506  
 Bombenbahn 48  
 Bombenwurf 15, 33, 47, 49  
 - -weite 49  
 - -, maximale 50  
 Bonney, E. A. 576  
 Brusz, H.-D. 576  
 Businger, J. A. 576  
 Cauchy-Matrix 441, 442, 446  
 -, verallgemeinerte 446  
 Chapel 158  
 Chapman 126  
 Chrgian, A. Ch. 100, 576  
 CIRA 115  
 Collatz 314  
 Coriolis-Beschleunigung 335, 349,  
 461, 467, 483  
 - -Kraft 342, 343  
 COSPAR 115  
 Cranz, C. 577  
  
 Danilov, A. N. 577  
 Derivation 513  
 Dichtefunktion 106  
 Dmitriev, M. P. 576  
 Drallabweichung 513, 531  
 Druckfunktion 103, 106, 140  
 Druckpunkt 123  
 Dupuis 158  
  
 Eberhard 159  
 Einschnitt-Integrationsverfahren 297,  
 298, 300, 303  
 -, Schrittweitenbemessung 303  
 Energiesatz 29, 177  
 Entfernung des direkten Schusses  
 66, 73, 74, 75, 78, 87  
 Entfernungsfehler der Schußtafel 533  
 Erdatmosphäre 87, 92  
 -, Stabilitätsbedingungen 95, 98,  
 100  
 -, Struktur 92  
 -, Zusammensetzung 94  
 Erdkrümmung 333, 338, 339, 511  
 Erdoberfläche 511  
 Erdradius 93  
 Erdrotation 343  
 Erdschußtafel 495, 497, 498  
 Erhöhungswinkel 18  
 -, wahrscheinlicher Fehler 536  
 Exosphäre 91  
  
 Fallbeschleunigung 15, 93, 97, 101,  
 102, 461, 467  
 Fallschirmgeschwindigkeit 199

Fallstrecke 268, 269, 270  
*Faust, H.* 576  
 Fehler der 1. Gruppe 521  
   - - der 2. Gruppe 521  
 Fehlerfortpflanzung 304  
 Fehler-Hauptfunktion 302, 312  
 Fehlertransport-Matrix **55, 359**  
 Feuchte  
   -, relative 109  
   -, spezifische 109  
 Feuchtemaße 109  
 Feuchtezahl 109  
 Fla-Bahnen 259, 264  
 Flak-Schußtafeln 494  
*Fleagle, R. G.* 576  
 Flugbahn  
   -, geradlinige **216**  
   -, gestörte 336, 390  
   -, rasante 187, 244  
   -, signifikante Punkte **210, 211**  
   -, ungestörte 336, 366  
   -, windgestörte 410, 411, 413  
   - -anfangswertproblem 17, 18, 173, 369  
   - -anpassung 534  
   - -asymptote 241, 242  
   - -eigenschaften 193  
   - -elemente 16, 309, 320, 501  
   - -gipfel 30, 205, 208, 252  
   - -höhe 73, 205  
   - -, mittlere 61  
   - -krümmung 211  
   - -modell 10, 12  
   - -, parabolisches 12, 14, **15, 17**, 35, 66, 86  
   - -, klassisches 12, 86, 138, **171**, 331, 353, 444, 494  
   - -neigung **200**, 201, 202  
   - -parabel 17  
   - -parameter 66, 276, 295, 494  
   - -schar 72, 266, 290, 293, 294  
   - -tangente 200  
   - -typen 66  
   - -vorhersage 170, 171  
 Flugkörper 9, 15, 93  
 Flugzeit 37, 41, 48  
   -, maximale 37  
 Formkoeffizient **151, 159**  
   -, globaler 159, 242, 492

  -, lokaler 159, 160, 161, 162  
   -, mittlerer 159, 162  
 Fundamentalmatrix **441**, 447, 449  
 Fundamentalsystem 440

*Garnier* 158  
*Gävre* 158  
 Gebirgsschußtafeln 497, 498  
 Gegenschießen 495, 529  
 Geländewinkel 38, 267  
 Geschoß-  
   - -geschwindigkeit 19, **194**  
   - -masse 147, 506  
   - -oberfläche 129, 511  
   - -parameter 156  
   - -rotation 13, 335  
   - -spitzenform 134  
 Gewichte der Segmente 485, 486  
 Gewichtsfaktor 59, 60, 61  
   -, Kurve 486  
   -, Tafel 61  
 Gewichtsfunktion 486  
 Gipfel-  
   - -elemente 30  
   - -höhe 32, 33  
   - -punkt 32, 33, 283, 285, 309, 339  
*Glagolev, Ju. A.* 576  
 Grenzgeschwindigkeit 200  
   - -swinkel 73  
 Grundstörungen 353, 355, 356  
 Grundstreuungen 515

*Hauck, G.* 576, 577  
*Hauptsche* Formel 35, 59  
*Hélie* 280  
 Hodograph der Flugbahn 233  
 Höhe  
   -, fiktive 113  
   -, geometrische 144  
   -, geopotentielle **101**, 102  
   -, mittlere ballistische **61**, 63  
 Höhenfunktion 141, 389  
 Horizontalebene 38  
 Horizontalflug 49  
 Horizontalgeschwindigkeit 420

Horizontalschußweite 16, 34, 283,  
427, 511, 527, 537  
-, wahrscheinliche Abweichung  
515  
Hyperschallströmung 128, 129

IACO-Atmosphäre 116  
Inertialsystem 15  
Integrations-  
- -fehler 303  
- -schrittweite 318  
- -verfahren 214  
- -, analytische 295  
- -, numerische 214, 295, 296,  
318, 319  
Interpolation in Flugbahnscharen  
292

Jacobische Determinante 192, 193  
Justierfehler 330

Kaliber 149  
Kazakov 322  
klassischer Ansatz für  $b'$  141, 152  
klassisches Bahnmodell 12, 86, 138,  
171, 331, 353, 444, 494  
Knudsen-Zahl 126, 127  
Koeffizientenmatrix 456  
Kontrollfunktion für Schrittweite 304  
Koordinatensystem, schiefwinkliges  
188, 189, 190  
Koševoj, V.N. 577  
Kotova, L.N. 577  
Kräftesystem am Geschoß 124, 125  
Kraus 577  
Krasnov, N.F. 576  
Kronecker-Symbol 374  
Krupp 158, 159

Ladedichte 508  
Ladungs-  
- -masse 508  
- -raum 508  
- -temperatur 509  
Landau-Symbol 302

Längswind 413, 416, 418, 479, 510  
-, homogener 407  
-, mittlerer ballistischer 483  
-, variabler 462, 467  
-, wahrscheinlicher Fehler 537  
Leimanis, E. 577  
Lender 65  
Lendersche Formel 63, 65, 66, 70,  
268  
Lerner, F.F. 576  
lineare Störungstheorie 334, 338, 353  
Linksabweichung 350  
Linksdrall 528  
Liouville 450, 452  
Lojčanskij, L.G. 577  
Luft  
-, Zusammensetzung 94  
- -dichte 93  
- -druck 93, 97, 395, 505  
- -, wahrscheinlicher Fehler 537  
- -feuchte 107  
- -moleküle, mittlere freie Weg-  
länge 93, 126  
- -temperatur 93, 397, 506  
- -, fiktive 113, 114  
- -, virtuelle 108  
- -, wahrscheinlicher Fehler 537  
Luftwiderstand 86, 126, 138  
- -sfunktion 245, 246, 318  
- -sgesetze 158, 159, 526  
Lur'e, A.J. 577

Machscher Kegel 130  
Machscher Winkel 131  
Mach-Zahl 126, 127, 129, 144, 219  
389  
Majevski 158  
Martin, J.J. 576  
Massenkoeffizient 147, 149  
Maximalschußweite 75  
Mazing, G.Ju. 577  
McShane 577  
Mehrschritt-Integrationsverfahren  
297 298  
Mesopause 90  
Mesosphäre 90  
meteorologische Elemente 103  
Miele, A. 576

- Mittelwerte, ballistische 56, 57, 58, 336, 483, 484, 487  
mittlere freie Weglänge der Moleküle 93, 126  
Modell-  
– -atmosphäre 92, 94, 103, 116  
– -bahn 11  
– -fehler 11  
moderner Ansatz für  $b'$  140  
modifiziertes  $t$ -System der Bewegungsgleichungen 181, 182, 381  
Molekular-  
– -gewicht 93, 94  
– -strömung 128  
– -temperatur 100 101  
Molitz, H. 577  
Momentenbeiwert 125  
Moulton, F.R. 576  
Mündungs-  
– -ebene 15 16  
– -energie 29  
– -geschwindigkeit 460  
– -höhe 394 395  
– -horizont 33 395  
natürliches System der Bewegungsgleichungen 182 183  
Neigungswinkel der Flugbahntangente 41, 201  
Nejšuler, L.Ja. 577  
Nekrasov, A.I. 577  
nichtlineare Störungstheorie 334  
Normal-  
– -atmosphäre 57, 115, 386  
– -bahn 52, 57, 390, 501  
– -bedingungen 331, 531  
– –, ballistische 493, 531  
– –, meteorologische 493, 531  
– –, topographische 531  
Öffnungswinkel  
– der Kegelspitze 134  
– der ogivalen Spitze 134  
– des Heckkonus 135  
Ostoslauskij, J.V. 576  
Otto|Lardillon, Tabellen von 238, 552  
parabolische Theorie 14, 87  
Parameterentwicklungen 287, 289  
Parameterstörungen 50, 332, 352  
PBH, Verfahren 280  
Piton-Bressant 280  
Piton-Bressant|Hélie, Verfahren von 280  
Popoff, K. 289, 577  
Potenzansatz für  $b'$  230  
Potenzansätze 273  
Potenzreihenentwicklungen der Flugbahnelemente 276, 290  
Projektierung, ballistische 321, 492  
Prudnikov, N.E. 577  
Pseudogeschwindigkeit 246, 258  
Popoffsche Parameterentwicklungen 290  
 $p$ -System der Bewegungsgleichungen 184, 185, 463, 466, 467, 468  
Querkraft 125  
Querkraftbeiwert 125  
Querschnittsbelastung 140, 144, 149, 150, 420  
Querwind  
–, homogener 407, 414  
–, Störungskoeffizienten 419  
Raketenballistik 9, 101  
Raketengeschosse 133, 159  
Rasanz 66, 67, 68, 70, 83  
– -maß 67  
Rechtsabweichung 350, 513  
Rechtsdrall 513, 528  
Reduktion auf die Mündung 224, 225  
Reibungswiderstand 135  
Reichweite, maximale 75  
Reihenentwicklung der Bahnelemente 276  
Relativitätsprinzip der Aerodynamik 124  
Reststreuungen 504  
Reynolds-Zahl 126, 127  
Richten, direktes 497, 498, 499, 500  
–, indirektes 497, 498, 500, 502  
Richtfehler 330

- Richtungswinkel der Flugbahntangente 481
- Rundungsfehler 319, 320
- Runge-Kutta*, Verfahren von 305, 306, 307, 308, 309, 311
- Sabudski* 158
- Sählbrandt, D.* 576
- Sapiro, Ja. M.* 576
- Schallgeschwindigkeit 95, 107, 112, 114
- Scheitel 33
- Scheve* 158
- Schichtgrenzen (Normalatmosphäre) 118, 122
- Schießlehre 330, 514
- Schießplatz 519
- Schießverfahren 330
- Schrägentfernung 67
- Schrägschußweite 39, 41  
–, maximale 43, 45
- Schrittfaktor 314, 315
- Schrittkennzahl 314
- Schrittweite 297, 298, 316, 317  
–, natürliche 314, 315, 316, 317  
–, Bemessungsverfahren 303
- Schuß  
–, horizontaler 217  
–, schwerefreier 217, 218  
–, vertikaler 217
- Schußtafel 296, 318, 321, 492, 496, 515  
– -Schießen 517, 531
- Schußweite  
–, maximale 35, 37, 203  
–, Reduktion auf Normalbedingungen 531, 533  
–, wahrscheinlicher Fehler 535
- Schußweitenänderung 340
- Schwerebeschleunigung 345
- Schwerefeld, kugelsymmetrisches 102, 343, 345
- Schwerkraft 15, 86
- Schwerpunkt 87, 123, 519
- Seitenabweichung 81, 479, 483, 528  
– – durch Drall 528, 529, 530, 531  
– – durch Wind 531
- Seitenwind 335, 413, 419, 482, 512
- Seitenwinkel 80, 83
- Serebrjakov, Ja. M.* 509
- Shintani 313, 314  
–, Verfahren der Blockintegration 313
- Siacci* 158, 244  
–, Luftwiderstandsgesetz 158  
–, Funktionen, primäre 245, 248, 249, 250, 544  
–, Funktionen, sekundäre 245, 249, 254, 255, 256, 555  
– -Verfahren, Ansatz 259, 261, 263  
– –, Formelansätze 252, 253, 254, 255, 257, 260, 262, 263, 264
- Sicherheitsparabel 45, 46
- Šidlovskij, V. P.* 128, 576
- signifikante Flugbahnpunkte 210, 211
- Sluchockij* 508  
–, Tabelle innenballistischer Störungskoeffizienten 508, 575
- Sogwiderstand 135
- spezifische Gaskonstante 101
- Stabilitätsbedingung für die Atmosphäre 95, 98, 100
- Standardatmosphäre 92, 115, 143  
– ANA 120, 121, 122, 152  
– SSA-64 116, 117, 118, 119, 122, 543
- Standard-Luftwiderstandsgesetz 158, 159, 296  
– 1930 158  
– 1943 146, 152, 154, 155, 167, 322, 547  
– *Siacci* 154, 155, 167
- Stange, K.* 292, 577
- Steigflug 47
- Steighöhe, maximale 45, 74
- Stoyanoff, A.* 577
- Störbeschleunigung 349
- Störfunktion 434
- Störungen  
–, konstante 332, 333  
–, variable 332, 333
- Störungsanfangswertproblem 432, 433, 434, 436  
–, homogenes 441  
–, inhomogenes 440

- Störungsanfangswertproblem  
   -, Integration 444  
   -, V-transformiertes 439, 444  
 Störungsdifferentialgleichungen 356, 456  
   -, lineare 334, 432, 456, 463, 479  
   -, nichtlineare 334  
 Störungsformeln 386  
 Störungskoeffizienten 52, 53, 354, 355, 401, 426, 501, 535  
   -, innenballistische 508, 575  
 Störungsrechnung 11  
 Störungstheorie 50, 92, 186, 330, 353, 355  
   -, ballistische 50, 330, 335  
 Störungsvektor 444, 447, 448  
 Stratopause 90  
 Stratosphäre 89  
*Straževa, J. V.* 576  
 Streuungscharakteristiken 504, 514  
*Strobel, R.* 577  
 Stütz-  
   - -bahnen 289, 291, 321  
   - -entfernungen 535  
   - -stellen 297  
*Stutz, W.* 577  
 Superaerodynamik 128
- Tafelwerk  
   - für die Bahnelemente 320, 321, 322, 386, 562  
   - für die *Siacci*-Funktionen 321  
   - für die Störungskoeffizienten 426, 568, 575  
 Tangentialbeschleunigung 197  
 Temperatur  
   -, fiktive 113, 114  
   -, kinetische 114  
   - -abweichung 484, 485  
   - -gradient 98, 99, 103  
 Theorie der Verbesserungen 13, 331  
 Thermosphäre 90  
 Trägheitsmoment 519  
 Transformation der Vergleichsvariablen 377  
 Translationsbewegung 124  
 Translationsgeschwindigkeit 420  
 Transschallströmung 128, 129
- Treffpunktverlagerung 81  
 Tropopause 89  
 Troposphäre 88  
*r*-System der Bewegungsgleichungen 20, 175, 336, 456  
   -, modifiziertes 181, 182, 381
- Überschallströmung 128, 129  
 Unstetigkeitsflächen 130  
 Unterschallströmung 128, 129  
*U*-System der Bewegungsgleichungen 187, 247
- Vakuumbahn 282  
 Vakuumballistik 14, 15, 29  
*Vallier* 158  
 Variablensysteme 20  
 Variablentransformation 191  
*Venicel, D. A.* 576  
 Verbesserungskoeffizient 501, 503, 504, 538  
 Verdichtungsstoß 130, 132  
 Verfahren  
   - *Adams-Störmer* 322  
   - *PBH* 280  
   - *Runge-Kutta* 305, 306, 307, 308, 309, 311  
   - von *Kazakov* 322  
   - von *Shintani* 313  
   - von *Siacci* 244, 428  
 Verfahrensfehler 302  
 Vergleichskriterium 51  
 Vergleichsvariable 51, 52, 336, 355, 444  
 Vergleichsvariablen-  
   - -system 444  
   - -Transformation 355, 363, 371, 372, 381, 401  
   - -Transformationsmatrix 359, 366, 367  
 Verkanten der Waffe 79  
 Verkantungs-  
   - -achse 79  
   - -fehler 79  
   - -winkel 79, 82, 83  
 Versuchsplanung 520

Versuchsschießen 492, 493, 495, 520,  
522, 523  
Vertauschungsmatrix 373  
vertikaler Schuß 227, 228  
Verzögerungsfunktion 246, 389  
virtuelle Temperatur 108  
Visiereinrichtung 108  
Visierlinie 80  
Vorhaltewinkel 49, 50  
Vorhersageintervall 15, 16, 31  
VT-Matrix 367

Wellenwiderstand 134, 135  
Wettersphäre 88  
Widerstand 125  
Widerstands-  
- -ansatz 220, 222  
- -beiwert 125, 132, 133, 134, 551  
- -ebene 125  
- -funktion 140, 141, 547  
- -gesetz 158, 159, 526  
- -grad 547  
Wind  
-, homogener 406, 407  
-, mittlerer ballistischer 486  
- -geschwindigkeit 93, 351, 352,  
407

- -, konstante 352  
- -, wahrscheinlicher Fehler 537  
- -korrekturen 531  
Winkelgruppen 37, 38, 44, 71, 509  
Wirkungsbereich (Waffe) 47  
*Wolff, W.* 577  
Wurfweite 50  
-, maximale 50

*x*-System der Bewegungsgleichungen  
23, 183, 184

*y*-System der Bewegungsgleichungen  
186

*Zacharčenko, V. Č.* 577  
Zähigkeit, dynamische 93  
Zentrifugalkraft 342, 343  
Ziel-  
- -höhe 73, 75  
- -punkt 16  
Zustandsgleichung 94, 107, 108  
Zustandsparameter 94  
Zuwachsfunktion 300, 307





# Inhaltsverzeichnis

	<b>Vorwort</b> .....	5
1.	<b>Einleitung: Ballistische Flugbahnmodelle</b> .....	9
	Kontrollfragen zu Kapitel 1 .....	13
2.	<b>Die parabolische Theorie der Geschosfbewegung</b> .....	14
2.1.	<i>Das Bahnmodell der parabolischen Theorie</i> .....	14
2.2.	<i>Die Integration der Bewegungsgleichungen</i> .....	19
2.2.1.	Das $t$ -System der Bewegungsgleichungen .....	20
2.2.2.	Das $x$ -System der Bewegungsgleichungen .....	23
2.2.3.	Der Energiesatz für die Geschosfbewegung im Vakuum .....	29
2.3.	<i>Die Bahnelemente im Flugbahngipfel</i> .....	30
2.4.	<i>Die Bahnelemente im Auftreffpunkt in der Mündungsebene</i> .....	33
2.5.	<i>Die maximale Schußweite in der Mündungsebene</i> .....	35
2.6.	<i>Der Schuß im geneigten Gelände</i> .....	38
2.6.1.	Aufgabenstellung .....	38
2.6.2.	Die Bahnelemente im Auftreffpunkt .....	39
2.6.3.	Die maximale Schrägschußweite .....	43
*2.7.	<i>Ballistik des Bombenwurfs</i> .....	47
2.7.1.	Aufgabenstellung .....	47
2.7.2.	Die Bahnelemente der Bombenbahn .....	48
2.7.3.	Die maximale Bombenwurfweite .....	50
2.8.	<i>Grundbegriffe der Störungstheorie</i> .....	50
2.8.1.	Vergleichsvariable .....	51
2.8.2.	Störungskoeffizienten .....	52

2.8.3.	Die Fehlertransport-Matrix .....	55
2.8.4.	Ballistische Mittelwerte .....	56
2.8.4.1.	Aufgabenstellung und Ausgangsannahmen .....	56
2.8.4.2.	Gewichtsfaktoren für die Mittelung variabler Störungen .....	59
2.8.4.3.	Die mittlere Flugbahnhöhe .....	61
2.9.	<i>Einige Anwendungen der parabolischen Theorie</i> .....	63
2.9.1.	Die Formel von <i>Lender</i> zur Korrektur des Aufsatzwinkels .....	63
*2.9.2.	Rasanzmaße für Flugbahnen .....	66
2.9.2.1.	Vorbemerkungen .....	66
2.9.2.2.	Die Definition des Rasanzmaßes $R$ .....	66
2.9.2.3.	Die Rasanz $R$ beim Schießen mit Geländewinkel .....	68
2.9.2.4.	Die Rasanz $R$ bei einem in der Mündungsebene liegenden Ziel .....	70
2.9.2.5.	Die Entfernung des direkten Schusses .....	73
2.9.2.6.	Ein Zahlenbeispiel zur Transformation der Entfernung des direkten Schusses .....	76
*2.9.3.	Der bestrichene Raum .....	76
*2.9.4.	Die Verkantungsfehler .....	79
2.9.4.1.	Vorbemerkungen .....	79
2.9.4.2.	Die universellen geometrischen Beziehungen .....	80
2.9.4.3.	Die Treffpunktabweichung nach der parabolischen Theorie .....	81
	Kontrollfragen zu Kapitel 2 .....	84
	Übungsaufgaben zu Kapitel 2 .....	84
3.	<b>Der Luftwiderstand eines Geschosses</b> .....	86
3.1.	<i>Übersicht</i> .....	86
3.2.	<i>Das Schichtmodell der Erdatmosphäre</i> .....	87
3.2.1.	Experimentelle Befunde über die vertikale Struktur der Atmosphäre .....	87
3.2.1.1.	Die Troposphäre .....	88
3.2.1.2.	Die Tropopause .....	89
3.2.1.3.	Die Stratosphäre .....	89
3.2.1.4.	Die Stratopause .....	90
3.2.1.5.	Die Mesosphäre .....	90
3.2.1.6.	Die Mesopause .....	90
3.2.1.7.	Die Thermosphäre .....	90
3.2.1.8.	Die Exosphäre .....	91
3.2.2.	Grundannahmen der modernen Modellatmosphären .....	92
3.2.3.	Physikalische Beziehungen und Definitionen .....	93
3.2.3.1.	Parameter der Atmosphäre .....	93
3.2.3.2.	Die Zustandsgleichung .....	94
3.2.3.3.	Die statische Gleichgewichtsbedingung .....	95
*3.2.3.4.	Die thermodynamische Stabilitätsbedingung .....	98
3.2.3.5.	Die Molekularer Temperatur .....	100
3.2.3.6.	Die geopotentielle Höhe .....	101

3.2.4.	Die meteorologischen Elemente der Modellatmosphäre .....	103
3.2.4.1.	Die Bestimmungsgleichungen .....	103
3.2.4.2.	Der Druck- und Dichteverlauf in isothermen Schichten .....	104
3.2.4.3.	Die Druck- und Dichtefunktionen bei linearem Temperaturverlauf ...	105
3.2.4.4.	Der Verlauf der Schallgeschwindigkeit .....	106
*3.2.5.	Der Einfluß der Luftfeuchte auf die meteorologischen Elemente der Modellatmosphäre .....	107
3.2.5.1.	Die Zustandsgleichung der feuchten Luft .....	107
3.2.5.2.	Feuchtemaße .....	109
3.2.5.3.	Der Druckverlauf in der feuchten Atmosphäre bei konstanter relativer Luftfeuchte .....	111
3.2.5.4.	Der Druckverlauf in der feuchten Atmosphäre bei höhenunabhängiger Feuchtezahl .....	111
3.2.5.5.	Die Schallgeschwindigkeit in feuchter Luft .....	112
3.2.5.6.	Fiktive Temperaturen und fiktive Höhen .....	113
3.2.6.	Standardatmosphären .....	115
3.2.6.1.	Allgemeines .....	115
3.2.6.2.	Die Standardatmosphäre 64 .....	116
3.2.6.3.	Die Artillerie-Normalatmosphäre .....	120
3.3.	<i>Die aerodynamischen Kräfte bei der stationären Umströmung eines Geschosses</i> .....	123
3.3.1.	Der allgemeine Ansatz für die aerodynamischen Kräfte .....	123
3.3.2.	Strömungstypen .....	127
3.3.2.1.	Klassifizierung von Strömungen nach der Größe der <i>Knudsen-Zahl</i> ...	127
3.3.2.2.	Klassifizierung von Strömungen nach der Größe der <i>Mach-Zahl</i> ....	128
3.3.2.3.	Unstetigkeitsflächen in Strömungen .....	129
3.3.3.	Der Widerstandsbeiwert und seine Komponenten .....	132
3.3.4.	Ein Zahlenbeispiel für die Berechnung des Widerstandsbeiwerts ....	136
3.4.	<i>Die Darstellung des Luftwiderstands in der Ballistik</i> .....	138
3.4.1.	Der moderne Ansatz für die Verzögerung durch den Luftwiderstand ..	138
3.4.2.	Der klassische Ansatz für die Verzögerung durch den Luftwiderstand	141
*3.4.3.	Der Ballistische Widerstandsgrad .....	144
3.4.4.	Der Massenkoeffizient eines Geschosses .....	147
3.5.	<i>Standard-Luftwiderstandsgesetze</i> .....	150
3.5.1.	Der Formkoeffizient .....	150
3.5.2.	Das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 .....	152
*3.5.3.	Die Abhängigkeit der $G(v_{\tau})$ -Tabelle von den Bodenwerten der Standardatmosphäre .....	157
3.5.4.	Weitere Standard-Luftwiderstandsgesetze .....	158
3.6.	<i>Die Anpassung von Luftwiderstandsgesetzen</i> .....	159
3.6.1.	Lokale Anpassung von Luftwiderstandsgesetzen .....	160
3.6.2.	Anpassung von Luftwiderstandsgesetzen im Mittel .....	162
3.6.3.	Globale Anpassung von Luftwiderstandsgesetzen .....	163
3.6.3.1.	Globale Anpassung bei bekanntem individuellem Widerstandsgesetz	164

3.6.3.2.	Globale Anpassung bei unbekanntem individuellem Widerstandsgesetz	165
3.6.3.3.	Globale Anpassung von Standard-Luftwiderstandsgesetzen	166
	Kontrollfragen zu Kapitel 3	168
	Übungsaufgaben zu Kapitel 3	169
<b>4.</b>	<b>Das klassische Bahnmodell der Äußerer Ballistik</b>	<b>170</b>
4.1.	<i>Aufstellung des Bahnmodells</i>	170
4.1.1.	Das System der physikalischen Voraussetzungen	170
4.1.2.	Das Anfangswertproblem für das klassische Bahnmodell	173
4.1.3.	Der Energiesatz	175
*4.1.4.	Erweiterung des klassischen Bahnmodells für Fernbahnen	177
4.2.	<i>Äquivalente Darstellungen der Bewegungsgleichungen</i>	180
4.2.1.	Vorbemerkungen	180
4.2.2.	Das modifizierte $t$ -System der Bewegungsgleichungen	181
4.2.3.	Die natürlichen Bewegungsgleichungen	182
4.2.4.	Das $x$ -System der Bewegungsgleichungen	183
4.2.5.	Das $p$ -System der Bewegungsgleichungen	184
4.2.6.	Das $\vartheta$ -System der Bewegungsgleichungen	185
4.2.7.	Das $y$ -System der Bewegungsgleichungen	186
4.2.8.	Das $U$ -System der Bewegungsgleichungen	187
*4.2.9.	Darstellung des Flugbahnverlaufs in einem schiefwinkligen Koordinatensystem	188
*4.2.10.	Zulässigkeit von Variablentransformationen in den Bewegungsgleichungen	191
4.3.	<i>Allgemeine Eigenschaften von Flugbahnen im luftgefüllten Raum</i>	193
4.3.1.	Eigenschaften der Bahngeschwindigkeit	194
4.3.2.	Aussagen über den Neigungswinkel der Flugbahntangente	200
4.3.3.	Der optimale Abgangswinkel	203
4.3.4.	Aussagen über die Bahnelemente im Flugbahngipfel	205
4.3.5.	Näherungsformeln für die Bahnelemente im Flugbahngipfel	208
4.3.6.	Signifikante Punkte der Flugbahn	210
	Kontrollfragen zu Kapitel 4	212
	Übungsaufgaben zu Kapitel 4	213
<b>5.</b>	<b>Verfahren zur Lösung des 1.Hauptproblems beim klassischen Bahnmodell der Äußerer Ballistik</b>	<b>214</b>
5.1.	<i>Überblick über die Lösungsverfahren</i>	214
5.2.	<i>Geradlinige Flugbahnen</i>	216
5.2.1.	Der schwerkerefreie Schuß in einer konstanten Atmosphäre	217
5.2.1.1.	Vorbemerkungen	217

5.2.1.2.	Die Bahnelemente bei beliebigem Widerstandsgesetz . . . . .	218
5.2.1.3.	Die Bahnelemente bei linearem Widerstandsgesetz . . . . .	220
5.2.1.4.	Die Bahnelemente bei quadratischem Widerstandsgesetz . . . . .	222
5.2.1.5.	Reduktion von Bahngeschwindigkeitsmessungen auf die Mündung der Waffe . . . . .	224
5.2.2.	Der vertikale Schuß in einer konstanten Atmosphäre . . . . .	227
5.3.	<i>Potenzansätze für den Luftwiderstand bei konstanter Atmosphäre</i> . . . . .	229
5.3.1.	Die Bahnelemente bei linearem Widerstandsgesetz . . . . .	230
5.3.1.1.	Die Integration der Bewegungsgleichungen im $u$ -System . . . . .	230
5.3.1.2.	Einige allgemeine Flugbahneigenschaften . . . . .	232
5.3.1.3.	Die Bahnelemente im Gipfelpunkt . . . . .	233
5.3.1.4.	Die Bahnelemente im Auftreffpunkt . . . . .	234
5.3.1.5.	Der Fehler der Approximation der Flugbahn durch eine Gerade . . . . .	234
5.3.2.	Die Flugbahnelemente bei quadratischem Widerstandsgesetz und konstanter Atmosphäre . . . . .	236
5.3.2.1.	Voraussetzungen . . . . .	236
5.3.2.2.	Die Bewegungsgleichungen im $p$ -System . . . . .	237
5.3.2.3.	Die Integration der Bewegungsgleichungen . . . . .	239
*5.3.2.4.	Die Flugbahnasymptoten . . . . .	241
5.3.2.5.	Die Ermittlung des globalen Formkoeffizienten . . . . .	242
5.4.	<i>Das Verfahren von Siacci für rasante Flugbahnen</i> . . . . .	244
5.4.1.	Vorbemerkungen . . . . .	244
5.4.2.	Der <i>Siacci</i> -Ansatz für die Luftwiderstandsfunktion . . . . .	245
5.4.3.	Die Bewegungsgleichungen im $U$ -System . . . . .	247
5.4.4.	Die Primären <i>Siacci</i> -Funktionen . . . . .	249
5.4.5.	Die Integration der Bewegungsgleichungen . . . . .	251
5.4.6.	Die Bahnelemente im Flugbahngipfel . . . . .	252
5.4.7.	Die Flugbahnelemente im Auftreffpunkt . . . . .	253
5.4.8.	Die Sekundären <i>Siacci</i> -Funktionen . . . . .	254
5.4.9.	Spezielle <i>Siacci</i> -Ansätze . . . . .	257
5.4.9.1.	Die Struktur des Anpassungsfaktors $k'$ . . . . .	257
5.4.9.2.	Der <i>Siacci</i> -Ansatz A . . . . .	259
5.4.9.3.	Der <i>Siacci</i> -Ansatz B . . . . .	261
5.4.9.4.	Der <i>Siacci</i> -Ansatz C . . . . .	263
5.4.9.5.	Der <i>Siacci</i> -Ansatz D . . . . .	264
5.4.10.	Einige Anwendungen der <i>Siacci</i> -Formeln . . . . .	265
5.4.10.1.	Das Schwenken von <i>Siacci</i> -Flugbahnen . . . . .	265
5.4.10.2.	Der Aufsatzwinkel beim Schießen mit Geländewinkel . . . . .	267
5.4.10.3.	Näherungsformeln für die vertikale Fallstrecke eines Geschosses . . . . .	268
5.4.10.4.	Ein Zahlenbeispiel für die Anwendung der <i>Siacci</i> -Funktionen . . . . .	270
5.5.	<i>Lösung des Hauptproblems der Äußeren Ballistik durch Potenzreihenansätze</i> . . . . .	273
5.5.1.	Mathematische Vorbemerkungen . . . . .	273
5.5.2.	Grundtypen außenballistischer Reihenentwicklungen . . . . .	276
5.5.3.	Potenzreihenentwicklung nach der Horizontalentfernung $x$ . . . . .	277

5.5.4.	Das Verfahren von <i>Piton-Bressant/Hélie</i> .....	280
5.5.4.1.	Der Ansatz für die Flugbahngleichung .....	280
5.5.4.2.	Die Anpassungsbedingung .....	281
5.5.4.3.	Die Formeln für die Bahnelemente .....	282
5.5.4.4.	Die Bahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt bei Anpassung der Schußweiten .....	283
5.5.4.5.	Ein Zahlenbeispiel für die Anwendung des Verfahrens PBH .....	286
5.5.5.	Parameterentwicklungen bezüglich des Abgangswinkels.....	287
5.6.	<i>Die numerische Integration des Anfangswertproblems des klassischen Bahnmodells</i> .....	294
5.6.1.	Allgemeine Eigenschaften und Klassifikation der numerischen Inte- grationsverfahren .....	295
5.6.2.	Die mathematische Beschreibung von Einschritt-Verfahren.....	299
5.6.3.	Schrittweitenbemessung bei Einschritt-Integrationsverfahren .....	303
5.6.4.	Das Verfahren <i>Runge-Kutta</i> .....	305
*5.6.5.	Spezielle Schrittweite-Bemessungsverfahren .....	309
5.6.5.1.	Schrittweitenkriterien unter Verwendung des lokalen Abbrechfehlers	309
5.6.5.2.	Schrittweitenkriterien unter Berücksichtigung des fortgepflanzten Ab- brechfehlers .....	313
5.6.5.3.	Die natürliche Schrittweite nach <i>Collatz</i> .....	314
5.6.6.	Einige Bemerkungen zur Gesamtgenauigkeit der numerischen Inte- gration der Bewegungsgleichungen .....	318
5.7.	<i>Ballistische Tafelwerke für die Flugbahnelemente</i> .....	320
5.7.1.	Inhalt und Aufstellung der Tafeln für die Flugbahnelemente .....	320
5.7.2.	Das außenballistische Tafelwerk für das Standard-Luftwiderstands- gesetz 1943 .....	322
5.7.3.	Zahlenbeispiele für die Interpolation in den Tafeln der Bahnelemente	322
	Kontrollfragen zu Kapitel 5 .....	325
	Übungsaufgaben zu Kapitel 5 .....	326
6.	<b>Außenballistische Störungstheorie</b> .....	329
6.1.	<i>Gegenstand und Methoden der außenballistischen Störungstheorie</i> .....	329
6.1.1.	Gegenstand der Störungstheorie .....	329
6.1.2.	Klassifizierung der systematischen Flugbahnstörungen .....	331
6.1.2.1.	Einfluß der Störungen auf die Gültigkeit des Bahnmodells .....	331
6.1.2.2.	Konstante und variable Störungen .....	332
6.1.2.3.	Störungen der Bewegungsdifferentialgleichungen und Störungen der Anfangsbedingungen .....	333
6.1.2.4.	Lineare und nichtlineare Störungen .....	334
6.1.2.5.	Einfluß der Störungen auf die Ebenheit der Flugbahn .....	334
6.1.3.	Methoden der außenballistischen Störungstheorie .....	335
6.2.	<i>Störungen beim klassischen Bahnmodell</i> .....	336
6.2.1.	Die Änderungen der Flugbahnparameter .....	336

6.2.2.	Die Flugbahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt unter Berücksichtigung der Erdkrümmung .....	338
*6.2.3.	Die Erde als gleichförmig rotierendes Bezugssystem .....	342
6.2.4.	Die Bewegungsdifferentialgleichungen eines Geschosses bei Windeinfluß .....	351
6.3.	<i>Lineare außenballistische Parameterstörungen</i> .....	352
6.3.1.	Grundsätzliches zur mathematischen Behandlung von Parameterstörungen .....	352
6.3.2.	Die mathematische Darstellung von linearen Parameterstörungen .....	354
6.3.3.	Die numerische Ermittlung der Störungskoeffizienten für die Bahnelemente im Auftreffpunkt .....	360
6.3.4.	Die Vergleichsvariablen-Transformation von Störungskoeffizienten .....	362
6.3.4.1.	Die Vergleichsvariablen-Transformationsmatrix .....	363
6.3.4.2.	Aufeinanderfolge mehrerer Vergleichsvariablen-Transformationen .....	369
6.3.4.3.	Inverse Vergleichsvariablen-Transformationen .....	371
*6.3.4.4.	Elementare Vergleichsvariablen-Transformationen .....	372
6.3.4.5.	Spezielle ballistische VT-Matrizen .....	379
6.3.4.6.	Die numerische Ausführung von Vergleichsvariablen-Transformationen .....	384
6.3.5.	Störungen der Flugbahnelemente infolge von Änderungen der Bodenwerte der Normalatmosphäre .....	386
6.3.5.1.	Vorbemerkungen .....	386
6.3.5.2.	Die Parameterabhängigkeit der Bahnelemente .....	387
6.3.5.3.	Die Berechnung der gestörten Flugbahnelemente im Gipfel- und Auftreffpunkt .....	392
6.3.5.4.	Der Einfluß einer Änderung der Mündungshöhe auf die Flugbahnelemente .....	394
6.3.5.5.	Die Störungskoeffizienten für Änderungen des Luftdrucks am Boden .....	395
6.3.5.6.	Die Störungskoeffizienten für Änderungen der Lufttemperatur am Boden .....	397
6.3.5.7.	Vergleichsvariablen-Transformation von linearen Beziehungen zwischen Störungskoeffizienten .....	401
6.3.5.8.	Ein Zahlenbeispiel für die Berechnung des Störungseinflusses von Änderungen des Luftdrucks und der Lufttemperatur am Boden .....	403
6.4.	<i>Der Einfluß eines homogenen Windes auf die Flugbahn</i> .....	406
6.4.1.	Aufgabenstellung .....	406
6.4.2.	Die Bahnelemente der windgestörten Flugbahn .....	407
6.4.3.	Die Bahnelemente der windgestörten Flugbahn im Auftreffpunkt in der Mündungsebene .....	413
6.4.4.	Die Störung der Flugbahnelemente im Auftreffpunkt durch homogenen Längswind .....	414
6.4.5.	Die Störung der Flugbahnelemente im Auftreffpunkt durch homogenen Querwind .....	414
6.4.6.	Die Störungskoeffizienten für Längswindeinfluß .....	415
6.4.7.	Die Vergleichsvariablen-Transformation der Störungskoeffizienten für Längswindeinfluß .....	417
6.4.8.	Die linearisierten Störungsformeln für den Seitenwindeinfluß .....	419
6.4.9.	Ein Zahlenbeispiel für die Berechnung der Windstörungen .....	420

6.5.	<i>Die Tafeln der Störungskoeffizienten für die Horizontalschußweite</i> ....	426
6.6.	<i>Die Störungskoeffizienten der Horizontalschußweite nach dem Näherungsverfahren von Siacci</i> .....	427
6.6.1.	Der Störungskoeffizient der Horizontalschußweite für Änderungen des Ballistischen Koeffizienten .....	428
6.6.2.	Der Störungskoeffizient der Horizontalschußweite für Änderungen des Abgangswinkels .....	429
6.6.3.	Der Störungskoeffizient der Horizontalschußweite für Änderungen der Anfangsgeschwindigkeit .....	430
6.7.	<i>Das lineare Störungsanfangswertproblem und dessen Integration (Mathematische Grundlagen)</i> .....	432
6.7.1.	Überblick .....	432
6.7.2.	Das zugeordnete lineare Störungsanfangswertproblem .....	433
6.7.3.	Die linearen Störungsdifferentialgleichungen für das transformierte nichtlineare Störungsanfangswertproblem .....	436
6.7.4.	Das V-transformierte Störungsanfangswertproblem .....	439
6.7.5.	Die Lösung des inhomogenen Störungsanfangswertproblems .....	440
6.7.6.	Normierung der Fundamentalmatrix .....	444
6.7.6.1.	Aufgabenstellung .....	444
6.7.6.2.	Die verallgemeinerte <i>Cauchy</i> -Matrix .....	445
6.7.6.3.	Normierung der Fundamentalmatrix bei festem Endpunkt des Integrationsintervalls .....	447
6.7.6.4.	Normierung der Fundamentalmatrix bei variablem Endpunkt des Integrationsintervalls .....	448
*6.7.7.	Ermittlung und Invertierung von Fundamentalmatrizen .....	449
6.7.7.1.	Lineare Unabhängigkeit der Fundamentallösungen .....	449
6.7.7.2.	Ermittlung der Fundamentallösungen bei einem dynamischen System .....	450
6.7.7.3.	Ermittlung der Fundamentallösungen bei einem System von zwei gekoppelten linearen Differentialgleichungen .....	451
6.7.7.4.	Invertierung von Fundamentalmatrizen durch Integration der Störungsdifferentialgleichungen .....	453
6.7.7.5.	Invertierung der Fundamentalmatrix durch Zerlegung in Blöcke ...	454
6.8.	<i>Die linearen ballistischen Störungsdifferentialgleichungen</i> .....	456
6.8.1.	Die linearen Störungsdifferentialgleichungen im <i>t</i> -System .....	456
6.8.1.1.	Die Berechnung der Koeffizientenmatrix .....	456
6.8.1.2.	Die Störfunktion bei Änderung des Ballistischen Koeffizienten .....	459
6.8.1.3.	Die Anfangsstörung bei Änderung der Mündungsgeschwindigkeit ...	460
6.8.1.4.	Die Anfangsstörung bei Änderung des Abgangswinkels .....	461
6.8.1.5.	Die Störfunktion für die Richtungsänderung der Fallbeschleunigung ..	461
6.8.1.6.	Die Störfunktion zur Berücksichtigung der <i>Coriolis</i> -Beschleunigung ..	461
6.8.1.7.	Die Störfunktion zur Berücksichtigung eines variablen Längswindes ..	462
6.8.2.	Die linearen Störungsdifferentialgleichungen im <i>p</i> -System .....	463
6.8.2.1.	Die Koeffizientenmatrix des V-transformierten Systems .....	463
6.8.2.2.	Die Aufstellung der VT-Matrix $P_{(1,6)}(t)$ .....	465
6.8.2.3.	Die Anfangsstörungen und Störfunktionen im <i>p</i> -System .....	466
6.8.3.	Die Integration der Störungsdifferentialgleichungen im <i>p</i> -System ....	468



6.8.3.1.	Die Ermittlung der Fundamentalmatrix .....	468
6.8.3.2.	Die Aufstellung der VT-Matrix $P_{(6,4)}(t)$ .....	470
6.8.3.3.	Die Formel für den Schußweitenfehler in der Horizontalebene .....	472
6.8.3.4.	Der Schußweitenfehler infolge einer Änderung der Verzögerungsfunktion $E$ .....	473
6.8.3.5.	Die Störungskoeffizienten der Schußweite für Änderungen der Anfangsgeschwindigkeit und des Abgangswinkels .....	478
6.8.3.6.	Die Schußweitenänderung infolge des Längswindeinflusses .....	479
6.8.4.	Die linearen Störungsdifferentialgleichungen für die Seitenabweichung .....	479
6.8.4.1.	Die Integration der linearen Störungsdifferentialgleichungen für die Seitenabweichungen .....	480
6.8.4.2.	Der Einfluß eines Seitenwindes variabler Stärke .....	482
6.8.4.3.	Die Seitenabweichung durch die <i>Coriolis</i> -Beschleunigung .....	483
6.9.	<i>Ballistische Mittelwerte variabler Störungen</i> .....	483
6.9.1.	Vorbemerkungen .....	483
6.9.2.	Die mittlere ballistische Temperaturabweichung .....	484
6.9.3.	Der mittlere ballistische Wind .....	486
6.9.4.	Die näherungsweise Berechnung ballistischer Mittelwerte .....	487
	Kontrollfragen zu Kapitel 6 .....	489
	Übungsaufgaben zu Kapitel 6 .....	490
7.	<b>Die Aufstellung von Schußtafeln für die Erdartillerie</b> .....	492
7.1.	<i>Vorbemerkungen</i> .....	492
7.2.	<i>Inhalt und Aufbau von Erdschußtafeln</i> .....	497
7.2.1.	Klassifizierung der Erdschußtafeln .....	497
7.2.2.	Der Aufbau der Schußtafeln für das Schießen im direkten Richten ..	500
7.2.3.	Der Aufbau der Schußtafeln für das Schießen im indirekten Richten ..	500
7.2.4.	Die Angaben der Haupttafeln von Erdschußtafeln .....	501
7.2.5.	Die Formeln für die Verbesserungskoeffizienten der Schußtafeln ....	504
7.2.5.1.	Der Verbesserungskoeffizient für Änderungen des Luftdrucks am Boden	505
7.2.5.2.	Der Verbesserungskoeffizient für Änderungen der Anfangsgeschwindigkeit .....	505
7.2.5.3.	Der Verbesserungskoeffizient für Änderungen der Lufttemperatur am Boden .....	506
7.2.5.4.	Der Verbesserungskoeffizient für Änderungen der Geschossmasse ....	506
7.2.5.5.	Der Verbesserungskoeffizient für Änderungen der Ladungstemperatur	509
7.2.5.6.	Der Störungskoeffizient für Änderungen des Abgangswinkels .....	510
7.2.5.7.	Der Verbesserungskoeffizient für Längswindeinfluß .....	510
7.2.5.8.	Weitere Verbesserungskoeffizienten für die Horizontalschußweite ....	511
7.2.5.9.	Der Verbesserungskoeffizient für Seitenwindeinfluß .....	512
7.2.5.10.	Der Verbesserungskoeffizient für die Drallabweichung .....	513
7.2.6.	Die Formeln für die Streuungscharakteristiken .....	514
7.2.6.1.	Allgemeines .....	514
7.2.6.2.	Die Formel für die wahrscheinliche Abweichung der Horizontalschußweite .....	515

7.2.6.3.	Die Formel für die wahrscheinliche Seitenabweichung des Auftreffpunkts .....	516
7.3.	<i>Die Vorbereitung von Schußtafel-Versuchsschießen</i> .....	517
7.3.1.	Die Vorbereitung der Waffe zum Schießen .....	518
7.3.2.	Die Vorbereitung der Munition .....	518
7.3.3.	Die topographische Vorbereitung des Schießplatzes .....	519
7.3.4.	Die Ermittlung der meteorologischen Bedingungen .....	519
7.3.5.	Die Planung der Schußanzahl und der Anzahl der Versuchsschießen ..	520
7.4.	<i>Die Durchführung von Schußtafel-Versuchsschießen</i> .....	523
7.4.1.	Die Ermittlung der Anfangsbedingungen der Flugbahn .....	523
7.4.1.1.	Die Ermittlung der Anfangsgeschwindigkeit .....	523
7.4.1.2.	Die Ermittlung des Abgangsfehlerwinkels .....	524
7.4.2.	Die experimentelle Ermittlung der Horizontalschußweite und der wahrscheinlichen Abweichungen des Auftreffpunkts .....	527
7.4.3.	Die Schießversuche zur Ermittlung der Seitenabweichungen .....	528
7.4.3.1.	Das Vergleichsschießen mit zwei Waffen entgegengesetzter Drallrichtung .....	528
7.4.3.2.	Das Schießen mit zwei ballistisch identischen Waffen in entgegengesetzter Richtung .....	529
7.5.	<i>Die Auswertung von Schußtafel-Schießen</i> .....	531
7.5.1.	Die Reduktion der experimentellen Schußweite auf Normalbedingungen .....	531
7.5.2.	Die Reduktion der Schußweite auf den Mündungshorizont bei rasanten Flugbahnen .....	533
7.5.3.	Die Anpassung der Flugbahnvorhersagen an die experimentell ermittelten Schußweiten .....	534
7.6.	<i>Die Genauigkeit der Schußtafel-Angaben</i> .....	535
7.6.1.	Die wahrscheinliche Abweichung der experimentellen Horizontalschußweite .....	535
7.6.2.	Die wahrscheinliche Abweichung der Anfangsgeschwindigkeit .....	536
7.6.3.	Die wahrscheinliche Abweichung des Abgangswinkels .....	536
7.6.4.	Die wahrscheinlichen Fehler bei der Bestimmung der meteorologischen Elemente .....	537
7.6.5.	Die wahrscheinlichen Fehler bei der Berechnung der Verbesserungskoeffizienten .....	538
7.6.6.	Der resultierende wahrscheinliche Fehler der Horizontalschußweite an den Stützstellen .....	538
7.6.7.	Die Gesamtgenauigkeit der Entfernungangaben der Schußtafeln ....	539
	Kontrollfragen zu Kapitel 7 .....	540

<b>Tafelanhang</b> .....	541
<b>Tafel I</b> Standardatmosphäre SSA-64 .....	543
<b>Tafel II</b> Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 .....	547
<b>Tafel III</b> Widerstandsbeiwert $c_w(M)$ (nach [21]) und Widerstandsbeiwert $c_w^{43}(M)$ für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 .....	551
<b>Tafel IV</b> Tabellen von <i>Otto Lardillon</i> .....	552
<b>Tafel V</b> Primäre <i>Siacci</i> -Funktionen für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 .....	554
<b>Tafel VI</b> Sekundäre <i>Siacci</i> -Funktionen für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943 .....	555
<b>Tafel VII</b> Korrekturfunktion $\Phi_2(z)$ zur Berechnung der vertikalen Fallstrecke beim Widerstandsansatz von <i>Siacci</i> .....	559
<b>Tafel VIII</b> Korrekturfunktionen $F_i(Z)$ für die Bahnelemente nach dem Verfahren von <i>Piton-Bressant</i> und <i>Hélie</i> .....	560
<b>Tafel IX</b> Außenballistisches Tafelwerk für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943, Teil 1: Flugbahnelemente im Auftreff- und Gipfelpunkt	562
<b>Tafel X</b> Außenballistisches Tafelwerk für das Standard-Luftwiderstandsgesetz 1943, Teil 2: Störungskoeffizienten für die Horizontalschußweite	568
<b>Tafel XI</b> Innenballistische Störungskoeffizienten nach <i>Sluchockij</i> .....	575
 <i>Literaturverzeichnis</i> .....	 576
<i>Verzeichnis der Formelsymbole</i> .....	579
<i>Sachwörter- und Namenverzeichnis</i> .....	588

